目　录

第三篇 数学物理方程

第二版序言

这一版，文字全部重新写过。“复变函数论”的篇幅略有减少。“傅里叶展开”分为“傅里叶级数”和“傅里叶积分”两章。“数学物理方程”的“行波法”一章只保留了一维波动的达朗伯公式和端点的反射，其余改用分离变数法处理。“分离变数法概要”一章分为“分离变数(傅里叶级数)法”和“分离变数(傅里叶积分)法”两章。

第三篇数学物理方程是全书中心，其中似以定解问题的提出(第八章)、分离变数法以及紧密相关的常微分方程级数解法、球函数和柱函数(第十章——第十四章)为基本内容，教学中应予保证。其他求解方法可按专业要求斟酌取舍。

这一版，调整并增加了较多的例题，还配置了习题，附录的篇幅也有较多增加。为了顾及物理各专业，某些章节(例如§31和§36)的例子、例题、习题涉及的面较广，数量也多了一些，教学中可根据实际情况加以挑选。习题答案，虽经核算，由于时间匆促，仍然难免有误。

初稿写出以后，北京大学吴崇试同志、厦门大学郑建安同志、安徽大学高永椿同志、南京大学柯善哲同志提出不少宝贵意见。南京大学陈俊文同志校核了很大一部分习题答案，徐世良同志提供了一些例题。特此志谢。

编者怀着哀悼袁春及同志的巨大悲痛编写了这一版。春及同志在病重垂危之际还不忘对编者的一贯支持，叮嘱认真编好本书第二版。

梁昆淼　谨识

1978年6月

第一版序言

本书是为综合大学物理专业编写的。它包含三个部分：复变函数论、傅里叶展开和数学物理方程。

对于物理专业来说，我们认为，"数学物理方法"不宜单纯作为数学课程来进行讲授与学习。它既是数学课程，又是物理课程。在这样一门课程中，固然不应该将数学的谨严性弃置不顾，另一方面却也不宜在数学谨严上作过多的要求。虽然在复变函数、傅里叶展开和数学物理方程方面已有不少著名的优秀专门著作，我们仍然感到，在数学理论上不花费过多力量，以鲜明的思路引导读者迅速掌握这些数学工具并应用于物理问题，这样一份教材还是很需要的。本书就以此作为努力目标。

第一篇复变函数论，除基本原理外，着重谈到共轭调和函数、留数定理、拉普拉斯变换等方面的应用。

第二篇傅里叶展开是为第三篇数学物理方程的分离变数法作准备的。当然，傅里叶展开的应用并不限于分离变数法，它是分析许多物理过程的有力工具。

第三篇数学物理方程是全书的中心内容。它研究各种各样的物理过程。其第一个环节在于将物理问题"翻译"为数学问题，一般往往没有加以重视，本书加强了这一环节。其第二个环节则是求解从物理问题翻译出来的数学问题。在各种解法中，本书突出了最基本的重要方法——分离变数法，系统地讨论了各种不同情况下如何运用分离变数法。我们认为，这样有利于学生熟练地用分离变数法去解数学物理问题。特别是特殊函数与分离变数法熔为一体，从分离变数法引起特殊函数，研究了特殊函数之后又回到

分离变数法。在特殊函数的教学中，目的性比较鲜明，也有利于培养学生运用特殊函数解决问题的能力。

除了分离变数法之外，行波法、保角变换法、拉普拉斯变换法也是很重要的方法。其次，我们也介绍了由格林公式导出的解的积分公式，介绍了近似方法。

泛定方程为非齐次的情况下(强迫振动、有源的导热或扩散问题、有电荷的电场等)，我们从物理的推理引出解题的线索，也是本书特色之一。

在1958年的教育革命中，我们检查了过去的教材，并根据我们对教育革命的精神的体会，着手编写这份教材。先后在两个年级中进行教学实践，又根据实践效果再三修改补充。在编写和修改过程中，参加该项教学实践的教师与学生提出不少意见。特别是姚希贤、柯善哲同志还专门进行了几次讨论。在抄写绘图方面，1956级理论物理专门化全体同学给予了很大帮助。

编者深感限于水平，一定有很多不妥当处以及错误和缺点，非常盼望同志们的批评指正。

1959年10月1日于南京大学

在1963年的印刷前，对本书做过一次勘误。这一工作得到刘法同志的大力帮助，编者特此志谢。

1963年1月22日

第一篇　复变函数论

第一章　复变函数

§1. 复数与复数运算

对于复数和复数运算，本节作一次扼要的复习。

一个复数 z 总可以表为某个实数 x 与某个纯虚数 iy 的和，

$$z=x+iy, \tag{1.1}$$

这叫作复数的**代数式**，x 和 y 则分别叫作该复数的**实部**和**虚部**，并分别记作 $\mathrm{Re}z$ 和 $\mathrm{Im}z$。

如果把 x 和 y 当作平面上的点的坐标（图 1），复数 z 就跟平面上的点一一对应起来。这个平面叫作**复数平面**，两个坐标轴分别叫作**实轴**和**虚轴**。

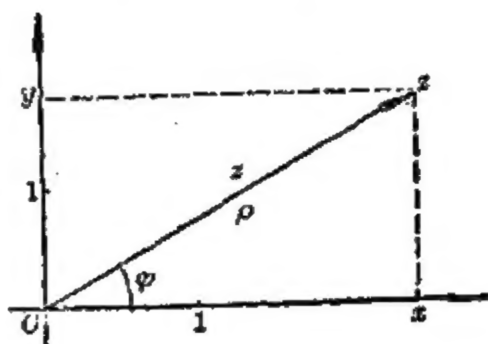


图　1

如果把 x 和 y 当作矢量的直角坐标分量（图 1），复数 z 还可以用来表示复数平面上的矢量。

改用极坐标 ρ 和 φ（图 1）代替直角坐标 x 和 y，

$$\begin{cases}\rho=\sqrt{x^2+y^2}\\ \varphi=\mathrm{arc\,tg}(y/x),\end{cases}\quad \begin{cases}x=\rho\cos\varphi,\\ y=\rho\sin\varphi,\end{cases} \tag{1.2}$$

则复数 z 可表为**三角式**或**指数式**，即

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi), \tag{1.3}$$

或

$$z=\rho e^{i\varphi}. \tag{1.4}$$

ρ 叫作该复数的**模**，记作$|z|$. φ 叫作该复数的**辐角**，记作 $\arg z$.

复数的辐角不能唯一地确定，它可以加减 2π 的整倍数。复数"零"（即实部 x 和虚部 y 都等于零的复数）的辐角没有明确意义。

一个复数 z 的**共轭复数** z^*，指的是对应的点对实轴的反映，即

$$z^*=x-iy=\rho(\cos\varphi-i\sin\varphi)=\rho e^{-i\varphi}. \tag{1.5}$$

前面只是把模为有限的复数跟复数平面上的有限远点一一对应起来，这里应该补充指出：通常把复数平面上的无限远点看作一点，并且称之为**无限远点**。关于无限远点，可以如下理解。把一个球放在复数平面上，球以南极 S 跟复数平面相切于原点。在复数平面上任取一点A，它与球的北极N的联线跟球面相交于 A'. 这样，复数平面上的有限远点跟球面上N以外的点一一对应起来。这种对应关系叫作**测地投影**，这个球叫作**复数球**。设想A点沿着一根通过原点的直线向无限远移动，对应的点 A' 就沿着一根子午线（经线）向北极N逼近。如果A沿着另一根通过原点的直线向无限远移动，则A'沿着另一根子午线向北极N逼近。其实，不管A沿着什么样的曲线向无限远移动，A'总是相应地沿着某种曲线逼近于N. 因此，可以把平面上的无限远看作一点，即通过测地投影而跟复数球上北极N相应的那一点。我们把无限远点记作∞，它的模为无限大，它的辐角则没有明确意义。

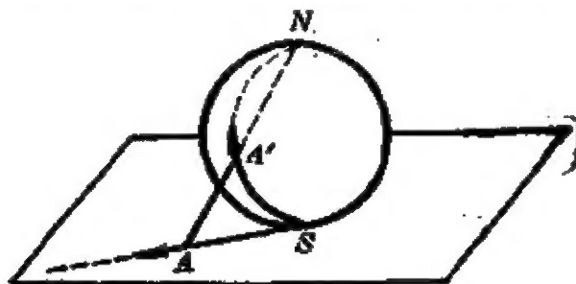


图 2

现在再来说说复数的运算。

复数 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$ 的和 z_1+z_2 的定义是

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2). \tag{1.6}$$

由此明显可见加法的交换律和结合律成立。从对应的矢量来看，两个复数的和对应于两个矢量的合矢量。从而可以知道

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|. \tag{1.7}$$

复数 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$ 的差 z_1-z_2 被定义为 z_1 与 $-z_2=-x_2-iy_2$ 的和，即

$$z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2). \tag{1.8}$$

从而可以知道

$$|z_1-z_2|\geqslant|z_1|-|z_2|. \tag{1.9}$$

复数 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$ 的积 z_1z_2 的定义是

$$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1). \tag{1.10}$$

从这个定义出发，很容易验证，乘法的交换律、结合律与分配律都成立。这样，定义(1.10)可以理解为

$$\begin{aligned}z_1z_2&=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=x_1x_2+iy_1x_2+ix_1y_2+i^2y_1y_2\\&=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1).\end{aligned}$$

复数 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$ 的商 z_1/z_2 的定义是

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}. \tag{1.11}$$

从这个定义出发，很容易验证，除法确是乘法的逆运算。

定义(1.11)可以理解为

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

复数的乘、除、乘方和开方等运算，采用三角式或指数式往往比代数式来得方便。例如，乘积的定义(1.10)就化为

$$\begin{aligned}z_1z_2&=\rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)] &(1.12)\\&=\rho_1\rho_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}. &(1.13)\end{aligned}$$

商的定义(1.11)就化为

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)] \tag{1.14}$$

$$=\frac{\rho_1}{\rho_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}. \tag{1.15}$$

这样，n（整数）次幂 z^n 应是

$$z^n=\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi) \tag{1.16}$$

$$=\rho^n e^{in\varphi}; \tag{1.17}$$

而 n（整数）次根式 $\sqrt[n]{z}$ 则应是

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n}\right) \tag{1.18}$$

$$=\sqrt[n]{\rho}\,e^{i\frac{\varphi}{n}}. \tag{1.19}$$

我们知道，复数 z 的辐角 φ 不能唯一地确定，它可以加减 2π 的整倍数。这样，根式 $\sqrt[n]{z}$ 的辐角 φ/n 也就可以加减 $2\pi/n$ 的整倍数，从而对于给定的 z，$\sqrt[n]{z}$ 可以取 n 个不同的值。

注意区别 $|z|^2$ 与 z^2. $|z|^2$ 是复数 z 的模 ρ 的平方，由 (1.12) 和(1.13)可知 $zz^*=|z|^2$；z^2 则是复数 z 的自乘，即 $zz=z^2$.

以上是关于复数与复数运算的复习。

既然复数可以用实部和虚部表出，复数的研究往往就归结为一对实数（即该复数的实部和虚部）的研究。

例如，复变数 $z=x+iy$ 逼近复常数 $z_0=x_0+iy_0$ 即

$$z\to z_0$$

的问题，完全可以归结为一对实变数 x 和 y 分别逼近实常数 x_0 和 y_0，即

$$x\to x_0, \qquad y\to y_0$$

的问题。这样，关于实变数的和、差、积、商的极限的定理，关于实变数的极限是否存在的判据，显然全部适用于复变数，不必一一细说。

习　　题

1. 下列式子在复数平面上各具有怎样的意义？

(1) $|z|\leqslant 2$，　　(2) $|z-a|=|z-b|$ (a, b 为复常数)，

(3) $\mathrm{Re}\, z>\frac{1}{2}$，　　(4) $|z|+\mathrm{Re}\, z\leqslant 1$，

(5) $\alpha<\arg z<\beta$, $a<\mathrm{Re}\, z<b$ (α, β, a 和 b 为实常数)，

(6) $0<\arg\frac{z-i}{z+i}<\frac{\pi}{4}$，　　(7) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|\leqslant 1$，

(8) $\mathrm{Re}(1/z)=2$，　　(9) $\mathrm{Re}\, z^2=a^2$ (a 是实常数)，

(10) $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2$。

2. 把下列复数用代数式、三角式和指数式几种形式表示出来。

(1) i，　　(2) -1，

(3) $1+i\sqrt{3}$，　　(4) $1-\cos\alpha+i\sin\alpha$ (α 是实常数)，

(5) z^3，　　(6) e^{1+i}，

(7) $(1-i)/(1+i)$。

3. 计算下列数值。(a, b, 和 φ 为实常数)

(1) $\sqrt{a+ib}$，　　(2) $\sqrt[3]{i}$，

(3) i^i，　　(4) $\sqrt[i]{i}$，

(5) $\cos 5\varphi$，　　(6) $\sin 5\varphi$，

(7) $\cos\varphi+\cos 2\varphi+\cos 3\varphi+\cdots+\cos n\varphi$，

(8) $\sin\varphi+\sin 2\varphi+\sin 3\varphi+\cdots+\sin n\varphi$。

§2. 复变函数

当复变数 z 在复数平面的某个区域 B 上连续变动时，如果复变数 w 的值随着 z 的值而变，我们就把 w 叫作区域 B 上的复变数 z 的函数，z 则叫作 w 的宗量，记作

$$w=f(z).$$

我们规定区域 B 是连通的，就是说并不划分为互不连通的小

块。如果区域 B 不包括境界上的点而只包括内点[①]，就叫作开区域(也简称为区域)；如果区域 B 既包括内点又包括境界上的点，就叫作闭区域。

这里举几个复变函数的例子。

多项式

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n \quad (n\text{ 为正整数}), \tag{2.1}$$

有理分式

$$\frac{a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n}{b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots+b_mz^m} \quad (m\text{ 和 }n\text{ 为正整数}), \tag{2.2}$$

根式

$$\sqrt{z-a}, \tag{2.3}$$

式中 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,b_0,b_1,b_2,\cdots,b_m,a$ 是复常数。下面列举几个初等函数的定义式：

$$e^z=e^{x+iy}=e^xe^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y), \tag{2.4}$$

$$\sin z=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz}), \tag{2.5}$$

$$\cos z=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz}), \tag{2.6}$$

$$\mathrm{sh}z=\frac{1}{2}(e^z-e^{-z}), \tag{2.7}$$

$$\mathrm{ch}z=\frac{1}{2}(e^z+e^{-z}), \tag{2.8}$$

$$\ln z=\ln(|z|e^{i\arg z})=\ln|z|+i\arg z, \tag{2.9}$$

$$z^s=e^{s\ln z} \quad (s\text{ 为复数})。 \tag{2.10}$$

由定义式(2.5)和(2.6)不难看出，$\sin z$ 和 $\cos z$ 具有实周期 2π，即

$$\sin(z+2\pi)=\sin z,\quad \cos(z+2\pi)=\cos z. \tag{2.11}$$

---

① 境界点和内点可如下定义：内点不仅本身属于这区域，而且有一个邻域，其中各点都属于这区域；在境界点的任意小邻域中总有区域的内点。

大家知道，在实数领域中，$|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$．把定义式(2.5)和(2.6)按照(2.4)展开为实部和虚部，就求得模

$$|\sin z|=\frac{1}{2}\sqrt{(e^{2y}+e^{-2y})+2(\sin^2 x-\cos^2 x)}, \qquad (2.12)$$

$$|\cos z|=\frac{1}{2}\sqrt{(e^{2y}+e^{-2y})+2(\cos^2 x-\sin^2 x)}, \qquad (2.13)$$

这样，$|\sin z|$和$|\cos z|$完全可以大于1．

由定义式(2.4)，(2.7)和(2.8)不难看出，e^z，$\mathrm{sh}z$ 和 $\mathrm{ch}z$ 具有纯虚数周期 $2\pi i$，即

$$e^{z+2\pi i}=e^z, \quad \mathrm{sh}(z+2\pi i)=\mathrm{sh}z, \quad \mathrm{ch}(z+2\pi i)=\mathrm{ch}z. \qquad (2.14)$$

辐角 $\arg z$ 不能唯一地确定，它可以加减 2π 的整倍数．因此，按照定义式(2.9)，对于给定的 z，对数函数 $\ln z=\ln|z|+i\arg z$ 有无限多个值。

在实数领域中，负数的对数没有意义。但是，按照(2.9)，当 z 为负实数时，复变函数 $\ln z$ 仍有意义，即

$$\ln z=\ln(|z|e^{i\pi+i2n\pi})=\ln|z|+i(2n+1)\pi.$$

把复变函数 $f(z)$的实部和虚部分别记作 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$，

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y). \qquad (2.15)$$

这是说，复变函数可以归结为一对二元实变函数。因此，实变函数论的许多定义、公式、定理都可以直接地移植到复变函数论中。

例如，复变函数 $f(z)$在点 $z_0=x_0+iy_0$ 连续的定义是

$$\text{当 } z\to z_0 \text{ 时，} f(z)\to f(z_0). \qquad (2.16)$$

这可以归结为一对二元实变函数 $u(x,y)$和 $v(x,y)$在点(x_0,y_0)连续，即

$$\text{当}\begin{cases}x\to x_0\\ y\to y_0\end{cases}\text{时，}\quad \begin{cases}u(x,y)\to u(x_0,y_0),\\ v(x,y)\to v(x_0,y_0).\end{cases}$$

但是，复变函数论着重研究的是解析函数（关于"解析函数"一

词参看§5)，而解析函数的实部和虚部是互相关连着，并不独立的。这就使复变函数论带上某些特殊性而不同于实变函数论。“尤其重要的，成为我们认识事物的基础的东西，则是必须注意它的特殊点”(«矛盾论»)。学习复变函数论，应当着重研究它的特殊性。

习　　题

1. 试验证(2.11)—(2.14)几个式子。
2. 计算下列数值。(a 和 b 为实常数，x 为实变数)

   (1) $\sin(a+ib)$，　　(2) $\cos(a+ib)$，

   (3) $\ln(-1)$，　　(4) $\mathrm{ch}^2 z-\mathrm{sh}^2 z$，

   (5) $\cos ix$，　　(6) $\sin ix$，

   (7) $\mathrm{ch}\,ix$，　　(8) $\mathrm{sh}\,ix$，

   (9) $|e^{iax-ib\sin x}|$。
3. 求解方程 $\sin z=2$。

§3. 多值函数

(1.19)式指出，对于给定的 z，n 次根式 $\sqrt[n]{z}$ 可取 n 个不同的值。(2.9)式指出，对于给定的 z，对数函数 $\ln z$ 可取无限多个值，这类复变函数叫作多值函数。

实变函数也有多值的。例如，对于给定的实数值 x，二次根式 $\sqrt{x}$ 有 $+\sqrt{x}$ 和 $-\sqrt{x}$ 两个值。但是，如果把 $+\sqrt{x}$ 和 $-\sqrt{x}$ 当作两个函数看，它们各自是单值的，而且互相独立。

现在研究多值的复变函数。考虑一个简单的例子

$$w=\sqrt{z}=\sqrt{\rho e^{i\varphi}}=\sqrt{\rho}\,e^{i\frac{1}{2}\varphi}. \tag{3.1}$$

对于给定的 $z_0=\rho_0 e^{i\varphi_0}(0\leqslant\varphi_0<2\pi)$，二次根式 $w=\sqrt{z}$ 有两个值：

$$\sqrt{\rho_0}\,e^{i\frac{1}{2}\varphi_0} \quad 与 \quad \sqrt{\rho_0}\,e^{i\frac{1}{2}\varphi_0+i\pi}. \tag{3.2}$$

设想 z 从 $z_0=\rho_0 e^{i\varphi_0}$ 出发，$w=\sqrt{z}$ 从 (3.2) 的前一个值即 $\sqrt{\rho_0}e^{i\frac{1}{2}\varphi_0}$ 出发。令 z 沿着圆周 $z=\rho_0 e^{i\varphi}$ 逆时针绕行一圈而回到原处。在这过程中，z 的辐角 φ 从 φ_0 变到 $\varphi_0+2\pi$，而 $w=\sqrt{z}$ 就相应地变到 $\sqrt{\rho_0}e^{i\frac{1}{2}(\varphi_0+2\pi)}$ 即 $\sqrt{\rho_0}e^{i\frac{1}{2}\varphi_0+i\pi}$，亦即(3.2) 的后一个值。从(3.2)的前一个值出发可以达到后一个值！

令 z 沿着圆周 $z=\rho_0 e^{i\varphi}$ 再逆时针绕行一圈。在这第二圈上，z 的辐角比在第一圈上大 2π，而 $w=\sqrt{z}$ 的辐角则大 π，因此，w 在第二圈上的值不同于在第一圈上的值。等到第二圈结束，z 再次回到原处，它的辐角已变到 $\varphi_0+4\pi$，而 $w=\sqrt{z}$ 相应地变到 $\sqrt{\rho_0}e^{i\frac{1}{2}(\varphi_0+4\pi)}$ 即 $\sqrt{\rho_0}e^{i\frac{1}{2}\varphi_0+i2\pi}$，亦即 $e^{i\frac{1}{2}\varphi_0}$，这正是(3.2) 的前一个值。从(3.2)的后一个值出发可以达到前一个值！这样说来，多值的复变函数 $\sqrt{z}$ 不能分解为两个独立的单值函数，不像多值的实变函数 $\sqrt{x}$ 可以分解为独立的单值函数 $+\sqrt{x}$ 和 $-\sqrt{x}$。

再令 z 沿着圆周 $z=\rho_0 e^{i\varphi}$ 逆时针绕行第三圈。在这第三圈上，z 的辐角比在第一圈上大 4π，而 $w=\sqrt{z}$ 的辐角则大 2π，因此 w 在第三圈上的值同于在第一圈上的值。

为了论说方便，上面让 z 沿着圆周 $z=\rho_0 e^{i\varphi}$ 绕行。其实，只要 z 围绕着原点运行，不管沿着什么曲线，上面的结论全都成立。

一般地说，对于多值函数，存在这样的点，宗量 z 绕它运行一周而回到原处，多值函数并不回复原值，这样的点叫作**支点**。如果宗量 z 绕支点 n 周而回到原处，多值函数回复原值，我们就说这支点是 $n-1$ 阶的。例如，原点 $z=0$ 就是多值函数 $\sqrt{z}$ 的一阶支点。

继续考虑 $\sqrt{z}$ 这个例子。令 z 绕无限远点运行一周。"绕无限远点运行"是什么意思？原来，复数平面上的无限远点对应于复数球的北极(图 2)，如果在复数球面上作一小圆环绕北极，这小圆就对应于复数平面上一个很大的圆。因此，"绕无限远点运行"不过是说在复数平面上沿着很大的圆运行。从(3.1)不难看出：宗量

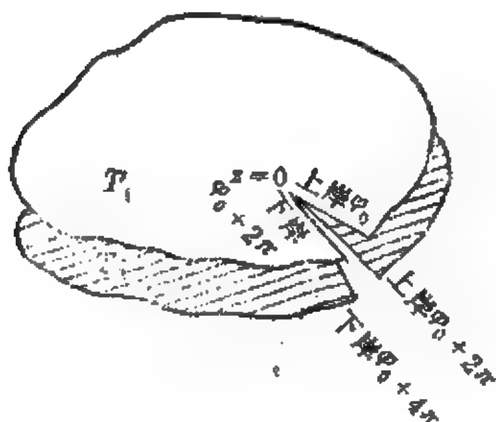


图 3a

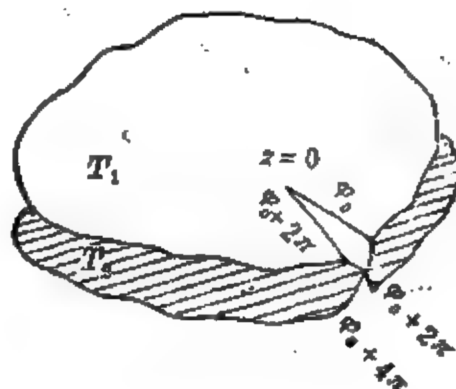


图 3b

z 沿着很大的圆绕一圈，多值函数 $\sqrt{z}$ 并不回复原值；z 沿着很大的圆绕两圈，$\sqrt{z}$ 才回复原值。因此，无限远点 $z=\infty$ 也是多值函数 $\sqrt{z}$ 的一阶支点。

现在试用一种形象化的方式来描述多值函数 $\sqrt{z}$ 的值的变化情况。在 z 绕第二圈的时候，函数 $\sqrt{z}$ 的值不同于 z 绕第一圈的时候，因此不妨设想，z 的第一圈和第二圈分别在"不同的"复数平面上运行（图 3a）。第一圈在复数平面 T_1 上，z 的辐角限制在 φ_0 与 $\varphi_0+2\pi$ 之间，所以应从支点 $z=0$ 沿辐角为 φ_0 的直线作切割，直指另一支点 $z=\infty$，切割的上岸对应于辐角 φ_0，下岸则对应于辐角 $\varphi_0+2\pi$。第二圈则在复数平面 T_2 上，z 的辐角限制在 $\varphi_0+2\pi$ 与 $\varphi_0+4\pi$ 之间，所以应从支点 $z=0$ 沿辐角为 $\varphi_0+2\pi$ 的直线作切割，直指另一支点 $z=\infty$，切割的上岸对应于辐角 $\varphi_0+2\pi$，下岸则对应于辐角 $\varphi_0+4\pi$。z 在 T_1 上绕完第一圈接着就进入 T_2 去绕第二圈，所以 T_1 的下岸应与 T_2 的上岸连接起来（图 3b）；z 的第三圈同于第一圈，这是说，z 在 T_2 上绕完第二圈又回到 T_1，所以 T_2 的下岸应与 T_1 的上岸连接起来。这样，我们得到交叉连接起来的双叶复数平面，如图 3b 所示，这叫作多值函数 $\sqrt{z}$ 的里曼面。

从里曼面的某一叶来看，多值函数成为单值函数，这单值函数

叫作多值函数的单值分支。$\sqrt{z}$ 就有两个单值分支，即 $\sqrt{\rho}\,e^{i\frac{1}{2}\varphi}$ 与 $\sqrt{\rho}\,e^{i\frac{1}{2}\varphi+i\pi}$。但是，从里曼面的构造很容易看出，两个单值分支交叉衔接，并不独立。

习　　题

指出下列多值函数的支点及其阶，并作出里曼面。

(1) $\sqrt{z-a}$，　　(2) $\sqrt{(z-a)(z-b)}$，

(3) $\ln z$，　　(4) $\ln(z-a)$。

§4. 导数(微商)

如果不管 Δz 按什么方式逼近零，比值

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

总是逼近同一个有限的极限，这个极限就叫作函数 $f(z)$ 在点 z 的导数(或微商)，记作 $f'(z)$ 或 df/dz。这时，我们说函数 $f(z)$ 在点 z 是可导的。显然，函数必须在点 z 连续才有可能在点 z 可导。

复变函数的导数定义，在形式上跟实变函数的导数定义一样，因而实变函数论中关于导数的规则和公式往往可应用于复变函数，例如

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dz}(w_1\pm w_2)=\dfrac{dw_1}{dz}\pm\dfrac{dw_2}{dz},\\[2mm] \dfrac{d}{dz}(w_1w_2)=\dfrac{dw_1}{dz}w_2+w_1\dfrac{dw_2}{dz},\\[2mm] \dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{w_1}{w_2}\right)=\dfrac{w_1'w_2-w_1w_2'}{w_2^2},\\[2mm] \dfrac{dw}{dz}=\dfrac{1}{\dfrac{dz}{dw}},\\[2mm] \dfrac{d}{dz}F(w)=\dfrac{dF}{dw}\cdot\dfrac{dw}{dz};\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{d}{dz}z^n=nz^{n-1},\\[2mm] \dfrac{d}{dz}e^z=e^z,\\[2mm] \dfrac{d}{dz}\sin z=\cos z,\\[2mm] \dfrac{d}{dz}\cos z=-\sin z,\\[2mm] \dfrac{d}{dz}\ln z=\dfrac{1}{z}.\end{cases}$$

必须指出，复变函数和实变函数的导数定义，虽然形式上一样，实质上却有很大的不同。这是因为实变数 Δx 只能沿着实轴逼近零，复变数 Δz 却可以沿复数平面上的任一曲线逼近零。因此，跟实变函数的可导相比，复变函数的可导是一种严格得多的要求。

现在让我们比较 Δz 沿实轴逼近零和沿虚轴逼近零两种情况。

先看 Δz 沿实轴逼近零的情况。这时 $\Delta y \equiv 0$ 而 $\Delta z = \Delta x \to 0$，于是

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)+iv(x+\Delta x,y)-u(x,y)-iv(x,y)}{\Delta x}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}+i\frac{v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x}\right\}\\
&=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (4.1)
\end{aligned}
$$

再看 Δz 沿虚轴逼近零的情况。这时 $\Delta x \equiv 0$ 而 $\Delta z = i\Delta y \to 0$，于是

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x,y+\Delta y)+iv(x,y+\Delta y)-u(x,y)-iv(x,y)}{i\Delta y}\\
&=\lim_{\Delta y\to 0}\left\{\frac{v(x,y+\Delta y)-v(x,y)}{\Delta y}-i\frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{\Delta y}\right\}\\
&=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}. \qquad (4.2)
\end{aligned}
$$

如果函数 $f(z)$ 在点 z 可导，(4.1)和(4.2)两个极限必须都存在而且彼此相等，即

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

这个等式两边的实部和虚部必须分别相等，即

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{\partial v}{\partial y},\\
\frac{\partial v}{\partial x}&=-\frac{\partial u}{\partial y}.
\end{aligned}
\right. \qquad (4.3)
$$

这两个方程叫作科希-里曼方程，是复变函数可导的必要条件。

例如处处连续函数 $w=\mathrm{Re}z=x$ 的实部和虚部分别是 $u(x,y)=x, v(x,y)=0$. 于是

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=0$$

在任一点都存在，但在任一点都不满足科希-里曼方程，所以处处连续函数 $w=\mathrm{Re}z$ 是处处不可导的。事实上，当 $\Delta z=\Delta x\to 0$ 时，$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\Delta x}{\Delta x}=1\to 1$，而当 $\Delta z=i\Delta y\to 0$ 时，$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{0}{i\Delta y}=0\to 0$. 两个极限并不相等。

科希-里曼方程只保证 Δz 沿实轴逼近零和沿虚轴逼近零时，$\Delta f/\Delta z$ 逼近同一极限，并不保证 Δz 沿任意曲线逼近零时，$\Delta f/\Delta z$ 总是逼近同一极限。因此，科希-里曼方程还不是复变函数可导的充分条件。

例如复变函数 $f(z)=\sqrt{\mathrm{Re}z\cdot\mathrm{Im}z}$ 的实部和虚部分别是 $u(x,y)=\sqrt{xy}$, $v(x,y)\equiv 0$. 在点 $z=0$,

$$\begin{cases}\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{z=0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{u(\Delta x,0)-u(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}0=0,\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{z=0}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{u(0,\Delta y)-u(0,0)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{0}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}0=0,\\ \left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{z=0}=0,\\ \left.\dfrac{\partial v}{\partial y}\right|_{z=0}=0,\end{cases}$$

显然满足科希-里曼方程。

那么，复变函数 $f(z)=\sqrt{\mathrm{Re}z\cdot\mathrm{Im}z}$ 在点 $z=0$ 是否可导呢？试令 Δz 的辐角 φ 保持一定而模 $\Delta\rho\to 0$，即 $\Delta z=e^{i\varphi}\Delta\rho\to 0$，则 $\Delta f/\Delta z$ 的极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(0+\Delta z)-f(0)}{\Delta z}=\lim_{\Delta\rho\to 0}\frac{\sqrt{(\Delta\rho)\cos\varphi(\Delta\rho)\sin\varphi}}{e^{i\varphi}\Delta\rho}=\frac{\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}}{e^{i\varphi}},$$

极限的值随 φ 的不同而不同，可见 $f(z)$ 在点 $z=0$ 不可导。

如果 Δz 沿实轴或虚轴逼近零，则 $\varphi=0$ 或 $\pi/2$. 在这两种情况下，$\Delta f/\Delta z$ 的极限相同（都是零），这是科希-里曼方程所保证的。尽管如此，函数还是不可导。

如果偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial y}$ 都是连续的，科希-里曼方程能够保证可导。

这是因为，既然这些偏导数连续，二元函数 u 和 v 的改变量

$$\Delta u\approx du=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y,\quad \Delta v\approx dv=\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y,$$

因而

$$\Delta f=\Delta u+i\Delta v\approx\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right)+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right).$$

根据科希-里曼方程，上式即

$$\Delta f\approx\frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x+i\Delta y)+i\frac{\partial v}{\partial x}(\Delta x+i\Delta y)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta z.$$

这样，不管 Δz 按什么方式逼近零，$\Delta f/\Delta z$ 总有同一个极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta z}{\Delta z}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

我们说过，复变函数的可导比实变函数的可导是严格得多的要求。其具体表现之一就是函数的实部和虚部通过科希-里曼方程而联系起来。

复变函数的导数可用(4.1)或(4.2)表示。

在极坐标系中，比较 Δz 沿径向逼近零（即 $\Delta z=e^{i\varphi}\Delta\rho\to 0$）和沿横向逼近零（即 $\Delta z=\rho\Delta(e^{i\varphi})=i\rho e^{i\varphi}\Delta\varphi\to 0$）两种情况下 $\Delta f/\Delta z$ 的极限，就得到极坐标系中的科希-里曼方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial\rho}=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial v}{\partial\varphi},\\[2mm]\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}=-\dfrac{\partial v}{\partial\rho}.\end{cases}\tag{4.4}$$

或者从直角坐标系中的科希-里曼方程(4.3)出发，按照变换公式(1.2)变换到极坐标系，也可得到极坐标系中的科希-里曼方程(4.4)。

习 题

试推导极坐标系中的科希-里曼方程(4.4)。

§5. 解析函数

在某区域上处处可导的复变函数叫作该区域上的解析函数。(但有时也把"某点和它的邻域上的解析函数"简称为"在该点的解析函数"。)

解析函数的实部和虚部通过科希-里曼方程互相联系,并不独立。因此,只要知道解析函数的实部(或虚部),就能求出相应的虚部(或实部)。具体求法参看下列例题。

例1 已知解析函数 $f(z)$ 的实部 $u(x,y)=x^2-y^2$,求虚部 $v(x,y)$ 和这个解析函数 $f(z)$.

解 先计算 $u(x,y)=x^2-y^2$ 的偏导数,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-2y.$$

按照科希-里曼方程(4.3),这是说,

$$\frac{\partial v}{\partial x}=2y, \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=2x.$$

于是

$$dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy=2ydx+2xdy=d(2xy).$$

因此,

$$v(x,y)=2xy+\text{积分常数 } C,$$

$$f(z)=(x^2-y^2)+i(2xy+C)=z^2+iC.$$

例2 已知解析函数 $f(z)$ 的虚部 $v(x,y)=\sqrt{-x+\sqrt{x^2+y^2}}$,求实部 $u(x,y)$ 和这个解析函数 $f(z)$.

解 偏导数 $\frac{\partial v}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial y}$ 的计算比较费事,试改用极坐标系,

$$v=\sqrt{-\rho\cos\varphi+\rho}=\sqrt{\rho(1-\cos\varphi)}=\sqrt{2\rho}\sin\frac{\varphi}{2}.$$

计算 v 的偏导数，

$$\frac{\partial v}{\partial \rho}=\sqrt{\frac{1}{2\rho}}\sin\frac{\varphi}{2},\qquad \frac{\partial v}{\partial \varphi}=\sqrt{\frac{\rho}{2}}\cos\frac{\varphi}{2}.$$

按照科希-里曼方程(4.4)，这是说，

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}=\sqrt{\frac{1}{2\rho}}\cos\frac{\varphi}{2},\qquad \frac{\partial u}{\partial \varphi}=-\sqrt{\frac{\rho}{2}}\sin\frac{\varphi}{2}.$$

于是

$$du=\frac{\partial u}{\partial \rho}d\rho+\frac{\partial u}{\partial \varphi}d\varphi=\sqrt{\frac{1}{2\rho}}\cos\frac{\varphi}{2}d\rho-\sqrt{\frac{\rho}{2}}\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi$$

$$=\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}d\sqrt{\rho}+\sqrt{2\rho}\,d\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)=d\left(\sqrt{2\rho}\cos\frac{\varphi}{2}\right).$$

因此，

$$u=\sqrt{2\rho}\cos\frac{\varphi}{2}+C=\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}+C,$$

$$f(z)=\sqrt{2\rho}\cos\frac{\varphi}{2}+C+i\sqrt{2\rho}\sin\frac{\varphi}{2}$$

$$=\sqrt{2\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)+C=\sqrt{2z}+C.$$

复变函数论着重研究的就是解析函数。解析函数跟物理学中的“平面标量场”有很紧密的联系，这是因为解析函数的实部 $u(x,y)$和 $v(x,y)$具有下列性质(5.1)——(5.3)。

把科希-里曼方程(4.3)的两边分别相乘，得

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y},$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}=0. \tag{5.1}$$

这是说，梯度 ∇u（其直角坐标分量为 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial y}$）跟梯度 ∇v（其直角坐标分量为 $\frac{\partial v}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial y}$）正交。我们知道，$\nabla u$ 和 ∇v 分别是曲线"$u=$常数"和"$v=$常数"的法向矢量，因而(5.1)表明"$u=$常数"和"$v=$常数"是互相正交的两曲线族。

§9 将证明，某个区域上的解析函数在该区域上必有任意阶的导数。这样，二阶偏导数 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ 当然都存在。现在拿科希-里曼方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

的前一式对 x 求导，后一式对 y 求导，然后相加，这就消去了 v 而得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \tag{5.2}$$

同理消去 u 可得

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0. \tag{5.3}$$

这是说，$u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 都满足二维的拉普拉斯方程，换句话说，它们都是调和函数。由于它们是同一个复变函数的实部和虚部，所以又特别叫作共轭调和函数。

习　题

1. 某个区域上的解析函数如为实函数，试证它必为常数。

2. 已知解析函数 $f(z)$ 的实部 $u(x, y)$ 或虚部 $v(x, y)$，求该解析函数。

(1) $u=e^x \sin y$,　　　(2) $u=e^x(x\cos y-y\sin y), f(0)=0$,

(3) $u=\dfrac{2\sin 2x}{e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2x}, \ f(0)=0$,

(4) $v=\frac{y}{x^2+y^2}$, $f(2)=0$,

(5) $u=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$, $f(\infty)=0$,

(6) $u=x^2-y^2+xy$, $f(0)=0$,

(7) $u=x^3-3xy^2$, $f(0)=0$,

(8) $u=x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3$, $f(0)=0$,

(9) $u=x^4-6x^2y^2+y^4$, $f(0)=0$,

(10) $u=\ln\rho$, $f(1)=0$,

(11) $u=\varphi$, $f(1)=0$.

3. 试从极坐标系中的科希-里曼方程(4.4)消去 u 或 v。

本题答案就是拉普拉斯方程(5.2)在极坐标系中的表示式。

§6. 平面标量场

先说静电场。既然真实的空间是三维的，静电场当然总是三维的。不过，如果静电场只在 xy 平面上变化，而在垂直于 xy 平面的 z 方向上并不变化，我们只要在 xy 平面上研究它就够了。这样的静电场叫作**平面静电场**。所谓平面静电场其实是一种特殊的三维静电场的横剖面，在垂直于剖面的方向上静电场没有变化。因此，对于平面场，凡是讲到"曲线"，其实指的是跟剖面相垂直的柱面，该曲线正是它的截口；凡是讲到"点"，其实指的是通过该点而垂直于剖面的直线。

研究静电场时，通常研究其电势（电位）分布，因为电势是标量，研究起来比较方便，而且一旦知道了电势分布，其它问题如电力线、电荷密度等都可迎刃而解。至于电势的分布，在没有电荷的区域上，应满足拉普拉斯方程。

平面静电场的情况也是这样。通常是研究其电势分布，而这在没有电荷的区域上应满足二维的拉普拉斯方程。照此看来，某个区域上的任一解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 的实部或虚部

总可以表示该区域上某种平面静电场的电势。我们把这解析函数叫作该平面静电场的**复势**，因为它的实部或虚部就是电势。

为叙述的确定起见，不妨说 $u(x,y)$ 是电势，曲线族“$u(x,y)=$常数”是等势线族。从(5.1)知道，曲线族“$v(x,y)=$常数”垂直于等势线族“$u(x,y)=$常数”，因而“$v(x,y)=$常数”正是电力线族。不仅如此，v 的值本身就具有物理意义。取定两点 $A(x_1,y_1)$ 和 $B(x_2,y_2)$，任作一曲线联接 A 和 B(图 4)。试计算穿过曲线 AB 的电通量（这其实指的是通过一块柱面的电通量，这块柱面跟我们所研究的平面相交于曲线 AB，柱面的母线垂直于所研究的平面，柱高为 1)

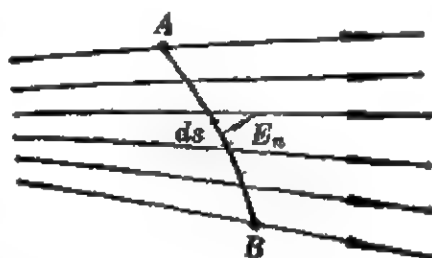


图 4

$$N=\int_A^B E_n ds.$$

曲线 AB 的切线的方向余弦是 $\frac{dx}{ds}$ 和 $\frac{dy}{ds}$，所以法线 n 的方向余弦是

$n_x=-\frac{dy}{ds}$ 和 $n_y=\frac{dx}{ds}$. 这样，

$$E_n=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial y}{ds}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial x}{ds}.$$

于是

$$N=\int_A^B\frac{\partial u}{\partial x}dy-\frac{\partial u}{\partial y}dx=\int_A^B\frac{\partial v}{\partial y}dy+\frac{\partial v}{\partial x}dx$$

$$=\int_A^B dv=v(x_2,y_2)-v(x_1,y_1).$$

这是说，$v(x,y)$ 在 A 和 B 两点所取的值之差就是 A 和 B 两点之间穿过的电通量。函数 $v(x,y)$ 叫作**通量函数**。由此可见，只要给出复势，就不仅给出了电势分布，而且还直接给出电力线族的方程、

电通量密度并从而给出电荷密度。

同理，在液体的无旋流动中，有所谓平面无旋液流。由于没有涡旋，速度矢量可以表为某个标量的梯度，这个标量叫作速度势。借助于速度势就把平面无旋液流问题表为平面标量场问题。在没有源和汇的区域上，速度势满足拉普拉斯方程（参看流体力学书籍或本书 § 31）。因此，某个区域上的解析函数

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

的实部或虚部总可以表示该区域上某种平面无旋液流的速度势。解析函数 $f(z)$ 就叫作该平面无旋液流的复势。为确定起见，设 $v(x,y)$ 是速度势，则曲线族“$u(x,y)=$常数”就是流线族，$u(x,y)$ 是流量函数，它在 A 和 B 两点所取的值之差就是 A 和 B 两点之间穿过的流量。

同理，在物体的稳定温度分布中，有所谓平面温度场。均匀物体中的稳定温度分布满足拉普拉斯方程（参看本书 § 31）。因此，某个区域上的解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 的实部或虚部总可以表示该区域上某种平面温度场的温度分布。为确定起见，设 $u(x,y)$ 是温度分布，则曲线族“$v(x,y)=$常数”就是热流线族，$v(x,y)$ 是热流量函数，它在 A 和 B 两点所取的值之差则正比于 A 和 B 两点之间穿过的热流量。

通常借用平面温度场的词汇把曲线族“$u(x,y)=$常数”和“$v(x,y)=$常数”叫作等温网。

例1 开平面上的解析函数

$$f(z)=z^2=(x^2-y^2)+i2xy$$

的实部和虚部分别是

$$\begin{cases}u(x,y)=x^2-y^2,\\v(x,y)=2xy.\end{cases}$$

图 5 用虚线描画曲线族“$u(x,y)=$常数”，用实线描画曲线族

"$v(x,y)=$常数",后者包括实轴和虚轴在内。

作为平面静电场看，这是两块互相垂直的很大的带电导体平面(实轴和虚轴是它们的截口)的静电场，实线是等势线，虚线是电力线。

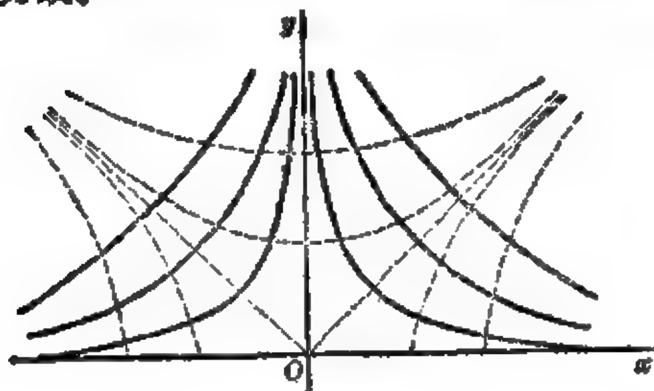


图 5

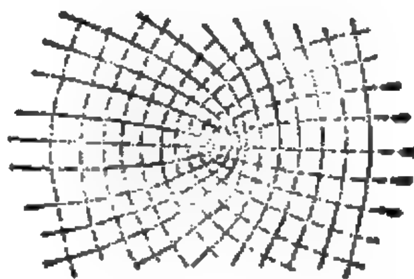


图 6

作为平面无旋液流看，这是液体从虚轴的$+\infty$方向流来，被x轴阻拦而分向两方流去的情形，实线是流线，虚线是等速度势线。

例2 已知平面静电场的电力线为抛物线族

$$y^2=c^2+2cx\quad(\text{参数 } c>0)$$

(见图6中的虚线)，求等势线。

解 从电力线方程解出参数c，

$$c=-x\pm\sqrt{x^2+y^2}.$$

题已注明$c>0$，所以根号前应取$+$号，即

$$-x+\sqrt{x^2+y^2}=c.$$

我们知道，电力线的方程应该是"$v(x,y)=$常数"，拿这跟上式比较，似乎可以得到

$$v(x,y)=-x+\sqrt{x^2+y^2}.$$

但这是完全错误的！道理很简单，$v(x,y)$必须是调和函数(即满足拉普拉斯方程)，而$-x+\sqrt{x^2+y^2}$并不是调和函数。这里只能说

$$v=F(t)\qquad(t=-x+\sqrt{x^2+y^2}),$$

其中F是某个尚待确定的函数关系，这是因为把上式代入"$v=$常数"同样可得电力线方程$-x+\sqrt{x^2+y^2}=c$。

现在根据$v(x,y)$是调和函数这个条件来确定函数$F(t)$。

$$\frac{\partial v}{\partial x}=F'(t)\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-1\right],$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=F''(t)\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-1\right]^2+F'(t)\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right]$$

$$=F''(t)\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-1\right]^2+F'(t)\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

同理，

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=F''(t)\left[\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]^2+F'(t)\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}},$$

代入拉普拉斯方程得

$$2\left[1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]F''(t)+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}F'(t)=0,$$

即
$$2[\sqrt{x^2+y^2}-x]F''(t)+F'(t)=0,$$

亦即
$$\frac{F''(t)}{F'(t)}=-\frac{1}{2t}.$$

积分一次，

$$F'(t)=\frac{C}{\sqrt{t}},$$

再积分一次，

$$F(t)=C_1\sqrt{t}+C_2.$$

于是求得

$$v=F(t)=C_1\sqrt{t}+C_2=C_1\sqrt{-x+\sqrt{x^2+y^2}}+C_2.$$

引用§5例2的结果就求出

$$u=C_1\sqrt{2\rho}\cos\frac{\varphi}{2}+C_2.$$

从而等势线方程为

$$C_1\sqrt{2\rho}\cos\frac{\varphi}{2}+C_3=\text{常数}。$$

变换到直角坐标，得

$$y^2=c^2-2cx \quad (c>0).$$

这也是抛物线族，如图6的实线所描画。这是一块很大的带电金属平板(负实轴是它的截口)的静电场。

读者可以注意到，本节只是任取某个解析函数，然后阐明它描写什么样的平面场，最多也不过从等温网的两族曲线中的一族出发阐明所描写的是什么样的平面场，因此具有很大的局限性。实际上更重要的问题是针对具体的平面场找出适当的复势，关于这个问题参看本书第十七章保角变换法。

习　题

1. 已知复势 $f(z)=1/(z-2+i)$，试描画等温网。
2. 已知流线族的方程为"$y/x=$常数"，求复势。
3. 已知等势线族的方程为"$x^2+y^2=$常数"，求复势。
4. 已知电力线为跟实轴相切于原点的圆族，求复势。
5. 在圆柱 $|z|=R$ 的外部的平面静电场的复势为 $f(z)=i2\sigma\ln(R/z)$，求柱面上的电荷面密度。
6. 有两个平行而均匀带电的线电荷，每单位长度所带电量分别是 $+q$ 和 $-q$，两线相距 $2a$. 求这个平面静电场的复势、电力线和等势线。

第二章 复变函数的积分

§7. 复变函数的积分

设在复数平面的某根逐段光滑的曲线[①] l 上定义了连续函数 $f(z)$. 在 l 上取一系列分点 z_0(即起点), $z_1, z_2, \cdots, z_n$(即终点), 把 l 分为 n 个小段。在每一小段 $z_{k-1}z_k$ 上任取一点 ζ_k 而作出和

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}).$$

于 $n\to\infty$ 而且每一小段无限缩短之时,这个和的极限叫作 $f(z)$ 沿着 l 的路积分, 记作 $\int_l f(z)dz$,

$$\int_l f(z)dz = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}). \tag{7.1}$$

把 z_k 和 $f(z)$ 都用实部和虚部表出,

$$z_k = x_k + iy_k,\quad f(z) = u(x,y) + iv(x,y),$$

则
$$\int_l f(z)dz = \int_l u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_l v(x,y)dx + u(x,y)dy. \tag{7.2}$$

这样,复变函数的路积分可以归结为两个实变函数线积分,它们分别是路积分的实部和虚部。因而实变函数线积分的许多性质也对路积分成立,例如

1. 常数因子可以移到积分号之外,
2. 函数的和的积分等于各个函数的积分之和,
3. 反转积分路径,积分变号,

① 这是说,如把曲线方程记作 $y=y(x)$,则函数 y 具有逐段连续导数。

4. 全路径上的积分等于各段上积分之和。

从二维矢量场的角度来看，复变函数的路积分具有鲜明的物理意义。试把 $u(x,y)$ 和 $-v(x,y)$ 当作矢量函数 $A(x,y)$ 的 x 分量 A_x 和 y 分量 A_y，即

$$u(x,y)=A_x(x,y), \quad -v(x,y)=A_y(x,y).$$

于是，复变函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=A_x-iA_y$ 的路积分

$$\begin{aligned}\int_l f(z)dz&=\int_l udx-vdy+i\int_l vdx+udy\\&=\int_l A_xdx+A_ydy+i\int_l -A_ydx+A_xdy\\&=\int_l A_tds+i\int_l A_nds,\end{aligned}$$

式中 A_t 和 A_n 分别是矢量 A 沿积分路径切向和法向的分量，ds 是线积分的曲线元。这是说，路积分的实部是二维矢量场的"功函数"，而虚部是跟路径 l 相交的通量，即路径 l 所切割的"力线"数。

§8. 科希定理

实变函数线积分 $\int_l udx-vdy$ 只取决于起点和终点而跟路径无关的条件，或者换个说法，它沿闭合路径的积分为零的条件是偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial y}$ 连续，而且在闭合路径所围闭区域上

$$\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial(-v)}{\partial x}=0, \tag{8.1}$$

实变函数线积分 $\int_l vdx+udy$ 跟路径无关亦即沿闭合路径积分为零的条件是 $\frac{\partial v}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 连续，而且在闭合路径所围闭区域上

$$\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}=0. \tag{8.2}$$

按照(7.2)，以上这些条件也就是复变函数路积分 $\int_l f(z)\,dz$ 跟

路径无关的条件，亦即回路积分 $\oint_l f(z)dz=0$ 的条件。

条件(8.1)和(8.2)不是别的，正是科希-里曼方程。由此得到**科希定理**：回路 l 所围闭区域上的解析函数 $f(z)$ 沿 l 的回路积分

$$\oint_l f(z)dz=0. \tag{8.3}$$

从二维矢量场的角度来看，科希定理是很容易理解的。条件(8.1)就是旋度 $\nabla\times\boldsymbol{A}=0$，因而"功函数" $\oint_l A_l ds$ 为零。条件(8.2)就是散度 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$，因而从 l 所围区域发出的通量即"力线"数 $\oint_l A_n ds=0$。既然实部和虚部都是零，回路积分 $\oint_l f(z)dz$ 当然就是零。

如果复变函数 $f(z)$ 在某点不可导，这点就叫作 $f(z)$ 的**奇点**。如果 $f(z)$ 在某个奇点的有限小邻域上(不包括该奇点)是解析的，这样的奇点就叫作**孤立奇点**。例如点 α 是函数 $1/(z-\alpha)$ 的孤立奇点。

试考察这样一个情况，复变函数 $f(z)$ 在回路 l 所围闭区域上为解析的，但要除去某个孤立奇点。在这情况下，科希定理(8.3)未必成立。设想把这个奇点和它的小邻域一起挖掉，这就形成某种带"孔"的区域(图7)，所谓**复通区域**(与此相对照，不带"孔"的区域则叫作**单通区域**)。更作割线 AB 连接外境界线 l 和内境界线 l_1，这割线把复通区域变为单通区域，而在这单通区域上，$f(z)$ 是解析的，可以引用科希定理(8.3)，

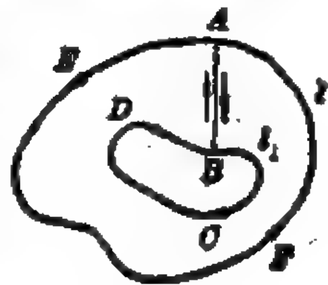


图 7

$$\oint_{ABCDBAEFA} f(z)dz=0,$$

即 $$\int_{AB} f(z)dz+\oint_{l_1} f(z)dz+\int_{BA} f(z)dz+\oint_l f(z)dz=0,$$

在内外境界线 l_1 和 l 上的积分方向已分别用箭头标明。由于沿 AB 的积分跟沿 BA 的积分相消，科希定理成为

$$\oint_{l_1} f(z)dz + \oint_{l} f(z)dz = 0. \tag{8.4}$$

通常这样规定境界线的正方向，当人沿着这方向前进时，区域保持在人的左边。例如 (8.4) 的内外境界线上的积分都是沿着正方向进行的。我们约定，凡沿正方向进行的回路积分今后不再用箭头标明方向。这样，科希定理(8.4)就写成

$$\oint_{l} f(z)dz + \oint_{l_1} f(z)dz = 0, \tag{8.5}$$

沿内外境界线正方向积分和为零。其实，(8.5) 也可以看作就是 (8.3)，只是要把(8.3)的 l 理解为包括所有的境界线。

把科希定理(8.4)左边第一个积分移到等号右边，得

$$\oint_{l} f(z)dz = -\oint_{l_1} f(z)dz,$$

即

$$\oint_{l} f(z)dz = \oint_{l_1} f(z)dz, \tag{8.6}$$

沿内、外境界线逆时针方向积分相等。

很容易从单个孤立奇点推广到有限个孤立奇点。把每个奇点和它的小邻域一一挖掉，就不止一条内境界线而是有多条内境界线。(8.5)和(8.6)仍然成立，只要把 l_1 理解为所有的内境界线。

总结起来，科希定理说的是

1. 闭单通区域上的解析函数沿境界线积分为零，

2. 闭复通区域上的解析函数沿所有内外境界线正方向积分和为零，

3. 闭复通区域上的解析函数沿外境界线逆时针方向积分

等于沿所有内境界线逆时针方向积分之和。

从科希定理又知道，对于某个闭单通或闭复通区域上为解析的函数，只要起点和终点固定不变，当积分路径连续变形（就是说不跳过"孔"）时，函数的路积分的值不变。

现在计算一个重要例题，即回路积分

$$\oint_l \frac{1}{z-\alpha}dz. \tag{8.7}$$

如果回路 l 没有包围点 α，则被积函数 $1/(z-\alpha)$ 在 l 所围区域上是解析的，按照科希定理，回路积分(8.7)为零。这里需要讨论的是回路 l 包围点 α 的情况。

在 l 所围区域内部，以点 α 为圆心作一个任意半径 R 的圆周 C（图 8）。按照科希定理，

$$\oint_l \frac{dz}{z-\alpha} = \oint_C \frac{dz}{z-\alpha} = \oint \frac{d(\alpha+Re^{i\varphi})}{Re^{i\varphi}}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{i\varphi}d\varphi}{Re^{i\varphi}} = i\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i.$$

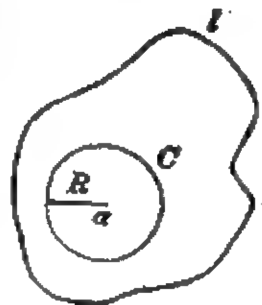


图 8

这样，

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{dz}{z-\alpha} = \begin{cases} 0 & (l\text{ 不包围 }\alpha), \\ 1 & (l\text{ 包围 }\alpha). \end{cases} \tag{8.8}$$

同样还可以证明

$$\oint_l (z-\alpha)^n dz = 0 \quad (\text{整数 } n \neq -1). \tag{8.9}$$

(8.8)和(8.9)很有用，从它们可以引出一系列重要结果，例如下节的科希公式以及 § 16 的留数定理。

从二维矢量场的角度来看，(8.8)具有鲜明的物理意义。考虑二维静电场，在点 $\alpha=a+ib$ 有电量为 $2\pi\varepsilon_0$ 的点电荷(二维静电场的点电荷其实是一种

三维静电场中的线电荷)，则电场强度 E 的分量是 $E_x=\frac{x-a}{(x-a)^2+(y-b)^2}$ 和

$E_y=\frac{y-b}{(x-a)^2+(y-b)^2}$. 而复变函数

$$\frac{1}{z-\alpha}=\frac{x-a}{(x-a)^2+(y-b)^2}-i\frac{y-b}{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

正好跟这个电场强度对应。既然电场强度是无旋的，$\oint_l E_t ds=0$. 如果 l 不包围 α，则电通量 $\oint_l E_n ds$ 应为零；如果 l 包围 α，则电通量应为 2π. 因此，回路积分

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_l\frac{dz}{z-\alpha}=\frac{1}{2\pi i}\left\{\oint_l E_t ds+i\oint_l E_n ds\right\}$$
$$=\begin{cases}1(l\text{ 包围 }\alpha),\\0(l\text{ 不包围}\alpha).\end{cases}$$

§9. 科希公式

设函数 $f(z)$ 在以 l 为境界线的闭区域上为解析，点 α 为区域的一个内点。由(8.8)显然有

$$f(\alpha)=\frac{f(\alpha)}{2\pi i}\oint_l\frac{1}{z-\alpha}dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_l\frac{f(\alpha)}{z-\alpha}dz. \qquad (9.1)$$

我们将证明(9.1)积分号下的 $f(\alpha)$ 可以换作 $f(z)$. 为此，只需证明

$$\oint_l\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}dz=0. \qquad (9.2)$$

仿照图 8，以点 α 为圆心作一个半径 ε 很小的圆周 C_ε，把 C_ε 所围区域挖去。在以 C_ε 和 l 为内外境界线的闭复通区域上，复变函数 $[f(z)-f(\alpha)]/(z-\alpha)$ 是解析的。按照科希定理，

$$\oint_l\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}dz=\oint_{C_\varepsilon}\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}dz.$$

左边的积分跟 ε 的大小无关，所以右边的积分实际上也不依赖于 ε 的大小。试对右边的积分值作一估计：

$$\left|\oint_{C_\varepsilon}\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}dz\right|<\frac{\max|f(z)-f(\alpha)|}{\varepsilon}2\pi\varepsilon,$$

这里 $\max|f(z)-f(\alpha)|$ 指 $|f(z)-f(\alpha)|$ 在 C_ε 上的最大值。令 $\varepsilon\to0$，即 $C_\varepsilon\to$ 点 α. 由于 $f(z)$ 的连续性，$f(z)\to f(\alpha)$，而

$$\max|f(z)-f(\alpha)|\to0.$$

于是

$$\lim_{\varepsilon\to0}\left|\oint_{C_\varepsilon}\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}dz\right|=\lim_{\varepsilon\to0}2\pi\max|f(z)-f(\alpha)|=0.$$

前已指出，这个积分本来并不依赖于 ε 的大小，可见它根本就是零。这样，我们就证明了(9.2)，可以把(9.1)积分号下的 $f(\alpha)$ 换作 $f(z)$，

$$f(\alpha)=\frac{1}{2\pi i}\oint_l\frac{f(z)}{z-\alpha}dz. \tag{9.3}$$

这叫作科希公式。只要知道解析函数 $f(z)$ 沿境界线 l 怎样变化，科希公式就把该解析函数在任一内点 α 的值 $f(\alpha)$ 用境界线 l 上的回路积分表出。这不奇怪，因为解析函数在各点的值并不是孤立的，而是通过科希-里曼方程互相联系着的。从物理上说，解析函数紧密联系于平面标量场，而平面场的边界条件决定着区域内部的场。

因为 α 是任意取定的，所以通常把 α 改记作 z，积分变数则改用 ζ 表示以免混淆。于是，科希公式(9.3)改写为

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_l\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta. \tag{9.4}$$

上式的 z 为区域的内点，积分变数 ζ 则在区域的境界线上，所以 $\zeta-z$ 不会等于零，从而被积函数是处处连续的。因此，可在积

分号下求导，得到一阶导数

$$f'(z)=\frac{1!}{2\pi i}\oint_l \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta.$$

照此类推，n阶导数是

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_l \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta. \tag{9.5}$$

(9.5)也叫作科希公式。它表明，解析函数的任意阶导数都存在。换句话说，在某个闭区域上，复变函数只要处处都有一阶导数，也就处处都有任意阶的导数。由此可见，复变函数的可导是个很严格的要求，这是在§4介绍导数定义时就已指出的。

科希公式还可以推广到无界区域的情况。设$f(z)$在回路l以外的无界区域上为解析，再加上条件$\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=0$，就有科希公式

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta. \tag{9.6}$$

(9.6) 的积分是沿着回路 l 顺时针进行的。对于 l 以外的无界区域来说，这个方向是正方向。

以下是科希公式的两个推论。

模数原理 设$f(z)$在某个闭区域上为解析，则$|f(z)|$只能在境界线l上取极大值。

证 对函数$[f(z)]^n$应用科希公式，得

$$[f(z)]^n=\frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{[f(\zeta)]^n}{\zeta-z}d\zeta. \tag{9.7}$$

如$|f(\zeta)|$在l上的极大值为M，$|\zeta-z|$的极小值为δ，l的长为s，则从(9.7)可估计出

$$|f(z)|^n\leqslant\frac{1}{2\pi}\frac{M^n}{\delta}s,$$

即
$$|f(z)|\leqslant M\left(\frac{s}{2\pi\delta}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

令$n\to\infty$，即得

$$|f(z)|\leqslant M. \tag{9.8}$$

这就证明了模数原理。(9.8)式只有当$f(z)$为常数时才适用等号。

刘维定理 如$f(z)$在全平面上为解析，并且是有界的即$|f(z)|\leqslant N$，则$f(z)$必为常数。

证 对$f'(z)$应用科希公式，得

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_l\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta. \tag{9.9}$$

以z为圆心作半径为R的圆周，拿这圆周作为l，可从(9.9)估计出

$$|f'(z)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\frac{N}{R^2}2\pi R=\frac{N}{R}. \tag{9.10}$$

R是任意选定的，不妨令$R\to\infty$，于是从(9.10)得知

$$f'(z)\equiv 0,$$

亦即$f(z)$等于常数。

习 题

1. 已知函数$\Psi(t,x)=e^{2tx-t^2}$。把x当作参数，把t认为是复变数，试应用科希公式把$\left.\frac{\partial^n\Psi}{\partial t^n}\right|_{t=0}$表为回路积分。

对回路积分进行积分变数的代换$t=x-z$，并借以证明

$$\left.\frac{\partial^n\Psi}{\partial t^n}\right|_{t=0}=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}.$$

(本题的$\Psi(t,x)$是厄密多项式的母函数，见附录十七。)

2. 已知函数$\Psi(t,x)=e^{-xt/(1-t)}/(1-t)$。把$x$当作参数，把$t$认为是复变数，试应用科希公式把$\left.\frac{\partial^n\Psi}{\partial t^n}\right|_{t=0}$表为回路积分。

对回路积分进行积分变数的代换$t=(z-x)/z$，并借以证明

$$\left.\frac{\partial^n\Psi}{\partial t^n}\right|_{t=0}=e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x}).$$

(本题的$\Psi(t,x)$是拉盖尔多项式的母函数，见附录十八。)

第三章　幂级数展开

读者已经熟悉实变函数展开为幂级数，那是很有用的。例如，截取幂级数的前面有限项可作为函数的近似表达式（项数取决于要达到的近似程度）。又如，常微分方程往往可用级数形式解出。本章研究复变函数的幂级数展开。

§10. 复数项级数

设有复数项的无穷级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} w_k = w_1 + w_2 + \cdots + w_k + \cdots, \qquad (10.1)$$

它的每一项都可分为实部和虚部，

$$w_k = u_k + i v_k.$$

那么，(10.1)的前 n 项的和 $\sum_{k=1}^{n} w_k = \sum_{k=1}^{n} u_k + i \sum_{k=1}^{n} v_k$，从而

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} w_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k + i \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} v_k.$$

这样，复数项无穷级数(10.1)的收敛性问题就归结为两个实数项级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \quad 与 \quad \sum_{k=1}^{\infty} v_k \qquad (10.2)$$

的收敛性问题。于是，实数项级数的许多性质和规律常可移用于复数项级数，现在列举一些如下。

科希收敛判据成立。这是说，复数项级数(10.1)收敛的充分必要条件是，对于任一给定的小正数 ε，必有 N 存在，使得 $n>N$

时，

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} w_k\right|<\varepsilon,$$

式中 p 为任意正整数。

如果复数项级数(10.1)各项的模(这是正的实数)组成的级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|w_k\right|=\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{u_k^2+v_k^2} \tag{10.3}$$

收敛，就把复数项级数(10.1)叫作绝对收敛。绝对收敛的复数项级数必是收敛的。绝对收敛级数各项先后次序可以改变，其和并不因此改变。

设有两个绝对收敛的复数项级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k \quad 与 \quad \sum_{k=1}^{\infty} q_k, \tag{10.4}$$

把它们逐项相乘，得

$$p_1q_1+(p_1q_2+p_2q_1)+(p_1q_3+p_2q_2+p_3q_1)+\cdots\cdots. \tag{10.5}$$

(10.5)也是绝对收敛的，而且它的和就等于(10.4)那两个级数的和之积。

特别讨论复变项级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} w_k(z)=w_1(z)+w_2(z)+\cdots+w_k(z)+\cdots, \tag{10.6}$$

它的各项是 z 的函数。如果在某个区域 B(或某根曲线 l)上所有的点，级数(10.6)都收敛，就叫作在 B(或 l)上收敛。应用科希判据，复变项级数(10.6)在 B(或 l)上收敛的充分必要条件是，在 B(或 l)上各点 z，对于任一给定的小正数 ε，必有 $N(z)$ 存在，使得 $n>N(z)$时，

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} w_k(z)\right|<\varepsilon,$$

式中 p 为任意正整数。如果N跟 z 无关，就把复变项级数叫作在B(或 l)上一致收敛。

在 B 上一致收敛的复变项级数的每一项都是 B 上的连续函数，则级数的和也是 B 上的连续函数。

在 l 上一致收敛的复变项级数的每一项都是 l 上的连续函数，则级数的和也是 l 上的连续函数，而且级数可以沿 l 逐项积分。

如果对于某个区域 B（或曲线 l）上所有各点 z，复变项级数(10.6)的各项的模 $|w_k(z)|\leqslant m_k$，而正的常数项级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} m_k$$

收敛，则复变项级数在 B(或 l)上绝对且一致收敛。

§11. 幂级数

本节专门研究这样的复变项级数，它的各项都是幂函数，

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots, \qquad (11.1)$$

其中 $z_0, a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots$ 都是复常数。这样的级数叫作以 z_0 为中心的幂级数。

试考察由(11.1)各项的模所组成的正项级数

$$|a_0| + |a_1||z-z_0| + |a_2||z-z_0|^2 + \cdots + |a_k||z-z_0|^k + \cdots. \qquad (11.2)$$

应用正项级数的比值判别法(达朗伯判别法)可知，如果

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}||z-z_0|^{k+1}}{|a_k||z-z_0|^k} = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| |z-z_0| < 1,$$

则(11.2)收敛，即(11.1)绝对收敛。引入记号 R，

$$R=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|, \qquad (11.3)$$

就可以说，

$$\text{如果}|z-z_0|<R,\text{则(11.1)绝对收敛。} \qquad (11.4)$$

另一方面，如果$|z-z_0|>R$，则后项与前项的模之比的极限

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}||z-z_0|^{k+1}}{|a_k||z-z_0|^k}>\lim_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}R=1.$$

这是说，级数(11.1)的相当后面的项的模越来越大，因而必然是发散级数，即

$$\text{如果}|z-z_0|>R,\text{则(11.1)发散。} \qquad (11.5)$$

以z_0为圆心作一个半径为R的圆周C_R. 从(11.4)和(11.5)知道，幂级数(11.1)在圆的内部绝对收敛，在圆外发散。这个圆因而叫作幂级数的**收敛圆**，它的半径则叫作**收敛半径**，收敛半径由(11.3)式给出。至于在收敛圆周上各点，幂级数或收敛或发散，需要分别具体分析。

对于正项级数(11.2)，除了比值判别法以外，还可以应用根值判别法

如 $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|\;|z-z_0|^k}<1$，则(11.2)收敛，(11.1)绝对收敛；

如 $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|\;|z-z_0|^k}>1$，则(11.1)各项的模$>1$因而发散。

这样，我们得到收敛半径R的另一公式

$$R=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}. \qquad (11.6)$$

所谓"圆的内部"指的是比这个圆稍稍缩小一些的闭区域。因此，以z_0为圆心作一个半径R_1稍稍小于R的圆周C_{R_1}. 在C_{R_1}所围的闭圆域上，幂级数(11.1)的各项的模$|a_k(z-z_0)^k|\leqslant|a_k|R_1^k$. 对正的常数项级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|R_1^k$$

应用比值判别法，

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}|R_1^{k+1}}{|a_k|R_1^k}=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|R_1=\frac{1}{R}R_1<1.$$

这个正的常数项级数收敛。按照上节最后一段，这是说，幂级数(11.1)在收敛圆的内部不仅绝对而且一致收敛。

例 1 求幂级数 $1+t+t^2+\cdots+t^k+\cdots$ 的收敛圆，t 为复变数。

解 本例所有系数 $a_k=1$. 应用(11.3)求收敛半径

$$R=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{1}\right|=1.$$

因此，收敛圆以 $t=0$ 为圆心而半径为 1，收敛圆的内部可以表为 $|t|<1$.

其实，本例是几何级数，公比为 t，所以前 n 项的和

$$\sum_{k=0}^{n}t^k=1+t+t^2+\cdots+t^n=\frac{1-t^{n+1}}{1-t}.$$

如 $|t|<1$，则

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}t^k=\lim_{n\to\infty}\frac{1-t^{n+1}}{1-t}=\frac{1}{1-t}.$$

这是说，在收敛圆内，幂级数的和为 $1/(1-t)$，

$$1+t+t^2+\cdots+t^k+\cdots=\frac{1}{1-t}\ (|t|<1). \qquad (11.7)$$

例 2 求幂级数 $1-z^2+z^4-z^6+\cdots$ 的收敛圆，z 为复变数。

解 把 z^2 记作 t，本例的级数即 $1-t+t^2-t^3+\cdots$. 系数交替为 $+1$ 和 -1，应用(11.3)求 t 平面上的收敛半径

$$R=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|=1.$$

这样，z 平面上的收敛半径为 $\sqrt{R}$ 亦即 1. 收敛圆的内部可表为 $|z|<1$.

其实，本例也是几何级数，公比为 $-z^2$. 在 $|z|<1$ 的条件下，容易求出这个几何级数的和为 $1/(1+z^2)$,

$$1-z^2+z^4-z^6+\cdots=\frac{1}{1+z^2}\ (|z|<1). \qquad (11.8)$$

幂级数(11.1)在收敛圆的内部绝对且一致收敛。这是说，它在一个稍稍缩小的圆周 C_{R_1} 上一致收敛。因此，它可以沿 C_{R_1} 逐项积分。为了应用科希公式(9.4)，把(11.1)的 z 改记作 ζ, 并把级数的和记作 w,

$$w(\zeta)=a_0+a_1(\zeta-z_0)+a_2(\zeta-z_0)^2+\cdots. \qquad (11.9)$$

取任一内点 z, 用有界函数 $\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\zeta-z}$ 遍乘(11.9),

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{w(\zeta)}{\zeta-z}$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\frac{a_0}{\zeta-z}+\frac{1}{2\pi i}\frac{a_1(\zeta-z_0)}{\zeta-z}+\frac{1}{2\pi i}\frac{a_2(\zeta-z_0)^2}{\zeta-z}+\cdots.$$

这级数仍然在 C_{R_1} 上一致收敛，可以沿 C_{R_1} 逐项积分，

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_1}}\frac{w(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_1}}\frac{a_0}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_1}}\frac{a_1(\zeta-z_0)}{\zeta-z}d\zeta$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_1}}\frac{a_2(\zeta-z_0)^2}{\zeta-z}+\cdots.$$

幂函数在开平面上是解析的，上式右边各项可以分别应用科希公式(9.4)，得

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_1}}\frac{w(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots.$$

这是说，幂级数(11.1)的和可以表为连续函数的回路积分，而连续函数的回路积分可在积分号下求导任意多次，亦即是解析函数。这样，幂级数的和在收敛圆的内部是解析函数，在收敛圆内不可能出现奇点。

(11.8)给出幂级数 $1-z^2+z^4-z^6+\cdots\cdots$ 的和是 $1/(1+z^2)$，这个和具有孤立奇点 $z=\pm i$，而 $\pm i$ 正好在收敛圆周 $|z|=1$ 上。这可以帮助我们理解收敛半径为 1 的道理。

如果限制在实数领域里，(11.8)就成为

$$1-x^2+x^4-x^6+\cdots=\frac{1}{1+x^2}\qquad(|x|<1);$$

$|x|=1$ 即 $x=\pm1$ 并不是 $1/(1+x^2)$ 的奇点，条件 $|x|<1$ 就不那么容易理解了。

改用有界函数 $\frac{n!}{2\pi i}\frac{1}{(\zeta-z)^{n+1}}$ 遍乘(11.9)，

$$\begin{aligned}\frac{n!}{2\pi i}\frac{w(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}&=\frac{n!}{2\pi i}\frac{a_0}{(\zeta-z)^{n+1}}+\frac{n!}{2\pi i}\frac{a_1(\zeta-z_0)}{(\zeta-z)^{n+1}}\\&\quad+\frac{n!}{2\pi i}\frac{a_2(\zeta-z_0)^2}{(\zeta-z)^{n+1}}+\cdots.\end{aligned}$$

沿回路 C_{R_1} 逐项积分并应用科希公式(9.5)得

$$w^{(n)}(z)=[a_0]^{(n)}+[a_1(z-z_0)]^{(n)}+[a_2(z-z_0)^2]^{(n)}+\cdots.$$

这是说，幂级数在收敛圆内可以逐项求导任意多次。

因为收敛圆的内部是单通区域，所以幂级数在收敛圆内又可以逐项积分。

请读者自己验证，逐项积分或逐项求导并不改变收敛半径。

习　题

1. 把幂级数(11.1)逐项求导，求所得级数的收敛半径，以此验证逐项求导并不改变收敛半径。

2. 把幂级数(11.1)逐项积分，求所得级数的收敛半径，以此验证逐项积分并不改变收敛半径。

3. 求下列幂级数的收敛圆。

(1) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}(z-i)^k$，　　(2) $\sum_{k=1}^{\infty}k^{\ln k}(z-2)^k$，

(3) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{z}{k}\right)^k$，　　(4) $\sum_{k=1}^{\infty}k!\left(\frac{z}{k}\right)^k$，

(5) $\sum_{k=1}^{\infty}k^k(z-3)^k$。

4. 已知幂级数$\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k$和$\sum_{k=0}^{\infty}b_kz^k$的收敛半径分别是$R_1$和$R_2$。求下列幂级数的收敛半径。

(1) $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k+b_k)z^k$，　　(2) $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k-b_k)z^k$，

(3) $\sum_{k=0}^{\infty}a_kb_kz^k$，　　(4) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{b_k}z^k$　$(b_k\neq 0)$。

§12. 泰勒级数

我们知道，任意阶的导数都存在的实变函数可以展为泰勒级数。既然解析函数的任意阶导数都存在，自然可以期望把解析函数展为复变项的泰勒级数。这果然很容易作到，只要把解析函数用科希公式(9.4)表示，并把公式中的$1/(\zeta-z)$展开为幂级数就行了。

设复变函数 $f(z)$ 在点 z_0 的邻域上是解析的。以 z_0 为圆心，以 z_0 跟最邻近的奇点之间的距离 R 为半径作圆 C_R（图 9）。现在期望在这个圆的内部把 $f(z)$ 展为泰勒级数。

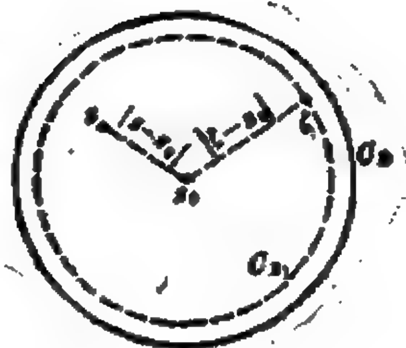


图 9

为了避免涉及泰勒级数在圆周 C_R 上的收敛或发散问题，又把 C_R 稍稍缩小为圆周 C_{R_1}。应用科希公式 (9.4)，

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_1}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta. \qquad (12.1)$$

接下去的工作是把 $1/(\zeta-z)$ 展为幂级数。考虑到展开式应以圆心 z_0 为中心，先把 $1/(\zeta-z)$ 改写为

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)}=\frac{1}{\zeta-z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}}. \qquad (12.2)$$

拿这式右边第二个因子跟(11.7)比较，可知

$$\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}}=1+\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}+\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^2+\cdots \quad \left(\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|<1\right).$$

把这代入(12.2)得

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-z_0}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^k}{(\zeta-z_0)^k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^k}{(\zeta-z_0)^{k+1}}. \qquad (12.3)$$

又把(12.3)代入(12.1)并逐项积分，

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(z-z_0)^k\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_1}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta.$$

根据科希公式(9.5)，上式就是以 z_0 为中心的泰勒级数

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k \quad (|z-z_0|<R). \qquad (12.4)$$

以 z_0 为中心的泰勒级数(12.4)是唯一的。事实上，假如另有一个以 z_0 为中心的不同于(12.4)的泰勒级数

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k, \qquad (12.5)$$

就应当有

$$a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots$$

$$=f(z_0)+\frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\cdots. \qquad (12.6)$$

在(12.6)中令 $z=z_0$，得

$$a_0=f(z_0).$$

把(12.6)求导一次，然后令 $z=z_0$，得

$$a_1=\frac{f'(z_0)}{1!}.$$

把(12.6)再求导一次，然后令 $z=z_0$，得

$$a_2=\frac{f''(z_0)}{2!}.$$

照这样作下去，就看出展开式(12.5)跟展开式(12.4)完全相同。

上节已经证明幂级数的和是解析函数，这里又证明解析函数可以展开为唯一的泰勒级数。由此可见，泰勒级数跟解析函数有着不可分的联系。

例1 在 $z_0=0$ 的邻域上把 $f(z)=e^z$ 展开。

解 函数 $f(z)=e^z$ 的各阶导数 $f^{(k)}(z)=e^z$，而

$$f^{(k)}(z_0)=f^{(k)}(0)=1.$$

按照(12.4)可写出 e^z 在 $z_0=0$ 的邻域上的泰勒级数

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots+\frac{z^k}{k!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}. \qquad (12.7)$$

应用 (11.3) 求得这个泰勒级数的收敛半径为无限大。这是说，只要 z 是有限的，泰勒级数(12.7)就收敛。

例2 在 $z_0=0$ 的邻域上把 $f_1(z)=\sin z$ 和 $f_2(z)=\cos z$ 展开。

解 函数 $f_1(z)=\sin z$ 的前四阶导数是 $f_1'(z)=\cos z$, $f_1''(z)=-\sin z$, $f_1^{(3)}(z)=-\cos z$, $f_1^{(4)}(z)=\sin z$。这 $f_1^{(4)}(z)$ 正是 $f_1(z)$ 本身，可见更高阶的导数不过是前四阶导数的重复。

在 $z_0=0$, $f_1(z)$ 和前四阶导数的值是 $f_1(0)=0$; $f_1'(0)=1$, $f_1''(0)=0$, $f_1^{(3)}(0)=-1$, $f_1^{(4)}(0)=0$.

按照(12.4)可写出 $\sin z$ 在 $z_0=0$ 的邻域上的泰勒级数

$$\sin z=\frac{z}{1!}-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots. \tag{12.8}$$

应用(11.3)求得这个泰勒级数的收敛半径为无限大。

同理可得 $\cos z$ 在 $z_0=0$ 的邻域上的泰勒级数

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots. \tag{12.9}$$

应用(11.3)求得这个泰勒级数的收敛半径为无限大。

例3 在 $z_0=1$ 的邻域上把 $f(z)=\ln z$ 展开。

解 多值函数 $f(z)=\ln z$ 的支点在 $z=0$，现在的展开中心 $z_0=1$ 并不在支点。从里曼面的构造容易看出，在不含支点的区域上，各个单值分支是独立的，各自是一个单值函数。

先计算展开系数：

$f(z)=\ln z$, $\qquad f(1)=\ln 1=n2\pi i$ (n 为整数),

$f'(z)=\dfrac{1}{z}$, $\qquad f'(1)=+1$;

$f''(z)=-\dfrac{1!}{z^2}$, $\qquad f''(1)=-1!$;

$f^{(3)}(z)=\dfrac{2!}{z^3}$, $\qquad f^{(3)}(1)=+2!$;

$$f^{(4)}(z)=-\frac{3!}{z^4}, \qquad f^{(4)}(1)=-3!;$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

于是按照(12.4)可写出 $\ln z$ 在 $z_0=1$ 的邻域上的泰勒级数

$$\ln z=\ln 1+\frac{1}{1!}(z-1)+\frac{-1!}{2!}(z-1)^2$$
$$+\frac{2!}{3!}(z-1)^3+\frac{-3!}{4!}(z-1)^4+\cdots$$
$$=n2\pi i+(z-1)-\frac{(z-1)^2}{2}+\frac{(z-1)^3}{3}$$
$$-\frac{(z-1)^4}{4}+\cdots.$$

按照(11.3)可求得这个泰勒级数的收敛半径为1，因此

$$\ln z=n2\pi i+(z-1)-\frac{(z-1)^2}{2}+\frac{(z-1)^3}{3}-\frac{(z-1)^4}{4}+\cdots$$
$$(|z|<1). \qquad (12.10)$$

在 (12.10) 的许多单值分支中，$n=0$ 的那一个叫作 $\ln z$ 的主值。

例 4　在 $z_0=0$ 的邻域上把 $f(z)=(1+z)^m$ 展开（m 不是整数）。

解　多值函数 $f(z)=(1+z)^m$ 的支点在 $z=-1$，现在的展开中心 $z_0=0$ 并不在支点。

先计算展开系数：

$$f(z)=(1+z)^m, \qquad f(0)=1^m;$$
$$f'(z)=m(1+z)^{m-1} \qquad f'(0)=m1^m;$$
$$=\frac{m}{1+z}f(z),$$
$$f''(z)=m(m-1)(1+z)^{m-2} \qquad f''(0)=m(m-1)1^m;$$
$$=\frac{m(m-1)}{(1+z)^2}f(z),$$

$$f^{(3)}(z) = \frac{m(m-1)(m-2)}{(1+z)^3} f(z), \qquad f^{(3)}(0) = m(m-1)(m-2)1^m;$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

于是按照(12.4)可写出$(1+z)^m$在$z_0=0$的邻域上的泰勒级数

$$(1+z)^m = 1^m + \frac{m}{1!}1^m z + \frac{m(m-1)}{2!}1^m z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}1^m z^3 + \cdots$$

$$= 1^m\left\{1 + \frac{m}{1!}z + \frac{m(m-1)}{2!}z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}z^3 + \cdots\right\},$$

按照(11.3)可求得这个泰勒级数的收敛半径为1，因此

$$(1+z)^m = 1^m\left\{1 + \frac{m}{1!}z + \frac{m(m-1)}{2!}z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}z^3 + \cdots\right\} \quad (|z|<1). \qquad (12.11)$$

式中的

$$1^m = (e^{in2\pi})^m = e^{imn2\pi} \ (n\ 为整数)。$$

在(12.11)的许多单值分支中，$n=0$ 亦即 $1^m=1$ 的那一个叫作$(1+z)^m$的主值。(12.11)也就是指数为非整数的二项式定理。

习　题

在指定的点z_0的邻域上把下列函数展开为泰勒级数。

(1) $\operatorname{arctg} z$ 在 $z_0=0$，　(2) $\sqrt[3]{z}$ 在 $z_0=i$，

(3) $\ln z$ 在 $z_0=i$，　(4) $\sqrt[3]{z}$ 在 $z_0=1$，

(5) $e^{1/(1-z)}$ 在 $z_0=0$，　(6) $\ln(1+e^z)$ 在 $z_0=0$，

(7) $(1+z)^{1/z}$ 在 $z_0=0$，　(8) $\sin^2 z$ 和 $\cos^2 z$ 在 $z_0=0$。

§ 13. 解析延拓

细看(11.7), (11.8), (12.10)和(12.11)几个式子，这些式子后面的括号里注明成立条件。假如取消所注的条件，则等号两边并不完全是一回事。例如，(11.8) 的左边是幂级数 $1-z^2+z^4-z^6+\cdots$，它在单位圆 $|z|=1$ 内部收敛，其和是解析函数，但如超出单位圆，级数就发散而无意义；右边是 $1/(1+z^2)$，它在除去 $z=\pm i$ 的全平面上是解析函数。这样，我们有两个函数，其一

$$f(z)=1-z^2+z^4-z^6+\cdots \quad (|z|<1) \tag{13.1}$$

在一个较小的区域上是解析函数，另一

$$F(z)=\frac{1}{1+z^2} \quad (\text{除 } z=\pm i \text{ 以外}) \tag{13.2}$$

则在含有上述区域的一个较大的区域上是解析函数，并且两者在那个较小的区域上等同。

于是就出现这样的问题：已给某个区域 b 上的解析函数 $f(z)$，是否能找出另一函数 $F(z)$，它在含有区域 b 的一个较大的区域 B 上是解析函数，而且在区域 b 上等同于 $f(z)$？这个问题叫作解析延拓。简单地说，解析延拓就是解析函数定义域的扩大。

从原则上说，解析延拓总可以利用泰勒级数进行。具体地说，选取区域 b 的任一内点 z_0，在 z_0 的邻域上把解析函数 $f(z)$ 展开为泰勒级数。如果这个泰勒级数的收敛圆有一部分超出 b 之外，解析函数 $f(z)$ 的定义域就扩大了一步。这样一步又一步，定义域逐步扩大。

利用泰勒级数进行解析延拓虽然是个普遍方法，但具体用起来计算很繁，所以通常总是尽量利用一些特殊方法，例如(13.2)就是(13.1)的解析延拓。不管用哪种方法进行解析延拓都可以，

因为解析延拓是唯一的。关于这个唯一性，下面给出简单的论证。

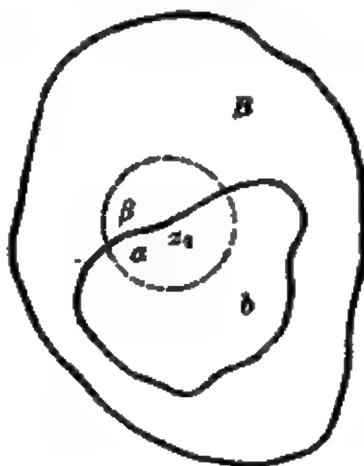


图 10

$f(z)$是区域b上的解析函数，用两种方法把$f(z)$解析延拓到含有区域b的一个较大的区域B上。假定从两种方法得到的解析函数是不同的，分别为$F_1(z)$和$F_2(z)$. 在区域b上，$F_1(z)$和$F_2(z)$各自等同于$f(z)$，因而$F_1(z)-F_2(z)$在b上处处为零。这样，函数$F_1(z)-F_2(z)$是区域B上的解析函数而且并非处处为零，但在区域B的一个子区域b上却是处处为零(图 10)。选取b的境界线上一点z_0，图中用虚线标明z_0的一个邻域，这邻域的一部分α属于b，另一部分β则不属于b。于是，按照上述假定，函数$F_1(z)-F_2(z)$在α上处处为零，在β上并非处处为零(否则就把β并入b)。以z_0为中心把解析函数$F_1(z)-F_2(z)$展开为泰勒级数

$$F_1(z)-F_2(z)=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots+a_k(z-z_0)^k+\cdots.$$

设这些系数中第一个不为零的是a_m(m是有限的)，即

$$F_1(z)-F_2(z)=(z-z_0)^m[a_m+a_{m+1}(z-z_0)+a_{m+2}(z-z_0)^2+\cdots]. \tag{13.3}$$

对于点z_0的紧邻z而言，$|z-z_0|$很小，因而(13.3)的[ ]中以a_m为最重要，即$[a_m+a_{m+1}(z-z_0)+a_{m+2}(z-z_0)^2+\cdots]\approx a_m$，从而

$$F_1(z)-F_2(z)\approx(z-z_0)^m a_m\neq 0.$$

这是说，$F_1(z)-F_2(z)$不可能在α上处处为零。这样，在α上处处为零要求所有的系数$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_k, \cdots$无一例外都是零。但如果所有系数全为零，势必使$F_1(z)-F_2(z)$在$\beta$上也处处为零，这

跟原来的假定是矛盾的。总结起来说，区域 B 上的解析函数

$$F_1(z)-F_2(z)$$

在子区域 b 上处处为零，必在整个区域 B 上处处为零。换句话说，用两种方法进行解析延拓所得到的 $F_1(z)$ 和 $F_2(z)$ 是完全等同的，即解析延拓是唯一的。

§14. 罗朗级数

为了研究函数在奇点附近的性质，需要函数在孤立奇点 z_0 的邻域上的展开式。先研究几个例题。

例 1 在 $z_0=0$ 的邻域上把 $(\sin z)/z$ 展开。

解 函数 $(\sin z)/z$ 在原点没有定义，$z_0=0$ 是奇点。

引用 $\sin z$ 在原点的邻域上的展开式(12.8)，

$$\sin z=\frac{z}{1!}-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots \quad (|z|<\infty).$$

为了避开奇点，从复数平面挖去原点。在挖去原点的复数平面上，用 z 遍除 $\sin z$ 的展开式，就得 $(\sin z)/z$ 的展开式

$$\frac{\sin z}{z}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\frac{z^6}{7!}+\cdots \quad (0<|z|<\infty). \qquad (14.1)$$

其实，如果定义一个函数 $f(z)$，

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{\sin z}{z} & (z\neq 0),\\ \lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{\sin z}{z}=1 & (z=0),\end{cases}$$

则 $f(z)$ 在整个开平面上是解析的。从 (14.1) 直接得到 $f(z)$ 在 $z_0=0$ 的邻域上的展开式

$$f(z)=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\frac{z^6}{7!}+\cdots \quad (|z|<\infty). \qquad (14.2)$$

(14.2) 正是解析函数 $f(z)$ 的泰勒级数。

例 2　在 $z_0=1$ 的邻域上把函数 $f(z)=1/(z-1)(z-2)$ 展开。

解　$z_0=1$ 是 $f(z)$ 的奇点。

先把 $f(z)$ 分解为分项分式

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-2}.$$

第二项在 $z_0=1$ 的邻域上是解析的，可以展为泰勒级数。利用 (11.7) 即得

$$\frac{1}{z-2}=\frac{-1}{1-(z-1)}=-\sum_{k=0}^{\infty}(z-1)^k \quad (|z-1|<1).$$

于是

$$f(z)=-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-2}=-(z-1)^{-1}-\sum_{k=0}^{\infty}(z-1)^k$$

$$=-\sum_{k=-1}^{\infty}(z-1)^k \quad (0<|z-1|<1). \qquad (14.3)$$

这个展开式出现 -1 次幂项。

例 3　在 $z_0=0$ 的邻域上把 $e^{1/z}$ 展开。

解　引用 e^z 在原点邻域上的展开式(12.7)

$$e^z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}z^k=1+\frac{1}{1!}z+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\cdots \quad (|z|<\infty),$$

把 z 全换成 $1/z$ 即得

$$e^{\frac{1}{z}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{1}{z}\right)^k$$

$$=1+\frac{1}{1!}\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}+\cdots \quad \left(\left|\frac{1}{z}\right|<\infty\right),$$

即

$$e^{\frac{1}{z}}=\sum_{k=-\infty}^{0}\frac{1}{(-k)!}z^{k}\quad(0<|z|).\tag{14.4}$$

这个展开式出现无限多负幂项。

例4 在 $z_0=0$ 的邻域上把 $e^{\frac{1}{2}x\left(z-\frac{1}{z}\right)}$ 展开。

解 由(12.7)和(14.4)得绝对收敛级数

$$e^{\frac{1}{2}xz}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\left(\frac{1}{2}xz\right)^{l}\quad(|z|<\infty),\tag{14.5}$$

$$e^{-\frac{1}{2}x\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{2}x\frac{1}{z}\right)^{n}\quad(0<|z|).\tag{14.6}$$

绝对收敛级数(14.5)和(14.6)可以逐项相乘，乘积中既有无限多正幂项，又有无限多负幂项。为得到乘积中某个正幂 $z^m(m\geqslant0)$ 项，应取(14.6)所有各项而分别用(14.5)中的 $l=n+m$ 项去乘。为得到乘积中某个负幂 $z^{-h}(h>0)$ 项，应取(14.5)所有各项而分别用(14.6)中的 $n=l+h$ 项去乘。这样，

$$e^{\frac{1}{2}x\left(z-\frac{1}{z}\right)}=\sum_{m=0}^{\infty}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(m+n)!n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2n}\right]z^m$$
$$+\sum_{h=1}^{\infty}\left[(-1)^h\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l!(l+h)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{h+2l}\right]z^{-h}$$
$$(0<|z|<\infty).$$

把 $-h$ 改作 m，l 改作 n，则

$$e^{\frac{1}{2}x\left(z-\frac{1}{z}\right)}=\sum_{m=0}^{\infty}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(m+n)!n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2n}\right]z^m$$
$$+\sum_{m=-1}^{-\infty}\left[(-1)^m\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+|m|)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{|m|+2n}\right]z^m$$
$$(0<|z|<\infty).\tag{14.7}$$

顺便说一说，(14.7)的[ ]里正是数学物理中常用到的m阶贝塞耳函数$J_m(x)$。因此(14.7)也可写成

$$e^{\frac{1}{2}x\left(z-\frac{1}{z}\right)}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}J_m(x)z^m.$$

展开式(14.1)，(14.3)，(14.4)和(14.7)具有共同性，它们的收敛区域都是挖去了奇点的圆环域，叫作收敛环。它们也有不同点，(14.1)只有正幂项，(14.3)出现有限个负幂项，(14.4)和(14.7)则具有无限个负幂项。

现在仿照§12对孤立奇点邻域上的展开式作一番研究。

设z_0是函数$f(z)$的孤立奇点。以z_0为圆心，以z_0跟最邻近的奇点之间的距离R为半径作圆C_R(图11)，并把它稍稍缩小为C_{R_1}。又以z_0为圆心，以任意的小半径R_2为半径作圆C_{R_2}。函数$f(z)$在这两圆之间的圆环域上是解析的。应用复通区域上解析函数的科希公式，

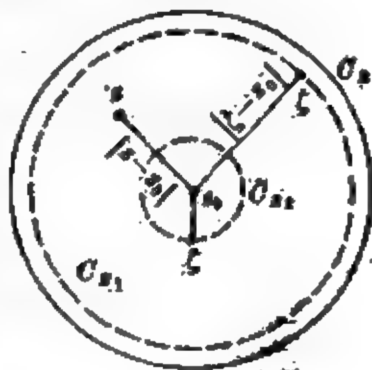


图 11

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_1}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_2}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta. \qquad (14.8)$$

接下去的工作是把$1/(\zeta-z)$展为幂级数。对于沿C_{R_1}的积分，$1/(\zeta-z)$可以像(12.3)那样展开，

$$\frac{1}{\zeta-z}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^k}{(\zeta-z_0)^{k+1}}. \qquad (14.9)$$

对于沿C_{R_2}的积分，考虑到$|z-z_0|>|\zeta-z_0|$(参看图11)，应改按下列方式把$1/(\zeta-z)$展开：

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)}=-\frac{1}{z-z_0}\frac{1}{1-\dfrac{\zeta-z_0}{z-z_0}}$$

$$= -\frac{1}{z-z_0}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(\zeta-z_0)^l}{(z-z_0)^l} = -\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(\zeta-z_0)^l}{(z-z_0)^{l+1}}. \qquad (14.10)$$

把(14.9)和(14.10)分别代入(14.8)右边的两个积分，并逐项积分，

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(z-z_0)^k\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_2}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta$$

$$-\sum_{l=0}^{\infty}(z-z_0)^{-(l+1)}\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_1}}(\zeta-z_0)^l f(\zeta)d\zeta.$$

在上式右边第二部分之中，改用 $k=-(l+1)$ 代替 l 作为求和指标，并根据科希定理(8.6)把积分回路改为 C_{R_1}，即得

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k(z-z_0)^k, \qquad (14.11)$$

其中

$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_1}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta. \qquad (14.12)$$

这就是挖去孤立奇点而形成的环域上的解析函数的罗朗级数。

注意不要误用科希公式(9.5)把(14.12)写成 $a_k=\frac{1}{k!}f^{(k)}(z_0)$。这是因为在 C_{R_1} 所围区域上存在着奇点 z_0。

跟泰勒级数一样，罗朗级数也是唯一的。

习　题

在挖去奇点 z_0 的环域上或指定的环域上把下列函数展开为罗朗级数。

(1) $z^5e^{1/z}$ 在 $z_0=0$，　　(2) $1/z^2(z-1)$ 在 $z_0=1$，

(3) $1/z(z-1)$ 在 $z_0=0$，在 $z_0=1$，

(4) $e^{1/(1-z)}$ 在 $|z|>1$，

(5) $1/(z-2)(z-3)$ 在 $|z|>3$，

(6) $(z-1)(z-2)/(z-3)(z-4)$在$R<|z|<\infty$(R很大)。

(7) $1/(z^2-3z+2)$在$1<|z|<2$,

(8) $1/(z^2-3z+2)$在$2<|z|<\infty$,

(9) e^z/z在奇点,

(10) $(1-\cos z)/z$在奇点,

(11) $\sin(1/z)$在奇点,

(12) $\operatorname{ctg} z$在奇点,

(13) $z/(z-1)(z-2)^2$在$|z|<1$, 在$1<|z|<2$, 在$2<|z|$,

(14) $z/(z-1)(z-2)$在$|z|<1$, 在$1<|z|<2$, 在$2<|z|$,

(15) $1/z^2(z^2-1)^2$在$0<|z|<1$, 在$1<|z|<\infty$.

§15. 奇点分类

上节已经证明，在挖去孤立奇点z_0而形成的环域上的解析函数$f(z)$可展为罗朗级数

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k(z-z_0)^k. \tag{15.1}$$

罗朗级数(15.1)的正幂部分叫作**解析部分**，负幂部分叫作**主要部分**或**无限部分**，$(z-z_0)^{-1}$的系数a_{-1}由于据有特别重要的地位(参看§16)，因而专门起了名字，叫作函数$f(z)$在奇点z_0的**留数**。

一般地说，罗朗级数的主要部分有无限多负幂项。但具体情况各有不同。例如$(\sin z)/z$在$0<|z|<\infty$上的罗朗级数(14.1)没有负幂项，$1/(z-1)(z-2)$在$0<|z-1|<1$上的罗朗级数(14.3)只有$(z-1)^{-1}$这样的负幂项，$e^{1/z}$在$0<|z|$上的罗朗级数(14.4)则有无限多负幂项。

在挖去孤立奇点z_0而形成的环域上的解析函数$f(z)$的罗朗级数或则没有负幂项，或则只有有限个负幂项，或则有无限个负幂项。在这三种情况下，我们分别把z_0叫作函数$f(z)$的可去奇点，

极点或本性奇点。

如果 z_0 是 $f(z)$ 的可去奇点，就是说在以 z_0 为圆心而内半径为零的圆环域 $0<|z-z_0|<R$ (R 是某个有限或无限的数值)上的罗朗级数为

$$f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots \quad (0<|z-z_0|<R). \tag{15.2}$$

据此显然有

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=a_0 \tag{15.3}$$

是有限的。这是说，函数在可去奇点的邻域上是有界的。

其实，如果定义函数 $g(z)$ 以代替 $f(z)$，

$$g(z)=\begin{cases} f(z) & (z\neq z_0), \\ a_0 & (z=z_0), \end{cases}$$

则由(15.2)得

$$g(z)=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots \quad (|z-z_0|<R).$$

这就是 $g(z)$ 在 z_0 的邻域上的泰勒级数。就函数 $g(z)$ 而言，z_0 不再是奇点。这正是"可去奇点"一词的来历。可去奇点今后将不作为奇点看待。

如果 z_0 是 $f(z)$ 的极点，就是说在圆环域 $0<|z-z_0|<R$ 上的罗朗级数为

$$\begin{aligned} f(z)&=a_{-m}(z-z_0)^{-m}+a_{-m+1}(z-z_0)^{-m+1} \\ &\quad +\cdots+a_0+a_1(z-z_0)+\cdots \\ &=\sum_{k=-m}^{\infty} a_k(z-z_0)^k \quad (0<|z-z_0|<R). \end{aligned} \tag{15.4}$$

据此显然有

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty. \tag{15.5}$$

m 叫作极点 z_0 的阶。一阶的极点也简称为单极点。

如果 z_0 是 $f(z)$ 的本性奇点，就是说在圆环域 $0<|z-z_0|<R$ 上的罗朗级数为

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k(z-z_0)^k \quad (0<|z-z_0|<R). \qquad (15.6)$$

在(15.6)中，令 $z\to$ 本性奇点 z_0，$f(z)$ 的极限随 z 趋于 z_0 的方式而定。参看(14.4)，$z_0=0$ 是函数 $e^{1/z}$ 的本性奇点。当 z 沿正实轴趋于零，则 $1/z\to+\infty$，而 $e^{1/z}\to\infty$；当 z 沿负实轴趋于零，则 $1/z\to-\infty$，而 $e^{1/z}\to 0$；当 z 按 $i/2\pi n$（n 为自然数 1, 2, 3, …）的序列趋于零，则 $e^{1/z}=e^{-2\pi ni}=1\to 1$.

以上所说孤立奇点 z_0 都是指的有限远点。这里再简单说说无限远点。如果函数 $f(z)$ 在无限远点的邻域 $|z|>R$ 上是解析的，则可在外半径为∞的圆环域 $R<|z|<\infty$（R 是某个有限数值）上展为罗朗级数

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k z^k \quad (R<|z|<\infty). \qquad (15.7)$$

罗朗级数(15.7)的负幂部分叫作解析部分，正幂部分叫作主要部分或无限部分。

如果罗朗级数(15.7)没有正幂项，就说函数 $f(z)$ 在无限远点是解析的。如果罗朗级数只有有限个正幂项，就把无限远点叫作 $f(z)$ 的极点，最高幂指数叫作极点的阶。如果罗朗级数有无限个正幂项，就把无限远点叫作 $f(z)$ 的本性奇点。

其实，只要作变换 $\zeta=1/z$，把 $z=\infty$ 变换为 $\zeta=0$，从 ζ 平面的原点来看，这些定义都是显然的了。

但是 $f(z)$ 在无限远点的留数却定义为 z^{-1} 项（注意这属于解析部分而不属于主要部分）的系数 a_{-1} 反号即 $-a_{-1}$. 这是为了便于应用留数定理(参看(16.6)式)。

例如

$$e^z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!},\qquad \sin z=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

$$\cos z=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

以无限远点为本性奇点。多项式 $a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$ 则以无限远点为 n 阶极点。这几个展开式没有负幂项，所以这几个函数在无限远点的留数都是零。

多值函数还有一种奇点即支点。这里只考虑有限阶的支点，例如 $m-1$ 阶的支点。以多值函数 $f(z)$ 的 $m-1$ 阶支点 z_0 为圆心而内半径为零的圆环域，在里曼面上是 m 叶交错相连的圆环，函数在这交错相连的圆环上是解析的。引入新的自变数

$$\zeta=\sqrt[m]{z-z_0}=\sqrt[m]{|z-z_0|}\;e^{i\frac{1}{m}\arg(z-z_0)}$$

以代替原来的宗量 z。由于 ζ 的辐角只是 $z-z_0$ 的辐角的 $1/m$，所以相应的 ζ 区域是单叶圆环。换句话说，z 的多值函数 $f(z)$ 是 ζ 的单值函数。在 ζ 平面的单叶圆环上把 $f(z)$ 展为罗朗级数

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\zeta^k. \tag{15.8}$$

罗朗级数(15.8)或则没有负幂项，或则只有有限个负幂项，或则有无限个负幂项。在这三种情况下，我们分别把支点 z_0 叫作函数 $f(z)$ 的解析型、极点型、本性奇点型支点。

以原来的宗量 z 代回(15.8)，得

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k(z-z_0)^{k/m}. \tag{15.9}$$

幂指数 k/m 是分数，这正是支点邻域上的展开式的特征。

例如 $f(z)=1/(4+\sqrt{z})$ 以 $z_0=0$ 为一阶支点。支点的邻域是二叶圆环。引入新的自变数 $\zeta=\sqrt{z}$，则，

$$f(z)=\frac{1}{4+\zeta}=\frac{1}{4}\frac{1}{1+\frac{\zeta}{4}}=\frac{1}{4}\left(1+\frac{\zeta}{4}\right)^{-1}=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{\zeta}{4}\right)^k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\zeta^k}{4^{k+1}} \qquad (|\zeta|<4)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4^{k+1}}z^{k/2} \qquad (|z|<16).$$

习　　题

设函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 分别以点 z_0 为 m 阶和 n 阶极点。问对于下列函数而言，z_0 是何种性质的点？

(1) $f(z)g(z)$，(2) $f(z)/g(z)$，(3) $f(z)+g(z)$。

第四章　留数定理

§16. 留数定理

科希定理(8.3)指出，如被积函数 $f(z)$ 在回路 l 所围闭区域上是解析的，则回路积分 $\oint_l f(z)dz$ 等于零。因此，我们只需考虑回路 l 包围着 $f(z)$ 的奇点的情况。

先设 l 只包围着 $f(z)$ 的一个孤立奇点 z_0. 在以 z_0 为圆心而内半径为零的圆环域上把 $f(z)$ 展为罗朗级数

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k(z-z_0)^k. \qquad (16.1)$$

在罗朗级数(16.1)的收敛环中任取一个紧紧包围着 z_0 的小回路 l_0(图 12)。按照科希定理(8.6),

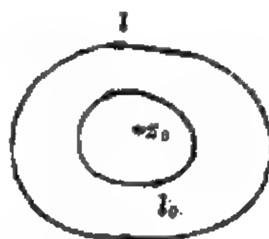


图 12

$$\oint_l f(z)dz=\oint_{l_0} f(z)dz.$$

把罗朗级数(16.1)代入上式右边，逐项积分，

$$\oint_l f(z)dz=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\oint_{l_0}(z-z_0)^k dz.$$

据公式(8.8)和(8.9)，上式右边各项除去 $k=-1$ 的一项之外全为零，而 $k=-1$ 的一项里的积分等于 $2\pi i$. 于是，

$$\oint_l f(z)dz=2\pi i a_{-1}. \qquad (16.2)$$

罗朗级数 (16.1) 的 $(z-z_0)^{-1}$ 项的系数 a_{-1} 就这样具有特别重要的地位，因而专门起了名字，叫作函数 $f(z)$ 在点 z_0 的留数，通常记

作 $\mathrm{Res}f(z_0)$。这样，

$$\oint_l f(z)dz = 2\pi i \mathrm{Res}f(z_0). \tag{16.3}$$

现在讨论 l 包围着 $f(z)$ 的 n 个孤立奇点 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 的情况。作回路 $l_1, l_2, \cdots, l_n$ 分别紧紧包围着 $b_1, b_2, \cdots, b_n$。按照科希定理，

$$\oint_l f(z)dz = \oint_{l_1} f(z)dz + \oint_{l_2} f(z)dz + \cdots + \oint_{l_n} f(z)dz.$$

以(16.2)代入上式右边，得

$$\oint_l f(z)dz = 2\pi i[\mathrm{Res}f(b_1) + \mathrm{Res}f(b_2) + \cdots + \mathrm{Res}f(b_n)]. \tag{16.4}$$

这叫作**留数定理**。它把回路积分归结为被积函数在回路所围各点的留数之和。

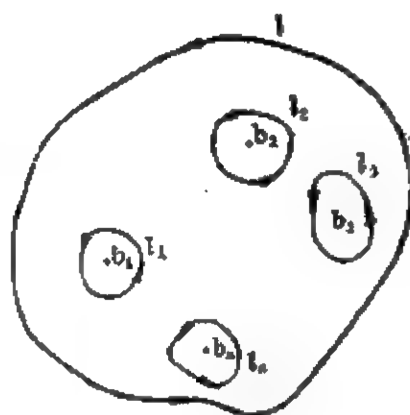


图 13

对于无限远点，留数定理也成立。事实上，如果函数 $f(z)$ 在无限远点的邻域 $R<|z|<\infty$ 上是解析的，则可在外半径为 ∞ 的圆环域 $R<|z|<\infty$ 上展为罗朗级数

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k z^k \quad (R<|z|<\infty). \tag{16.5}$$

在圆环域 $R<|z|<\infty$ 中任取一个回路 l，仿照(16.2)可得

$$\oint_l f(z)dz = 2\pi i a_{-1}.$$

但环绕无限远点的正方向应是顺时针的，因此又把上式改写为

$$\oint_l f(z)dz = 2\pi i(-a_{-1}). \tag{16.6}$$

$-a_{-1}$被定义为$f(z)$在无限远点的留数$\text{Res}f(\infty)$。这样，留数定理对于无限远点也成立。注意，即使无限远点不是奇点，$\text{Res}f(\infty)$也可以不为零。

有趣的是，如果$f(z)$只有有限个奇点，所有有限远的奇点必在某个圆的内部$|z|<R$，让我们在圆环域$R<|z|<\infty$内任取一个回路l，则由(16.4)，

$$\oint_l f(z)dz = 2\pi i\{f(z)\text{在所有有限远奇点的留数之和}\}。$$

拿上式跟(16.6)相加，得

$$0 = 2\pi i\{f(z)\text{在所有各点留数之和}\}。\qquad (16.7)$$

即函数$f(z)$在全平面上所有各点的留数之和为零。这里说的所有各点包括无限远点和有限远的奇点。

既然留数定理把回路积分归结为被积函数在回路所围各奇点的留数之和，这里就讨论一下如何计算留数。从一般原则来说，只要在以奇点为圆心的圆环域上把函数展开为罗朗级数，取它的负一次幂项的系数就行了。但是，如果能够不作罗朗展开而直接算出留数，计算工作量可能减轻不少。事实上，对于极点，确实可以做到这一点。

先设z_0是$f(z)$的单极点。罗朗级数应是

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots.$$

用$(z-z_0)$遍乘各项，

$$(z-z_0)f(z) = a_{-1} + a_0(z-z_0) + a_1(z-z_0)^2 + \cdots.$$

在上式右边令$z\to z_0$，得到非零的有限值即留数a_{-1}。这样，

$$\lim_{z\to z_0}[(z-z_0)f(z)] = \text{非零的有限值，即}\ \text{Res}f(z_0).\qquad (16.8)$$

(16.8)可用来判断z_0是否函数$f(z)$的单极点，同时它又是计算函数$f(z)$在单极点z_0的留数的公式。

再设 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶极点。罗朗级数应是

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}}+\cdots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}$$
$$+a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots, \quad (16.9)$$

以 $(z-z_0)^m$ 遍乘(16.9)各项，

$$(z-z_0)^m f(z)=a_{-m}+a_{-m+1}(z-z_0)+\cdots+a_{-1}(z-z_0)^{m-1}$$
$$+a_0(z-z_0)^m+a_1(z-z_0)^{m+1}+\cdots. \quad (16.10)$$

在(16.10)的右边令 $z\to z_0$，得到非零的有限值 a_{-m}，

$$\lim_{z\to z_0}[(z-z_0)^m f(z)]=\text{非零有限值。} \quad (16.11)$$

运用(16.11)可以判断 z_0 是否 m 阶极点。

(16.10)式可说是函数 $[(z-z_0)^m f(z)]$ 的泰勒级数，而函数 $f(z)$ 在 m 阶极点 z_0 的留数 $\mathrm{Res}f(z_0)$ 即 a_{-1} 是这个级数的 $(z-z_0)^{m-1}$ 项的系数。参照(12.4)，这个系数可以表示为

$$\mathrm{Res}f(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{(m-1)!}\left\{\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]\right\}. \quad (16.12)$$

有了(16.8)，(16.11)和(16.12)，不必把函数 $f(z)$ 展为罗朗级数就可以判断极点的阶，并算出函数 $f(z)$ 在极点的留数。

例1 求 $f(z)=1/(z^n-1)$ 在 $z_0=1$ 的留数。

解 $\lim_{z\to 1}f(z)=\infty$。因此，$z_0=1$ 是函数的极点。事实上，把分母分解为因式即得

$$f(z)=\frac{1}{z^n-1}=\frac{1}{(z-1)(z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+z+1)},$$

可见 $z_0=1$ 是单极点。

用(16.8)计算留数

$$\mathrm{Res}f(1)=\lim_{z\to 1}\left[(z-1)\frac{1}{(z-1)(z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+z+1)}\right]$$

$$=\lim_{z\to 1}\frac{1}{z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+z+1}=\frac{1}{n}。$$

另解 不把分母因式分解，而应用罗毕达法则计算极限

$$\lim_{z\to 1}\left[(z-1)\frac{1}{z^n-1}\right]=\lim_{z\to 1}\frac{1}{nz^{n-1}}=\frac{1}{n}。$$

因此，$z_0=1$ 是单极点，在这个极点的留数是 $1/n$。

例2 确定函数 $f(z)=1/\sin z$ 的极点，求出函数在这些极点的留数。

解 于 $z\to n\pi$（n 为整数，包括零），有 $\sin z\to 0, f(z)\to\infty$. 因此，$z_0=n\pi$ 是极点。

$$\lim_{z\to n\pi}[(z-n\pi)f(z)]=\lim_{z\to n\pi}\frac{z-n\pi}{\sin z}。$$

应用罗毕达法则确定上式右边的极限，

$$\lim_{z\to n\pi}[(z-n\pi)f(z)]=\lim_{z\to n\pi}\frac{(z-n\pi)'}{(\sin z)'}=\lim_{z\to n\pi}\frac{1}{\cos z}=(-1)^n.$$

$(-1)^n$ 是非零有限值。因此，$z_0=n\pi$ 是 $f(z)=1/\sin z$ 的单极点，$f(z)$在单极点 $z_0=n\pi$ 的留数就是 $(-1)^n$.

例3 确定函数 $f(z)=(z+2i)/(z^5+4z^3)$的极点，并求出函数在这些极点的留数。

解 先析出分母的因式，并与分子约去公因式，得

$$f(z)=\frac{z+2i}{z^3(z^2+4)}=\frac{z+2i}{z^3(z+2i)(z-2i)}=\frac{1}{z^3(z-2i)}.$$

于 $z\to 2i$，有 $f(z)\to\infty$。因此，$z_0=2i$ 是极点。

$$\lim_{z\to 2i}[(z-2i)f(z)]=\lim_{z\to 2i}\frac{1}{z^3}=-\frac{1}{8i}=\frac{i}{8},$$

由此可见，$z_0=2i$ 是单极点，留数就是 $i/8$.

于 $z\to 0$，也有 $f(z)\to\infty$. 因此，$z_0=0$ 也是极点。

$$\lim_{z\to 0}[z^3f(z)]=\lim_{z\to 0}\frac{1}{z-2i}=-\frac{1}{2i}.$$

由此可见，$z_0=0$ 是三阶极点。应用(16.8)计算 $f(z)$ 在 $z_0=0$ 的留数，

$$\mathrm{Res}f(0)=\lim_{z\to 0}\frac{1}{2!}\left\{\frac{d^2}{dz^2}[z^3f(z)]\right\}=\lim_{z\to 0}\frac{1}{2!}\left\{\frac{d^2}{dz^2}\frac{1}{z-2i}\right\}$$

$$=\lim_{z\to 0}\left\{\frac{1}{(z-2i)^3}\right\}=\frac{1}{8i}=-\frac{i}{8}.$$

例 4 计算沿单位圆 $|z|=1$ 的回路积分

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}\quad(0<\varepsilon<1).$$

解 令被积函数 $f(z)=\dfrac{1}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}$ 的分母为零，得二次代数方程 $\varepsilon z^2+2z+\varepsilon=0$，它的两根是 $z=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}$，这就是 $f(z)$ 的两个单极点。

单极点 $\dfrac{-1-\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}$ 的模 $\left|\dfrac{-1-\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\right|=\dfrac{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}>\dfrac{1}{\varepsilon}>1$，所以这个单极点在单位圆外，不为积分回路所包围，从而在计算回路积分时不必考虑。

单极点 $z_0=\dfrac{-1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}$ 的模 $\left|\dfrac{-1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\right|=\dfrac{1-\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}$ $=\dfrac{1-\sqrt{(1+\varepsilon)(1-\varepsilon)}}{\varepsilon}<\dfrac{1-(1-\varepsilon)}{\varepsilon}=1$ 在单位圆内。计算回路积分必须考虑这个极点。注意到分母

$$\varepsilon z^2+2z+\varepsilon=\varepsilon\left(z-\frac{-1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\right)\left(z-\frac{-1-\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\right),$$

就容易计算在这个极点的留数：

$$\mathrm{Res}f\left(\frac{-1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\right)=\lim_{z\to z_0}[(z-z_0)f(z)]$$

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{1}{\varepsilon\left(z - \frac{-1-\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

应用留数定理，

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{\varepsilon z^2 + 2z + \varepsilon} = 2\pi i \text{Res} f(z_0) = 2\pi i \frac{1}{2\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \frac{\pi i}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

习　题

1. 确定下列函数的奇点，求出函数在各奇点的留数。

(1) $e^z/(1+z)$，　(2) $z/(z-1)(z-2)^2$，

(3) $e^z/(z^2+a^2)$，　(4) $e^{iz}/(z^2+a^2)$，

(5) $ze^z/(z-a)^3$，　(6) $1/(z^3-z^5)$，

(7) $z^2/(z^2+1)^2$，　(8) $z^{2n}/(z+1)^n$，

(9) $e^{1/(1-z)}$，　(10) $1/(1+z^{2n})$。

2. 计算下列回路积分。

(1) $\oint_l \frac{dz}{(z^2+1)(z-1)^2}$（$l$的方程是 $x^2+y^2-2x-2y=0$），

(2) $\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} dz$，　(3) $\oint_{|z|=2} e^{1/z^2} dz$，

(4) $\oint_{|z|=2} \frac{z dz}{1/2-\sin^2 z}$。

3. 应用留数定理计算回路积分$\frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{f(z)}{z-a} dz$，函数$f(z)$在$l$所围区域上是解析的，$\alpha$ 是这区域的一个内点。

§17. 应用留数定理计算实变函数定积分

留数定理的一个重要应用是计算某些实变函数定积分。为此，当然需要设法把实变函数定积分跟复变函数回路积分联系起来。

把实变定积分联系于复变回路积分的要点如下：定积分

$\int_a^b f(x)dx$ 的积分区间$[a, b]$可以看作是复数平面上的实轴上的一段 l_1(图 14)。于是，或者利用自变数的变换把 l_1 变换为某个新的复数平面上的回路，这样就可以应用留数定理了；或者另外补上一段曲线 l_2，使 l_1 和 l_2 合成回路 l, l 包围着区域 B(图 14)。把$f(x)$解析延拓到闭区域 B (这个延拓往往只不过是把 $f(x)$ 改为$f(z)$而已)，并拿它沿着 l 积分，

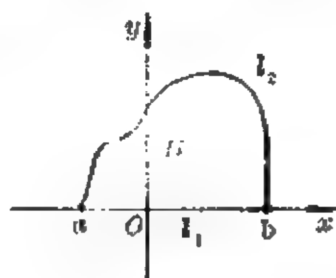


图 14

$$\oint_l f(z)dz=\int_{l_1} f(x)dx+\int_{l_2} f(z)dz.$$

上式左边可以应用留数定理，右边第一个积分就是所求的定积分。如果右边第二个积分较易算出(往往是证明为零)或可用第一个积分表出，问题就解决了。

下面具体介绍几个类型的实变定积分。

类型一 $\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx$. 被积函数是三角函数的有理式；积分区间是$[0, 2\pi]$.

作自变数代换

$$z=e^{ix}. \tag{17.1}$$

在实变数 x 从 0 变到 2π 的过程中，复变数 $z=e^{ix}$ 从 $z=1$ 出发沿单位圆 $|z|=1$ 逆时针走一圈又回到 $z=1$，实变定积分化为复变回路积分，就可以应用留数定理了。至于实变定积分里的 $\cos x$, $\sin x$ 和 dx 则随着(17.1)而作如下变换：

$$\cos x=\frac{1}{2}(z+z^{-1}), \quad \sin x=\frac{1}{2i}(z+z^{-1}), \quad dx=\frac{1}{iz}dz. \tag{17.2}$$

例 1 计算$I=\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$ $(0<\varepsilon<1)$.

解 按照(17.1)和(17.2)作变换，

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{dz/iz}{1+\varepsilon\dfrac{z+z^{-1}}{2}}=\frac{2}{i}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}.$$

上式右边的回路积分在上节例4已用留数定理算出为$\pi i/\sqrt{1-\varepsilon^2}$。于是，

$$I=\frac{2}{i}\frac{\pi i}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}=\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

例2 计算 $I=\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1-2\varepsilon\cos x+\varepsilon^2}\quad(0<\varepsilon<1)$.

解 按照(17.1)和(17.2)作变换，

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{dz/iz}{1-\varepsilon(z+z^{-1})+\varepsilon^2}=\oint_{|z|=1}\frac{i}{(\varepsilon z-1)(z-\varepsilon)}dz.$$

这个回路积分的被积函数有两个单极点：$z_0=1/\varepsilon$ 和 $z_0=\varepsilon$. 前者>1，在积分回路$|z|=1$之外，因而不必考虑。单极点 $z_0=\varepsilon$ 在 $|z|=1$ 之内，必须考虑。运用(16.8)计算在 $z_0=\varepsilon$ 的留数

$$\lim_{z\to\varepsilon}\left[(z-\varepsilon)\frac{i}{(\varepsilon z-1)(z-\varepsilon)}\right]=\lim_{z\to\varepsilon}\frac{i}{\varepsilon z-1}=\frac{i}{\varepsilon^2-1}.$$

于是，由留数定理得

$$I=2\pi i\frac{i}{\varepsilon^2-1}=\frac{2\pi}{1-\varepsilon^2}.$$

类型二 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$. 积分区间是$(-\infty,\ +\infty)$；复变函数 $f(z)$在实轴上没有奇点，在上半平面除有限个奇点外是解析的；当 z 在上半平面$\to\infty$和在实轴上$\to\infty$时，$zf(z)$一致地$\to 0$。

如果$f(x)$是有理分式 $\varphi(x)/\psi(x)$，上述条件意味着 $\psi(x)$ 没有实的零点，$\psi(x)$的次数至少高于 $\varphi(x)$ 两次。

考虑图 15 的半圆回路 l，

$$\oint_l f(z)dz=\int_{-R}^{R}f(x)dx+\int_{C_R}f(z)dz.$$

根据留数定理，上式即

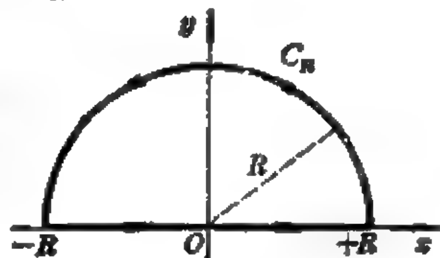


图 15

$2\pi i\{f(z)$在 l 所围半圆内各奇点的留数之和$\}$

$$=\int_{-R}^{R}f(x)dx+\int_{C_R}f(z)dz.$$

令 $R\to\infty$. 上式左边趋于 $2\pi i\{f(z)$ 在上半平面所有奇点的留数之和$\}$，右边第一个积分趋于所求的定积分$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$，第二个积分可证明是趋于零的：

$$\left|\int_{C_R}f(z)dz\right|=\left|\int_{C_R}zf(z)\frac{dz}{z}\right|\leqslant\int_{C_R}|zf(z)|\frac{|dz|}{|z|}$$

$$\leqslant\max|zf(z)|\frac{\pi R}{R}=\pi\cdot\max|zf(z)|\to 0,$$

式中 $\max|zf(z)|$指的是$|zf(z)|$在 C_R 上的最大值。于是得到结果

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=2\pi i\{f(z)\text{在上半平面所有奇点的留数之和}\}。\tag{17.3}$$

例 3 计算$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

解 本例 $f(z)=\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{(z-i)(z+i)}$，它具有单极点 $\pm i$，其中 $+i$ 在上半平面，而

$$\mathrm{Res}f(+i)=\lim_{z\to i}[(z-i)f(z)]=\lim_{z\to i}\frac{1}{z+i}=\frac{1}{2i}.$$

应用(17.3)，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=2\pi i\left\{\frac{1}{2i}\right\}=\pi.$$

例4 计算$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^n}$ (n为正整数)。

解 本例$f(z)=\frac{1}{(1+z^2)^n}=\frac{1}{(z-i)^n(z+i)^n}$，它在上半平面的奇点是$n$阶极点$+i$.

$$\begin{aligned}\text{Res}f(+i)&=\lim_{z\to i}\frac{1}{(n-1)!}\left\{\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-i)^n f(z)]\right\}\\&=\lim_{z\to i}\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z+i)^{-n}]\\&=\frac{(-n)(-n-1)\cdots(-2n+2)}{(n-1)!}(2i)^{-2n+1}\\&=-\frac{n(n+1)\cdots(2n-2)}{(n-1)!2^{2n-1}}i=-\frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2 2^{2n-1}}i.\end{aligned}$$

应用(17.3),

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^n}=2\pi i\left[-\frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2 2^{2n-1}}i\right]=\frac{\pi}{2^{2n-2}}\frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2}.$$

例5 计算$\int_0^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^n}$ (n为正整数)。

解 积分区间是$[0,+\infty)$,不符合上面所列举的条件。不过,由于被积函数$1/(1+x^2)^n$是偶函数，所以$\int_0^{\infty}=\int_{-\infty}^{0}$，因而

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^n}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

引用例4的结果即得

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^n}=\frac{\pi}{2^{2n-1}}\frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2}.$$

类型三 $\int_0^{\infty}F(x)\cos mx\,dx$, $\int_0^{\infty}G(x)\sin mx\,dx$. 积分区间是$[0,+\infty)$;偶函数$F(z)$和奇(读ji，基)函数$G(z)$在实轴上没有零点，在上半平面除有限个奇(ji)点外是解析的；当z在上半平面或实轴上$\to\infty$时,$F(z)$和$G(z)$一致地$\to 0$.

首先，把所求积分的形式变换一下，例如

$$\int_0^\infty F(x)\cos mx dx=\int_0^\infty F(x)\frac{1}{2}(e^{imx}+e^{-imx})dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty F(x)e^{imx}dx+\frac{1}{2}\int_0^\infty F(x)e^{-imx}dx.$$

在右边第二个积分中作代换 $x=-y$，并考虑到 $F(x)$是偶函数，得

$$\int_0^\infty F(x)\cos mx dx=\frac{1}{2}\int_0^\infty F(x)e^{imx}dx-\frac{1}{2}\int_0^{-\infty} F(y)e^{imy}dy.$$

定积分的值并不取决于积分变数采用什么记号。把右边第二个积分的积分变数改记作 x，则

$$\int_0^\infty F(x)\cos mx dx=\frac{1}{2}\int_0^\infty F(x)e^{imx}dx+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 F(x)e^{imx}$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty F(x)e^{imx}dx. \tag{17.4}$$

同理，

$$\int_0^\infty G(x)\sin mx dx=\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^\infty G(x)e^{imx}dx. \tag{17.5}$$

从(17.4)和(17.5)来看，所求积分已化为类型二。按照类型二，本当要求：当 z 在上半平面或实轴上 $\to\infty$ 时，$zF(z)e^{imz}$ 和 $zG(z)e^{imz}$ 一致地$\to 0$. 但是利用下述约当引理，可把条件放宽为 $F(z)$和 $G(z)$一致地$\to 0$.

约当引理　如 m 为正数，C_R 是以原点为圆心而位于上半平面的半圆周（图 15），又设当 z 在上半平面或实轴上$\to\infty$ 时 $F(z)$一致地$\to 0$，则

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} F(z)e^{imz}dz=0.$$

证　$$\left|\int_{C_R} F(z)e^{imz}dz\right|=\left|\int_{C_R} F(z)e^{imx-my}dz\right|$$

$$=\left|\int_0^\pi F(Re^{i\varphi})e^{-mR\sin\varphi}e^{imR\cos\varphi}Re^{i\varphi}id\varphi\right|$$

$$\leqslant \max|F(z)|\cdot\int_0^{\pi} e^{-mR\sin\varphi}Rd\varphi.$$

当 z 在上半平面或实轴上 $\to\infty$ 时，$F(z)$一致地$\to 0$，所以 $\max|F(z)|\to 0$，从而只需证明

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi} e^{-mR\sin\varphi}Rd\varphi \quad 即 \quad 2\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi/2} e^{-mR\sin\varphi}Rd\varphi$$

是有界的。

把积分区间$[0,\pi/2]$划分为$[0,\alpha]$和$[\alpha,\pi/2]$两段，

$$\int_0^{\pi/2} e^{-mR\sin\varphi}Rd\varphi=\int_0^{\alpha} e^{-mR\sin\varphi}Rd\varphi+\int_{\alpha}^{\pi/2} e^{-mR\sin\varphi}Rd\varphi$$

$$<\int_0^{\alpha} e^{-mR\sin\varphi}\frac{\cos\varphi}{\cos\alpha}Rd\varphi+\int_{\alpha}^{\pi/2} e^{-mR\sin\alpha}Rd\varphi$$

$$=\frac{1}{m\cos\alpha}\Big[-e^{-mR\sin\varphi}\Big]_0^{\alpha}+e^{-mR\sin\alpha}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)R$$

于 $R\to\infty$，上式右边第一项$\to 1/m\cos\alpha$，第二项$\to 0$，这就证明了约当引理。

如果 m 是负数，则约当引理应作

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R'} F(z)e^{imz}dz=0,$$

C_R' 是 C_R 对于实轴的映像。

根据约当引理，对于(17.4)和(17.5)右边两个积分，在放宽的条件下仍然可以引用(17.3)。于是得到结果

$$\int_0^{\infty} F(x)\cos mx dx=\pi i\{F(z)e^{imz}\ 在上半平面所有奇点的留数之和\},\tag{17.6}$$

$$\int_0^{\infty} G(x)\sin mx dx=\pi\{G(z)e^{imz}\ 在上半平面所有奇点的留数之和\}.\tag{17.7}$$

注意在(17.6)和(17.7)右边{ }里说的是 $F(z)e^{imz}$ 和 $G(z)e^{imz}$，

不要误为 $F(z)\cos mz$ 和 $G(z)\sin mz$.

例6 计算$\int_0^{\infty}\frac{\cos mx}{x^2+a^2}dx$.

解 本例$F(z)e^{imz}=\frac{1}{z^2+a^2}e^{imz}$有两个单极点 $\pm ai$, 其中 $+ai$ 在上半平面。而 $e^{imz}/(z^2+a^2)$在单极点$+ai$ 的留数为

$$\lim_{z\to ai}\left[(z-ai)\frac{e^{imz}}{z^2+a^2}\right]=\lim_{z\to ai}\left[\frac{e^{imz}}{z+ai}\right]=\frac{e^{-ma}}{2ai}.$$

应用(17.6),

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos mx}{x^2+a^2}dx=\pi i\frac{e^{-ma}}{2ai}=\frac{\pi}{2a}e^{-ma}.$$

例7 计算$\int_0^{\infty}\frac{x\sin mx}{(x^2+a^2)^2}dx$.

解 本例$G(z)e^{imz}=\frac{z}{(z^2+a^2)^2}e^{imz}$有两个二阶极点 $\pm ai$, 其中$+ai$ 在上半平面。而 $ze^{imz}/(z^2+a^2)^2$ 在$+ai$ 的留数

$$=\lim_{z\to ai}\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left[(z-ai)^2\frac{z}{(z^2+a^2)^2}e^{imz}\right]=\lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{(z+ai)^2}e^{imz}\right]$$

$$=\lim_{z\to ai}\left[\frac{1}{(z+ai)^2}e^{imz}+\frac{z}{(z+ai)^2}ime^{imz}-2\frac{z}{(z+ai)^3}e^{imz}\right]$$

$$=-\frac{1}{4a^2}e^{-ma}+\frac{ma}{4a^2}e^{-ma}+\frac{1}{4a^2}e^{-ma}=\frac{m}{4a}e^{-ma}.$$

应用(17.7),

$$\int_0^{\infty}\frac{x\sin mx}{(x^2+a^2)^2}dx=\pi\left(\frac{m}{4a}e^{-ma}\right)=\frac{m\pi}{4a}e^{-ma}.$$

例8 计算$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$.

解 本例 $G(z)=1/z$, 在实轴上有奇点, 即单极点 0, 不符合前面列举的条件, 前述计算方法不完全适用。例如, 按照(17.5)把积分的形式加以变换就成问题:

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x}dx,$$

右边这个积分的被积函数 e^{ix}/x 以 $x=0$ 为极点，因而这个积分是反常积分，上式应修改为

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{e^{ix}}{x}dx+\frac{1}{2i}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x}dx\right\}. \qquad (1)$$

这样，代替图 15 的半圆回路，应当考虑图 16 的回路 l，

$$\oint_l\frac{e^{iz}}{z}dz=\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{e^{ix}}{x}dx+\int_{C_\varepsilon}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{ix}}{x}dx+\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}dz.$$

令 $R\to\infty$. 上式左边按照留数定理应为 e^{iz}/z 在上半平面所有奇点的留数之和。但 e^{iz}/z 在上半平面并无奇点，所以这项为零。上式右边沿 C_R 的积分根据约当引理应为零。上式于是给出

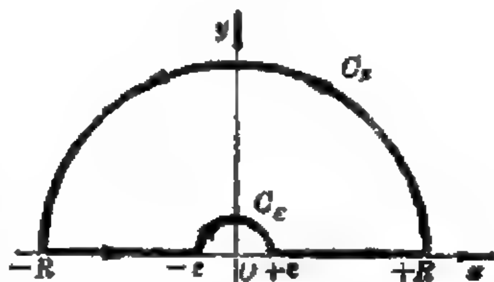


图 16

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{e^{ix}}{x}dx+\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x}dx\right\}=-\int_{C_\varepsilon}\frac{e^{iz}}{z}dz. \qquad (2)$$

问题归结为计算(2)式右边的积分。

把 e^{iz}/z 在以 $z_0=0$ 为圆心而内半径为零的圆环域上展开，

$$\frac{1}{z}e^{iz}=\frac{1}{z}\left(1+\frac{iz}{1!}+\frac{(iz)^2}{2!}+\frac{(iz)^3}{3!}+\cdots\right)=\frac{1}{z}+\text{解析部分 }P(z).$$

解析部分在 C_ε 上必是有界的，所以

$$\left|\int_{C_\varepsilon}P(z)dz\right|\leqslant\max|P(z)|\int_{C_\varepsilon}dz=2\varepsilon\cdot\max|P(z)|.$$

于 $\varepsilon\to 0$, 上式右边 $\to 0$. 由此可见 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon}P(z)dz=0$. 于是

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon}\frac{e^{iz}}{z}dz=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon}\frac{1}{z}dz+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon}P(z)dz=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon}\frac{1}{z}dz$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\pi}^{0}\frac{1}{\varepsilon e^{i\varphi}}\varepsilon e^{i\varphi}id\varphi=-\pi i.$$

以此代入(2)，

$$\lim_{\varepsilon\to0}\left\{\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{e^{ix}}{x}dx+\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x}dx\right\}=-(-\pi i)=\pi i.$$

再把上式代入(1)就得出结果

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{2i}(\pi i)=\frac{\pi}{2}.$$

由此还可以推论，对于正的 m，

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin mx}{x}dx=\int_0^{\infty}\frac{\sin(mx)}{(mx)}d(mx)=\frac{\pi}{2}\quad(m>0);$$

对于负的 m，

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin mx}{x}dx=-\int_0^{\infty}\frac{\sin|m|x}{x}dx=-\frac{\pi}{2}\quad(m<0).$$

这是重要的定积分公式。

习　　题

1. 计算下列实变函数定积分。

(1) $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{2+\cos x}$, (2) $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{(1+\varepsilon\cos x)^2}(0<\varepsilon<1)$,

(3) $\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2 2x dx}{1-2\varepsilon\cos x+\varepsilon^2}(|\varepsilon|<1)$,

(4) $\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 x dx}{a+b\cos x}(a>b>0)$,

(5) $\int_0^{\pi}\frac{a dx}{a^2+\sin^2 x}(a>0)$, (6) $\int_0^{2\pi}\frac{\cos x dx}{1-2\varepsilon\cos x+\varepsilon^2}(|\varepsilon|<1)$,

(7) $\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\cos^2 x}$, (8) $\int_0^{2\pi}\cos^{2n}x dx$.

2. 计算下列实变函数定积分。

(1) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$, (2) $\int_0^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+9)(x^2+4)^2}$,

(3) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^2(x^2+b^2)}$, (4) $\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^4+a^4}$,

(5) $\int_0^{\infty}\frac{x^2+1}{x^6+1}dx$, (6) $\int_0^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx$,

(7) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx\,(m<n)$.

3. 计算下列实变函数定积分。

(1) $\int_0^{\infty}\frac{\cos mx}{1+x^4}dx\,(m>0)$, (2) $\int_0^{\infty}\frac{\sin mx}{x(x^2+a^2)}dx\,(m>0,\ a>0)$,

(3) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{1+x^2}dx$, (4) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin mx}{2x^2+a^2}dx\,(m>0,\ a>0)$,

(5) $\int_0^{\infty}\frac{\cos mx}{(x^2+a^2)^2}dx$, (6) $\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx$,

(7) $\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$.

(8) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{imx}}{x-ia}dx$, $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{imx}}{x+ia}dx\,(m>0, \mathrm{Re}\,a>0)$.

§18. 计算定积分的补充例题

例1 计算定积分 $I=\int_0^{\infty}x^{a-1}\frac{1}{1+x}dx \quad (0<a<1)$.

解 把被积函数 $x^{a-1}/(1+x)$ 从实轴延拓到复数 z 平面得到 $f(z)=z^{a-1}/(1+z)$. 由于 $f(z)$ 含有 z^{a-1} 而 a 不是整数,所以 $f(z)$ 是多值函数,它有两个支点:原点和无限远点。z 每绕原点或无限远点一圈,辐角增加 2π,z^{a-1} 多出因子 $e^{i2\pi(a-1)}$ 亦即 $e^{i2\pi a}$,从而$f(z)$也多出这么一个因子。

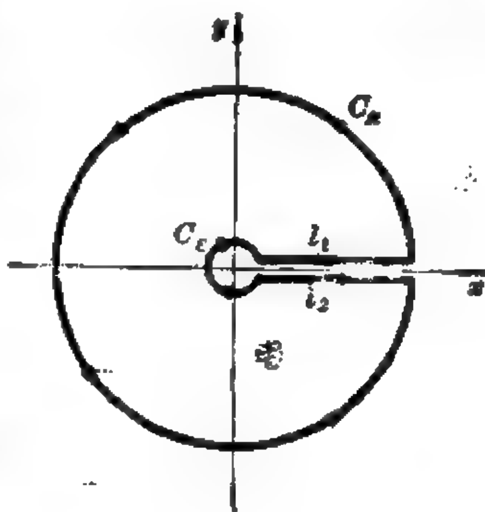


图 17

从原点起,沿着实轴作切割,直向无限远而去。

考虑图 17 所示回路 l,

$$\oint_l f(z)dz=\int_\varepsilon^R \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx+\int_{C_R} f(z)dz+\int_R^\varepsilon \frac{x^{\alpha-1}e^{i2\pi\alpha}}{1+x}dx+\int_{C_\varepsilon} f(z)dz.$$

令 $R\to\infty, \varepsilon\to 0$. 上式左边按照留数定理应为 $2\pi i\{f(z)$ 在有限远各奇点留数之和}。右边第一个积分成为所求的 I，第三个积分则成为 $-e^{i2\pi\alpha}I$. 可以证明第二个和第四个积分则成为零。事实上，

$$\left|\int_{C_R}\frac{z^{\alpha-1}}{1+z}dz\right|=\left|\int_{C_R}\frac{z^\alpha}{1+z}\frac{dz}{z}\right|\leqslant\max_{(C_R\text{上})}\left|\frac{z^\alpha}{1+z}\right|\frac{\int|dz|}{|z|}$$

$$=\max\frac{R^\alpha}{|1+z|}\cdot\frac{2\pi R}{R}=2\pi\cdot\max\frac{R^\alpha}{|1+z|}$$

$$\sim 2\pi\frac{1}{R^{1-\alpha}}\to 0\quad(\text{于 } R\to\infty).$$

$$\left|\int_{C_\varepsilon}\frac{z^{\alpha-1}}{1+z}dz\right|=\left|\int_{C_\varepsilon}\frac{z^\alpha}{1+z}\frac{dz}{z}\right|\leqslant\max_{(C_\varepsilon\text{上})}\left|\frac{z^\alpha}{1+z}\right|\frac{\int|dz|}{|z|}$$

$$=\max\frac{\varepsilon^\alpha}{|1+z|}\cdot\frac{2\pi\varepsilon}{\varepsilon}=2\pi\max\frac{\varepsilon^\alpha}{|1+z|}$$

$$\sim 2\pi\frac{\varepsilon^\alpha}{1}\to 0\quad(\text{于 } \varepsilon\to 0).$$

于是

$$(1-e^{i2\pi\alpha})I=2\pi i\{f(z)\text{在有限远各奇点留数之和}\}.$$

$f(z)=z^{\alpha-1}(1+z)^{-1}$ 只有一个单极点 $z_0=-1$，而

$$\text{Res}f(-1)=\lim_{z\to-1}[(z+1)f(z)]=\lim_{z\to-1}[z^{\alpha-1}]=(-1)^{\alpha-1}.$$

因此，

$$I=\frac{2\pi i(-1)^{\alpha-1}}{1-e^{i2\pi\alpha}}=\frac{2\pi i(-1)^{\alpha-1}}{e^{i\pi\alpha}(e^{-i\pi\alpha}-e^{i\pi\alpha})}=\frac{2\pi i(-1)^{\alpha-1}}{(-1)^\alpha(e^{-i\pi\alpha}-e^{i\pi\alpha})}$$

$$=\frac{2\pi i}{2i\sin\pi\alpha}=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}.$$

例 2 计算定积分 $I=\int_0^\infty\frac{x^{\alpha-1}}{1-x}dx\quad(0<\alpha<1)$.

解 本例 $f(z)=z^{\alpha-1}/(1-z)$，它不仅有两个支点：原点和无

限远点，而且在实轴上有单极点 $z_0=+1$. 这样，不能用图 17 的回路，应取绕开单极点的回路 l 如图 18 所示，半圆 K_1 和 K_2 以 $+1$ 为圆心而半径为 δ.

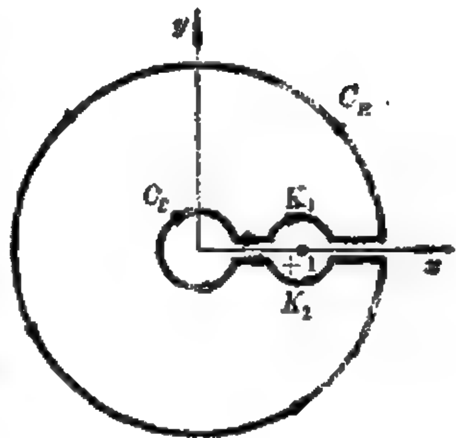


图 18

令 $R\to\infty$, $\varepsilon\to 0$, $\delta\to 0$. 沿割线上岸直线段的积分成为所求的 I，沿割线下岸直线段的积分则成为 $-e^{i2\pi\alpha}I$. 跟例 1 一样，可以证明 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz=0$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon} f(z)dz=0$. 于是，

$$(1-e^{i2\pi\alpha})I+\lim_{\delta\to 0}\left\{\int_{K_1} f(z)dz+\int_{K_2} f(z)dz\right\}$$
$$=2\pi i\{f(z)\text{在正实轴以外有限远奇点留数和}\}.$$

但是 $f(z)$ 除了正实轴上的 $+1$ 以外并没有奇点，所以

$$(1-e^{i2\pi\alpha})I+\lim_{\delta\to 0}\left\{\int_{K_1} f(z)dz+\int_{K_2} f(z)dz\right\}=0.$$

仿照上节例 8 关于 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon}\frac{1}{z}e^{iz}dz$ 的计算，可得

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{K_1} f(z)dz=\pi i,\quad \lim_{\delta\to 0}\int_{K_2} f(z)dz=\pi i e^{i2\pi\alpha}.$$

于是

$$I=\frac{-\pi i(1+e^{i2\pi\alpha})}{1-e^{i2\pi\alpha}}=-\pi i\frac{e^{-i\pi\alpha}+e^{i\pi\alpha}}{e^{-i\pi\alpha}-e^{i\pi\alpha}}=\pi\frac{\cos\pi\alpha}{\sin\pi\alpha}=\pi\operatorname{ctg}\pi\alpha.$$

例 3　计算 $I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\alpha x}}{1+e^x}dx$ $(0<\alpha<1)$.

解　本例有些像上节类型二的定积分，但本例的 $f(z)=\frac{e^{\alpha z}}{1+e^z}$

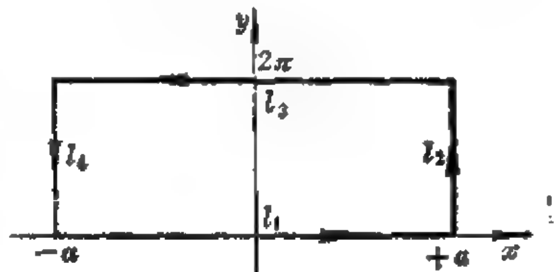


图 19

在上半平面有无限多个单极点 $i(2k+1)\pi$(k 为正整数)，所以不能用上节类型二的方法计算。

注意到 $f(z+2\pi i)=e^{i2\pi a}f(z)$，选取图 19 的回路 l，

$$\oint_l f(z)dz=\int_{-a}^{a}\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx+\int_{l_1}f(z)dz+e^{i2\pi a}\int_a^{-a}\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx$$

$$+\int_{l_2}f(z)dz.$$

令 $a\to\infty$，上式左边按照留数定理应等于$2\pi i\{f(z)$在 $0<\mathrm{Im}z<2\pi$ 范围内的各奇点的留数之和}。在这范围内，$f(z)=e^{az}/(1+e^z)$只有一个单极点 πi，而

$$\mathrm{Res}f(\pi i)=\lim_{z\to\pi i}\left[\frac{e^{az}(z-\pi i)}{1+e^z}\right]=e^{i\pi a}\lim_{z\to\pi i}\frac{z-\pi i}{1+e^z},$$

运用罗毕达法则，得

$$\mathrm{Res}f(\pi i)=e^{i\pi a}\lim_{z\to\pi i}\frac{1}{e^z}=-e^{i\pi a}.$$

至于右边第一和第三这两个积分则成为 I 和 $-e^{i2\pi a}I$。不难验证第二个和第四个积分成为零：

$$\left|\int_{l_1}\frac{e^{az}}{1+e^z}dz\right|=\left|\int_0^{2\pi}\frac{e^{a(a+iy)}}{1+e^{(a+iy)}}dy\right|\leqslant\frac{e^{aa}}{e^a-1}\left|\int dy\right|\sim\frac{e^{aa}}{e^a}2\pi\to0$$

(于 $a\to\infty$)，

$$\left|\int_{l_2}\frac{e^{az}}{1+e^z}dz\right|=\left|\int_{2\pi}^{0}\frac{e^{-aa-iay}}{1+e^{-a-iy}}dy\right|\leqslant\frac{e^{-aa}}{1-e^{-a}}2\pi\sim\frac{e^{-aa}}{1}2\pi\to0$$

(于 $a\to\infty$)。

于是，

$$(1-e^{i2\pi a})I=2\pi i(-e^{i\pi a}),$$

$$I=\frac{2\pi ie^{i\pi a}}{e^{i2\pi a}-1}=\frac{2\pi i}{e^{i\pi a}-e^{-i\pi a}}=\frac{\pi}{\sin\pi a}.$$

例 4 计算菲涅耳积分

$$I_1=\int_0^\infty\sin(x^2)dx\quad 和\quad I_2=\int_0^\infty\cos(x^2)dx.$$

这两个积分出现于光在锋利刀刃边缘的衍射问题中。

解 由于 $\sin(x^2)=\mathrm{Im}\,e^{ix^2}$，而 $\cos(x^2)=\mathrm{Re}\,e^{ix^2}$，所以

$$I_2+iI_1=\int_0^\infty e^{ix^2}dx.$$

取图 20 所示回路 l。由于 e^{iz^2} 没有有限远奇点，所以根据留数定理得

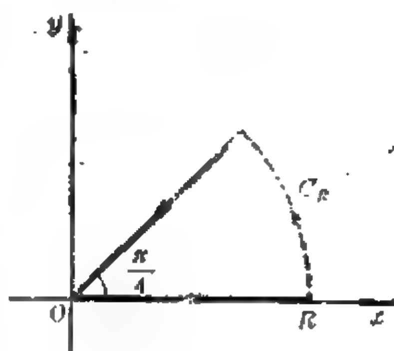


图 20

$$\oint_l e^{iz^2}dz=0,$$

即
$$\int_0^R e^{ix^2}dx+\int_{C_R}e^{iz^2}dz+\int_R^0 e^{i(\rho e^{i\pi/4})^2}d(\rho e^{i\pi/4})=0,$$

令 $R\to\infty$。第一个积分即所求的 I_2+iI_1。第三个积分不难如下算出：

$$\lim_{R\to\infty}\int_R^0 e^{i(\rho^2 i)}e^{i\pi/4}d\rho=\lim_{R\to\infty}(-e^{i\pi/4})\int_0^R e^{-\rho^2}d\rho=-e^{i\pi/4}\int_0^\infty e^{-\rho^2}d\rho$$

$$=-\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{i\pi/4}=-(1+i)\sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

可以证明第二个积分成为零。为此，先作一次分部积分，

$$\int_{C_R}e^{iz^2}dz=\frac{e^{iz^2}}{2iz}\Bigg|_{z=R}^{Re^{i\pi/4}}+\int_{C_R}e^{iz^2}\frac{dz}{2iz^2},$$

其中已积出部分的模

$$\left|\frac{e^{-R^2}}{2iRe^{i\pi/4}}-\frac{e^{iR^2}}{2iR}\right|\leqslant\frac{e^{-R^2}}{2R}+\frac{1}{2R}\to 0\quad(\text{于 }R\to\infty),$$

未积出部分的模

$$\left|\int_{C_R}\frac{e^{iz^2}}{2iz^2}dz\right|=\left|\int_{C_R}\frac{e^{-R^2\sin2\varphi+iR^2\cos2\varphi}}{2iR^2e^{i2\varphi}}Re^{i\varphi}id\varphi\right|$$

$$\leqslant\int_{C_R}\frac{e^{-R^2\sin2\varphi}}{2R^2}Rd\varphi\leqslant\max\left(\frac{e^{-R^2\sin2\varphi}}{2R}\right)\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{1}{2R}\frac{\pi}{4}\to 0\quad(\text{于 }R\to\infty).$$

于是

$$I_2+iI_1-\sqrt{\frac{\pi}{8}}(1+i)=0,$$

即 $$I_1=\sqrt{\frac{\pi}{8}},\qquad I_2=\sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

§19. 辐角原理

函数 $f(z)$ 的对数 $\ln f(z)$ 的导数 $f'(z)/f(z)$ 叫作函数 $f(z)$ 的对数导数。对数导数的留数叫作对数留数。

设点 z_0 是函数 $f(z)$ 的 m 阶极点，

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m},$$

$\varphi(z)$ 在 z_0 的邻域上是解析函数，且 $\varphi(z_0)\neq0$. 于是，

$$f'(z)=\frac{\varphi'(z)}{(z-z_0)^m}-\frac{m\varphi(z)}{(z-z_0)^{m+1}},$$

而对数导数

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=-\frac{m}{z-z_0}+\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}=-\frac{m}{z-z_0}+\text{解析部分}$$

以 z_0 为一阶极点，对数留数为 $-m$.

设 z_0 是 $f(z)$ 的 n 级零点，

$$f(z)=(z-z_0)^n\varphi(z),$$

$\varphi(z)$ 在 z_0 的邻域上是解析函数，且 $\varphi(z_0)\neq0$. 于是，

$$f'(z)=n(z-z_0)^{n-1}\varphi(z)+(z-z_0)^n\varphi'(z),$$

而对数导数

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{n}{z-z_0}+\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$$

$$=\frac{n}{z-z_0}+\text{解析部分}$$

以 z_0 为一阶极点，对数留数为 $+n$.

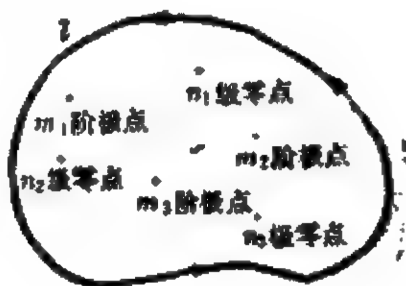


图 21

把留数定理应用于对数导数 $f'(z)/f(z)$（图 21），

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{f'(z)}{f(z)}dz = l\text{所围区域中的对数留数之和}$$

$$= \sum_j n_j - \sum_k m_k = l\text{所围零点个数}-\text{极点个数},$$

其中 n_j 级零点算作 n_j 个单零点，m_k 阶极点算作 m_k 个单极点。

上式左边的积分有很简单的几何意义。事实上，$f'(z)/f(z)$ 的不定积分是 $\ln f(z)$，所以

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\{z\text{ 沿 }l\text{ 绕一圈的过程中}\ln f(z)\text{的改变量 }\Delta\ln f(z)\}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\Delta\{\ln|f(z)| + i\arg f(z)\} = \frac{1}{2\pi i}\Delta\{i\arg f(z)\} = \frac{1}{2\pi}\Delta\arg f(z).$$

因此，z 沿 l 绕一圈的过程中，$f(z)$ 的辐角改变量除以 2π 就等于 l 所围零点个数减去极点个数。这叫作**辐角原理**。

辐角原理可供研究有关零点个数问题，例如代数学基本定理（n 次代数方程在复数领域里必有 n 个根）。

先说**儒歇定理**　如 $f(z)$ 与 $\varphi(z)$ 在闭区域 B 上是解析的，且在境界线 l 上满足 $|\varphi(z)|<|f(z)|$，则函数 $f(z)$ 与 $f(z)+\varphi(z)$ 在区域 B 中的零点个数相同。

证　按照辐角原理，我们只需比较 $\Delta\arg\{f(z)+\varphi(z)\}$ 与 $\Delta\arg\{f(z)\}$。两者的差是

$$\Delta\arg\{f(z)+\varphi(z)\} - \Delta\arg f(z) = \Delta\arg\left\{\frac{f(z)+\varphi(z)}{f(z)}\right\}$$

$$= \Delta\arg\left\{1+\frac{\varphi(z)}{f(z)}\right\}.$$

既然在 l 上 $|\varphi(z)|<|f(z)|$，即 $|\varphi(z)/f(z)|<1$，可见 $\zeta(z)\equiv 1+\varphi(z)/f(z)$ 不会越出以 $+1$ 为圆心而半径为 1 的圆（图 22 的虚线圆），从而不会绕过原点。这是说，ζ 运行一周的辐角改变量为零。因此，

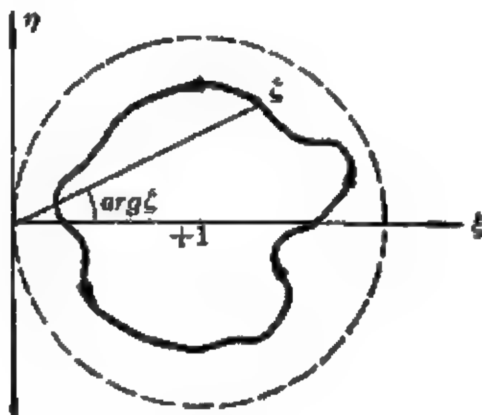


图　22

$$\Delta\arg\{f(z)+\varphi(z)\} - \Delta\arg\{f(z)\} = 0,$$

函数 $f(z)$ 与 $f(z)+\varphi(z)$ 在区域 B 中的零点个数相同。

现在再说**代数学基本定理** 任一n次多项式

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

在复数z平面上必有n个零点。

证 令$f(z)=a_n z^n$，它以$z=0$为n级零点。又令$\varphi(z)=a_{n-1}z^{n-1}+a_{n-2}z^{n-2}+\cdots+a_1 z+a_0$，则$f(z)+\varphi(z)$即定理中所说的$n$次多项式。

在复数z平面上，以原点为圆心作一个半径R很大的圆。在圆周l上，$|\varphi(z)|$是R^{n-1}的数量级，$|f(z)|$是R^n的数量级，显然有$|\varphi(z)|<|f(z)|$，根据儒歇定理，$f(z)+\varphi(z)$跟$f(z)$具有同样多零点即n个零点。

第五章 拉普拉斯变换

§20. 符号法

运算微积的原始形式是符号法。

函数 $\varphi(t)$ 的 n 阶导数可看成求导算符 $p=\frac{d}{dt}$ 在函数 $\varphi(t)$ 上作用 n 次的结果，$p^n\varphi(t)=\frac{d^n}{dt^n}\varphi(t)$. 算符 p 的"倒数"$\frac{1}{p}$ 则解释为积分算符，$\frac{1}{p}\varphi(t)=\int_0^t\varphi(\tau)d\tau$。例如，$\frac{1}{p}1=\int_0^t 1d\tau=t$，$\frac{1}{p^2}1=\int_0^t\int_0^{\tau_1}1d\tau d\tau_1=\frac{1}{2}t^2$，
依此类推，

$$\frac{1}{p^n}1=\frac{1}{n!}t^n. \tag{20.1}$$

无线电工程师亥维赛把符号法应用于求解线性微分方程，从而大大促进了符号法的应用。例如，电阻 R 和自感 L 串联电路微分方程是 $Ldj/dt+Rj=E$, 即

$$\left(L\frac{d}{dt}+R\right)j=E. \tag{20.2}$$

亥维赛把(20.2)改写为

$$j=\frac{E}{Lp+R}1. \tag{20.3}$$

算符 p 出现在分母中，是没有什么意义的。(20.3) 最多只能当作"j 是微分方程(20.2)的解"这句话的缩写。但是亥维赛竟把(20.3)的分式展开为级数并逐项应用(20.1)，

$$j=\frac{E}{Lp+R}1=\frac{E}{Lp}\cdot\frac{1}{1+\frac{R}{L}\frac{1}{p}}1=\frac{E}{Lp}\left(1+\frac{R}{L}\frac{1}{p}\right)^{-1}1$$

$$=\frac{E}{Lp}\left\{1-\frac{R}{L}\frac{1}{p}+\frac{R^2}{L^2}\frac{1}{p^2}-\frac{R^3}{L^3}\frac{1}{p^3}+\cdots\right\}1$$

$$=\frac{E}{R}\left\{\frac{R}{L}\frac{1}{p}-\frac{R^2}{L^2}\frac{1}{p^2}+\frac{R^3}{L^3}\frac{1}{p^3}-\frac{R^4}{L^4}\frac{1}{p^4}+\cdots\right\}1$$

$$=\frac{E}{R}\left\{\frac{R}{L}t-\frac{R^2}{L^2}\frac{t^2}{2!}+\frac{R^3}{L^3}\frac{t^3}{3!}-\frac{R^4}{L^4}\frac{t^4}{4!}+\cdots\right\}=\frac{E}{R}\{1-e^{-(R/L)t}\}.$$

他就这样解出了微分方程。

作为无线电工程师，亥维赛不怎么考虑数学的谨严，他取得的成绩使当时的数学家大为吃惊。但是，亥维赛也作出了一系列计算错误，后来由杰弗莱斯指出乃是没有注意到 p 与 $1/p$ 的次序不可交换，

$$\frac{1}{p}pf(t)=\int_0^t d\tau f'(\tau)=f(t)-f(0),$$

$$p\frac{1}{p}f(t)=\frac{d}{dt}\int_0^t d\tau f(\tau)=f(t).$$

后来，人们发现了符号法跟拉普拉斯变换的联系，符号法才脱离了粗糙的形式而建立在拉普拉斯变换的基础上，通常把它改称为**运算微积**。在运算微积中，字母 p 不再解释为算符，而是代表一个复变数。

§21. 拉普拉斯变换

研究某个电路，这是说，研究电路中任一元件所通过的电流 j、元件两端的电压 v 或任一电容上的带电量 Q 随着时间 t 而变化的情况 $j(t)$，$v(t)$ 或 $Q(t)$。这里，作为这些函数的宗量的时间 t 受到一定的限制。这是因为，如果把电路接通的瞬间作为计算时间的原点 $t=0$，那么，问题就在于从这些函数在 $t=0$ 的数值即初始值出发，研究它们在 $t>0$（电路接通以后）的变化情况。至于这些函数在 $t<0$（电路接通以前）的值完全可以弃置不顾，或者认为是零。像这种带初始条件的问题，在物理学中是很多的。总之，常常遇到这样的函数

$$\varphi(t)\quad (\text{限于 } 0\leqslant t<\infty), \tag{21.1}$$

或者约定

$$\varphi(t)=0\quad (t<0). \tag{21.2}$$

设已给某个符合(21.1)或(21.2)的函数 $\varphi(t)$，如果反常积分（上限为∞）

$$\int_0^\infty e^{-pt}\varphi(t)dt$$

在复数 p 平面的某一区域上是收敛的，我们就把它解析延拓到全平面，并称它为 $\varphi(t)$ 的拉普拉斯变换函数或（拉普拉斯变换的）像函数，记作 $\overline{\varphi}(p)$，

$$\overline{\varphi}(p)=\int_0^\infty e^{-pt}\varphi(t)\,dt。\qquad(21.3)$$

$\varphi(t)$ 则叫作 $\overline{\varphi}(p)$ 的（拉普拉斯变换的）原函数。"$\varphi(t)$ 的像函数是 $\overline{\varphi}(p)$"即"$\overline{\varphi}(p)$ 的原函数是 $\varphi(t)$"可缩写为

$$\varphi(t)\risingdotseq\overline{\varphi}(p)\quad 即\quad \overline{\varphi}(p)\fallingdotseq\varphi(t)，$$

注意点号的位置。靠近原函数的一边是点号在上，靠近像函数的一边是点号在下。

不难验证，只要在 $t\to\infty$ 的过程中，$|\varphi(t)|$ 顶多按指数式增长，即 $|\varphi(t)|$ 顶多为 e^{s_0t}（s_0 为某个有限的实数）的数量级，总可以选取 Rep 为足够大的正数使定义(21.3)的积分收敛，从而存在像函数 $\overline{\varphi}(p)$．事实上，

$$\int_0^\infty e^{-pt}\varphi(t)\,dt\sim\int_0^\infty e^{-(p-s_0)t}\,dt=\frac{1}{p-s_0}[1-\lim_{t\to\infty}e^{-(p-s_0)t}]，$$

而在 Re$p>s_0$ 的半平面上，

$$\lim_{t\to\infty}e^{-(p-s_0)t}=\lim_{t\to\infty}e^{-(\mathrm{Re}p-s_0)t}e^{-i(\mathrm{Im}p)t}=0。$$

于是

$$\overline{\varphi}(p)=\int_0^\infty e^{-pt}\varphi(t)\,dt\sim\frac{1}{p-s_0}，\qquad(21.4)$$

反常积分果然是收敛的。

下面具体计算几个像函数。

例如原函数 $\varphi(t)=1$．在 Re$p>0$ 的半平面上，有

$$\int_0^\infty e^{-pt}1\,dt=\frac{1}{p}。$$

所以

$$1 \doteq \frac{1}{p}, \qquad \frac{1}{p} \doteq 1. \tag{21.5}$$

又如原函数 $\varphi(t)=t$. 在 $\mathrm{Re}p>0$ 的半平面上，有

$$\int_0^\infty e^{-pt}t\,dt = -\frac{1}{p}\int_0^\infty t\,de^{-pt} = \left[-\frac{1}{p}te^{-pt}\right]_0^\infty + \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-pt}dt = \frac{1}{p^2}.$$

所以

$$t \doteq \frac{1}{p^2}, \qquad \frac{1}{p^2} \doteq t.$$

同理，

$$t^n \doteq n!\frac{1}{p^{n+1}}, \qquad \frac{1}{p^{n+1}} \doteq \frac{1}{n!}t^n. \tag{21.6}$$

例如原函数 $\varphi(t)=e^{st}$(s 为某个实数)。在 $\mathrm{Re}p>s$ 的半平面上，有

$$\int_0^\infty e^{-pt}e^{st}dt = \int_0^\infty e^{-(p-s)t}dt = \frac{1}{p-s}.$$

所以

$$e^{st} \doteq \frac{1}{p-s}, \qquad \frac{1}{p-s} \doteq e^{st}. \tag{21.7}$$

又如原函数 $\varphi(t)=te^{st}$。在 $\mathrm{Re}p>s$ 的半平面上，有

$$\int_0^\infty e^{-pt}e^{st}t\,dt = -\frac{1}{p-s}\int_0^\infty t\,de^{-(p-s)t} = \left[-\frac{1}{p-s}te^{-(p-s)t}\right]_0^\infty$$
$$+\frac{1}{p-s}\int_0^\infty e^{-(p-s)t}dt = \frac{1}{(p-s)^2}$$

所以

$$te^{st} \doteq \frac{1}{(p-s)^2}, \qquad \frac{1}{(p-s)^2} \doteq te^{st}.$$

同理，

$$t^n e^{st} \doteq n!\frac{1}{(p-s)^{n+1}}, \qquad \frac{1}{(p-s)^{n+1}} \doteq \frac{1}{n!}t^n e^{st}. \tag{21.8}$$

应当指出，由于约定(21.2)，公式(21.5)里的原函数 1 应理解为阶跃函数(又叫亥维赛单位函数)

$$H(t)=\begin{cases}1 & (t>0),\\ 0 & (t<0).\end{cases} \tag{21.9}$$

其它公式里的原函数 $f(t)$ 也都应该理解为 $f(t)H(t)$。

拉普拉斯变换的定义(21.3)对于 $\varphi(t)$ 是线性的，所以

$$C_1\varphi_1(t)+C_2\varphi_2(t)\risingdotseq C_1\overline{\varphi}_1(p)+C_2\overline{\varphi}_2(p). \tag{21.10}$$

例如 $\sin\omega t=(e^{i\omega t}-e^{-i\omega t})/2i$，而 $e^{i\omega t}$ 和 $e^{-i\omega t}$ 的像函数按照(21.7)分别是 $1/(p-i\omega)$ 和 $1/(p+i\omega)$，于是应用(21.10)即得

$$\sin\omega t\risingdotseq\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\omega}-\frac{1}{p+i\omega}\right)=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}. \tag{21.11}$$

同理，

$$\cos\omega t\risingdotseq\frac{p}{p^2+\omega^2}. \tag{21.12}$$

本书附录一是拉普拉斯变换函数简表，可以查出像函数。还有专门的拉普拉斯变换函数手册(例如 B. A. 季特金等《运算微积手册》，张燮译，科学出版社，1958)，十分详细，查找像函数很是方便。不过，有些手册所列的像函数并不是拉普拉斯变换函数 $\overline{\varphi}(p)$，而是拉普拉斯-卡孙变换函数 $p\overline{\varphi}(p)$。这点务必注意，以免发生差错。

现在研究导数和积分式的拉普拉斯变换。

先看导数 $d\varphi/dt$ 的拉普拉斯变换像函数，

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dt}&\risingdotseq\int_0^\infty e^{-pt}\frac{d\varphi}{dt}dt=\int_0^\infty e^{-pt}d\varphi=[\varphi(t)e^{-pt}]_0^\infty+p\int_0^\infty\varphi(t)e^{-pt}dt\\ &=\lim_{t\to\infty}\varphi(t)e^{-pt}-\varphi(0)+p\overline{\varphi}(p).\end{aligned}$$

选取 $\operatorname{Re}p$ 为足够大的正数可使

$$\lim_{t\to\infty}\varphi(t)e^{-pt}=0,$$

于是

$$\frac{d\varphi}{dt} \doteq p\bar{\varphi}(p) - \varphi(0). \qquad (21.13)$$

对于 $\varphi(0)=0$ 的特例，(21.13)简化为

$$\frac{d\varphi}{dt} \doteq p\bar{\varphi}(p). \qquad (21.14)$$

可以把(21.13)推广到高阶导数。只要能够使 $\lim_{t\to\infty} e^{-pt}\varphi^{(i)}(t)=0\ (i=0,1,2,\cdots,n-1)$，就有

$$\varphi^{(n)}(t) \doteq p^n\bar{\varphi}(p) - p^{n-1}\varphi(0) - p^{n-2}\varphi'(0) - \cdots - p\varphi^{(n-2)}(0) - \varphi^{(n-1)}(0). \qquad (21.15)$$

再看积分式

$$\varphi(t) = \int_0^t \psi(\tau)d\tau \qquad (21.16)$$

的拉普拉斯变换函数。从(21.13)知道

$$\bar{\psi}(p) = p\bar{\varphi}(p) - \varphi(0),$$

其中 $\varphi(0)=\int_0^0 \psi(\tau)d\tau=0$，因而

$$\bar{\varphi}(p) = \frac{1}{p}\bar{\psi}(p),$$

即

$$\int_0^t \psi(\tau)d\tau \doteq \frac{1}{p}\bar{\psi}(p). \qquad (21.17)$$

公式(21.14)和(21.17)使人自然联想到上节的求导算符 p 和积分算符 $1/p$. 事实上，如果考虑拉普拉斯-卡孙变换像函数 $\overline{\Phi}(p)=p\bar{\varphi}(p)$，(21.14)和(21.17)仍然成立，而且(21.5)和(21.6)应改写为

$$1 \doteq 1, \quad t \doteq \frac{1}{p}, \quad t^n \doteq n!\frac{1}{p^n},$$

跟(20.1)何等相似！本节复变数 p 跟上节求导算符 p 的联系就很明显了。不过，话也要说回来，(21.14)只对 $\varphi(0)=0$ 的特例适用，在一般情况下应该用(21.13)而不是(21.14)。

从(21.13)—(21.15)和(21.17)来看，在原函数领域里的求导和积分等运算，反映到像函数领域里仅仅是代数运算。这就是说，对常微分方程、积分方程以及积分微分方程施行拉普拉斯变换，将得到代数方程。

例 1 常微分方程及其初始条件

$$\begin{cases}\dfrac{d^2y}{dt^2}+a\dfrac{dy}{dt}+by=f(t),\\ y(0)=k_1,\quad y'(0)=k_2.\end{cases}$$

对方程的每一项施行拉普拉斯变换（即各乘以 e^{-pt} 并对 t 从 0 到 ∞ 积分），就得到像函数 $\bar{y}(p)$ 的代数方程

$$[p^2\bar{y}(p)-pk_1-k_2]+[ap\bar{y}(p)-ak_1]+b\bar{y}(p)=\bar{f}(p),$$

即 $$(p^2+ap+b)\bar{y}(p)-(p+a)k_1-k_2=\bar{f}(p).$$

例 2 联立常系数常微分方程组及其初始条件

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dt}+a_1y+b_1\dfrac{dz}{dt}+c_1z=f_1(t),\\ \dfrac{dy}{dt}+a_2y+b_2\dfrac{dz}{dt}+c_2z=f_2(t);\end{cases}\qquad \begin{cases}y(0)=k_1,\\ z(0)=k_2.\end{cases}$$

对方程的每一项施行拉普拉斯变换，就得到像函数 $\bar{y}(p)$和 $\bar{z}(p)$联立代数方程组

$$\begin{cases}p\bar{y}(p)-k_1+a_1\bar{y}(p)+b_1p\bar{z}(p)-b_1k_2+c_1\bar{z}(p)=\bar{f}_1(p),\\ p\bar{y}(p)-k_1+a_2\bar{y}(p)+b_2p\bar{z}(p)-b_2k_2+c_2\bar{z}(p)=\bar{f}_2(p).\end{cases}$$

例 3 通过电阻 R 和自感 L 对电容器 C 充电，充电电流 $j(t)$ 满足积分微分方程

$$L\frac{dj}{dt}+Rj+\frac{1}{C}\int_0^t j(\tau)d\tau=E(t),\quad j(0)=0.$$

对方程的每一项施行拉普拉斯变换，就得到像函数 $\bar{j}(p)$ 的代数方程

$$pL\bar{j}(p)+R\bar{j}(p)+\frac{1}{p}\frac{1}{C}\bar{j}(p)=\bar{E}(p).$$

这些例题表明，施行拉普拉斯变换，可把常微分方程、积分方程以及积分微分方程转化为代数方程。在转化过程中，初始条件也考虑到了。转化后的方程(以像函数为未知函数)比原来的方程容易解得多。在解出像函数之后，如能找到它的原函数，那就是原来的方程的解。从像函数找原函数叫作反演，反演问题在下节讨论。

例1—例3中的方程都是常系数的。下面再举一个变系数方程作为例子。为此，需要补充一个公式。回到拉普拉斯变换像函数的定义(21.3)即 $\overline{\varphi}(p)=\int_0^\infty e^{-pt}\varphi(t)dt$。两边分别对 p 求导，$d\overline{\varphi}/dp=\int_0^\infty e^{-pt}(-t)\varphi(t)dt$。这是说，

$$t\varphi(t)\risingdotseq(-1)\frac{d}{dp}\overline{\varphi}(p).$$

依此类推，

$$t^n\varphi(t)\risingdotseq(-1)^n\frac{d^n}{dp^n}\overline{\varphi}(p). \qquad (21.18)$$

例4 常微分方程以及初始条件

$$\begin{cases} t\dfrac{d^2y}{dt^2}+(1-n)\dfrac{dy}{dt}+y=0, \\ y(0)=0, \quad \left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=0}=0. \end{cases}$$

应用(21.15)和(21.18)，对方程的每一项施行拉普拉斯变换，就得到像函数 $\overline{y}(p)$ 的方程

$$-\frac{d}{dp}[p^2\overline{y}(p)]+(1-n)p\overline{y}(p)+\overline{y}(p)=0,$$

即
$$p^2\frac{d\overline{y}}{dp}+[(n+1)p-1]\overline{y}=0.$$

这虽然仍是微分方程，但它是一阶的，不像原来的方程是二阶的。一阶微分方程比二阶的容易解。

习　　题

1. 求下列函数的拉普拉斯变换函数。

(1) $\mathrm{sh}\omega t$, $\mathrm{ch}\omega t$,

(2) $e^{-\lambda t}\sin\omega t$, $e^{-\lambda t}\cos\omega t$,　　(3) $\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}$.

2. 对下列常微分方程施行拉普拉斯变换。

(1) $\dfrac{d^3y}{dt^3}+3\dfrac{d^2y}{dt^2}+3\dfrac{dy}{dt}+y=6e^{-t}$, $y(0)=\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=0}=\left.\dfrac{d^2y}{dt^2}\right|_{t=0}=0$.

(2) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+9y=30\mathrm{ch}t$, $y(0)=3$, $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=0}=0$.

(3) $\begin{cases}\dfrac{dy}{dt}+2y+2z=10e^{2t},\\ \dfrac{dz}{dt}-2y+z=7e^{2t};\end{cases}$　　$\begin{cases}y(0)=1,\\ z(0)=3.\end{cases}$

(4) $\dfrac{d^2y}{dt^2}-2\dfrac{dy}{dt}+y=t^2e^t$,　　$y(0)=\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=0}=0$.

(5) $\dfrac{dy_1}{dt}=-c_1y_1$, $\dfrac{dy_2}{dt}=c_1y_1-c_2y_2$, $\dfrac{dy_3}{dt}=c_2y_2-c_3y_3$, $\dfrac{dy_4}{dt}=c_3y_3$;

$y_1(0)=N_0$, $y_2(0)=y_3(0)=y_4(0)=0$.

(6) 厄密方程$\dfrac{d^2y}{dt^2}-2t\dfrac{dy}{dt}+\lambda y=0$.

(7) 拉盖尔方程$t\dfrac{d^2y}{dt^2}+(1-t)\dfrac{dy}{dt}+\lambda y=0$.

§ 22. 拉普拉斯变换的反演

上节例题表明，有不少方程在拉普拉斯变换下的像函数方程比较容易解。但是解出像函数后还必须进行反演，找到它的原函数，才是原来的方程的解。那么，怎样进行反演呢？

有理分式反演法　只要把有理分式分解为分项分式就可利用(21.5)—(21.8)，(21.11)，(21.12)和上节习题1(2)的答案进行反演，

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{p^{n+1}} \doteq \dfrac{1}{n!} t^n, \quad \dfrac{1}{(p-s)^{n+1}} \doteq \dfrac{1}{n!} t^n e^{st}, \\
\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2} \doteq \sin \omega t, \quad \dfrac{p}{p^2+\omega^2} \doteq \cos \omega t, \\
\dfrac{1}{ap^2+bp+c} \doteq \dfrac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} e^{-(b/2a)t} \sin \dfrac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a} t, \\
\dfrac{p+b/2a}{ap^2+bp+c} \doteq \dfrac{1}{a} e^{-(b/2a)t} \cos \dfrac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a} t.
\end{cases} \tag{22.1}
$$

从(22.1)知道，(1)如果有理分式的分母有$(n+1)$重的实根s，则原函数包含$t^n e^{st}$的项；对于正的s，这样的项随t指数式增长，而对于负的s，这样的项随t指数式衰减。如果这$n+1$重的实根s为零，则原函数含有幂函数t^n. (2)如果有理分式的分母有纯虚数的根$\pm i\omega$，则原函数含有振荡项$\sin\omega t$和$\cos\omega t$. (3)如果有理分式的分母有共轭复数的根$-\dfrac{b}{2a}\pm\dfrac{i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$，则原函数含有变幅度的振荡项$e^{-(b/2a)t}\sin\dfrac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}t$和$e^{-(b/2a)t}\cos\dfrac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}t$；对于正的$b/2a$，幅度的变化$e^{-(b/2a)t}$是指数式衰减。

例1 求$\bar{\varphi}(p)=\dfrac{p^3+2p^2-9p+36}{p^4-81}$的原函数。

解 先把分母分解因式，

$$p^4-81=(p^2-9)(p^2+9)=(p-3)(p+3)(p^2+9),$$

它有实根$+3$和-3以及纯虚数根$\pm i3$.

把$\bar{\varphi}(p)$这个有理分式分解为分项分式，

$$
\begin{aligned}
\bar{\varphi}(p)&=\frac{p^3+2p^2-9p+36}{(p-3)(p+3)(p^2+9)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+3}+\frac{p-1}{p^2+9}\\
&=\frac{1}{2}\,\frac{1}{p-3}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{p+3}+\frac{p}{p^2+9}-\frac{1}{3}\,\frac{3}{p^2+9}.
\end{aligned}
$$

应用(22.1)即得

$$\varphi(t)=\frac{1}{2}e^{3t}-\frac{1}{2}e^{-3t}+\cos 3t-\frac{1}{3}\sin 3t.$$

原函数含有指数式增长项 e^{3t}(对应于正根 3)，指数式衰减项 e^{-3t}(对应于负根 -3)以及振荡项 $\cos 3t$ 和 $\sin 3t$(对应于纯虚数根 $\pm i3$)。

查表法 用拉普拉斯变换函数表从像函数查原函数是很方便的。特别是在比较完备的拉普拉斯变换函数手册中，一般常见的像函数都可以查出原函数。

为了充分发挥手册的作用，应该掌握下面的定理。这是因为有些像函数虽然不能直接在手册中查到，但按照下面的定理加以变化就可以在手册中查到了。

延迟定理 如果 $\overline{\varphi}(p)\doteq\varphi(t)$，则 $e^{-\tau p}\overline{\varphi}(p)\doteq\varphi(t-\tau)$.

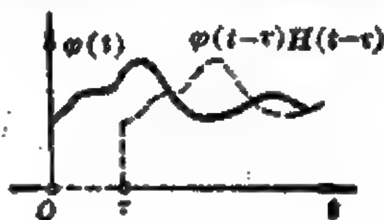


图 23

这是不难验证的。

$$\varphi(t-\tau)\doteq\int_0^\infty e^{-pt}\varphi(t-\tau)dt.$$

我们知道，原函数 $\varphi(t)$ 应理解为 $\varphi(t)H(t)$，因而上式里的 $\varphi(t-\tau)$ 应理解为 $\varphi(t-\tau)H(t-\tau)$，如图 23 的虚线所示，因而积分下限 0 可改为 τ，即

$$\varphi(t-\tau)\doteq\int_\tau^\infty e^{-pt}\varphi(t-\tau)dt.$$

改用 $\xi=t-\tau$ 代替 t 作为积分变数，则

$$\varphi(t-\tau)\doteq\int_0^\infty e^{-p(\xi+\tau)}\varphi(\xi)d\xi=e^{-p\tau}\int_0^\infty e^{-p\xi}\varphi(\xi)d\xi=e^{-p\tau}\overline{\varphi}(p).$$

这样，像函数的指数因子 $e^{-\tau p}$ 在查表时可以暂时抛开，查出原函数之后只要把 t 延迟为 $t-\tau$ 就行了。

例 2 求 $\dfrac{e^{-\tau p}}{\sqrt{p}}$ 的原函数。

解　暂时抛开因子 $e^{-\tau p}$，从本书附录一的第 12 式查得$1/\sqrt{p} \doteq 1/\sqrt{\pi t}$. 把原函数的 t 延迟为 $t-\tau$ 即得

$$\frac{e^{-\tau p}}{\sqrt{p}} \doteq \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}.$$

位移定理　如果 $\overline{\varphi}(p) \doteq \varphi(t)$，则 $\overline{\varphi}(p+\lambda) \doteq e^{-\lambda t}\varphi(t)$.

这也是不难验证的。

$$e^{-\lambda t}\varphi(t) \doteq \int_0^\infty e^{-pt}\left[e^{-\lambda t}\varphi(t)\right]dt = \int_0^\infty e^{-(p+\lambda)t}\varphi(t)\,dt.$$

拿最右边的积分跟 $\overline{\varphi}(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\varphi(t)\,dt$ 比较，可见它就是 $\overline{\varphi}(p+\lambda)$，因而

$$e^{-\lambda t}\varphi(t) \doteq \overline{\varphi}(p+\lambda).$$

公式(21.8)跟(21.6)的关系正是这个定理的例证。这样，查表时可以把 $\varphi(p+\lambda)$的 $p+\lambda$ 位移成为 p，查出原函数之后乘以因子 $e^{-\lambda t}$ 就行了。

例 3　求 $\dfrac{\omega}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$和$\dfrac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$的原函数。

解　把像函数里的 $p+\lambda$ 位移为 p，从(21.11)和(21.12)知

$$\frac{\omega}{p^2+\omega^2} \doteq \sin\omega t, \quad \frac{p}{p^2+\omega^2} \doteq \cos\omega t.$$

应用位移定理即得

$$\frac{\omega}{(p+\lambda)^2+\omega^2} \doteq e^{-\lambda t}\sin\omega t,$$

$$\frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2+\omega^2} \doteq e^{-\lambda t}\cos\omega t.$$

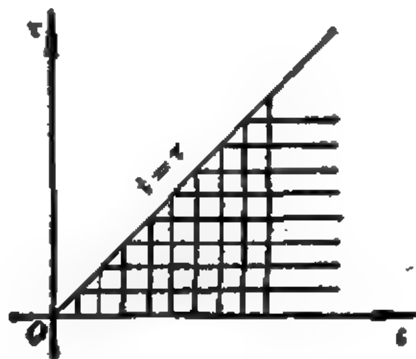


图 24

卷积定理(折积定理)　如果

$\overline{\varphi}_1(p) \doteq \varphi_1(t)$，$\overline{\varphi}_2(p) \doteq \varphi_2(t)$，

则$\overline{\varphi}_1(p)\overline{\varphi}_2(p) \doteq \int_0^t \varphi_1(\tau)\varphi_2(t-\tau)\,d\tau.$

这是一个很有用的定理。它可如下验证。

$$\int_0^t \varphi_1(\tau)\varphi_2(t-\tau)d\tau \doteq \int_0^\infty e^{-pt}dt\int_0^\infty \varphi_1(\tau)\varphi_2(t-\tau)d\tau.$$

右边是 $t\tau$ 平面上的二重积分，先对 τ 积分再对 t 积分，积分区域在图 24中划了线作为标记。现在改变积分次序，先对 t 积分再对 τ 积分。参照图24确定积分限，

$$\int_0^t \varphi_1(\tau)\varphi_2(t-\tau)d\tau \doteq \int_0^\infty \varphi_1(\tau)d\tau\int_\tau^\infty e^{-pt}\varphi_2(t-\tau)dt.$$

改用 $\xi = t-\tau$ 代替 t 作为积分变数，

$$\int_0^t \varphi_1(\tau)\varphi_2(t-\tau)d\tau \doteq \int_0^\infty \varphi_1(\tau)e^{-p\tau}d\tau\int_0^\infty e^{-p\xi}\varphi_2(\xi)d\xi$$

$$=\overline{\varphi}_1(p)\overline{\varphi}_2(p).$$

这样，如果像函数可表为两个因式的乘积，而且每个因式容易反演，那么乘积的原函数就可用卷积定理算出。

例 4 求 $\dfrac{e^{-ap}}{p(p+b)}$ 的原函数。

解 由(21.5)，$1/p \doteq H(t)$。应用延迟定理得 $e^{-ap}/p \doteq H(t-a)$。又由(21.7)，$1/(p+b) \doteq e^{-bt}$。

题给的像函数可看作 e^{-ap}/p 与 $1/(p+b)$ 的乘积，运用卷积定理即得

$$\frac{e^{-ap}}{p(p+b)} \doteq \int_0^t H(\tau-a)e^{-b(t-\tau)}d\tau = H(t-a)\int_a^t e^{-b(t-\tau)}d\tau$$

$$=H(t-a)\left[\frac{1}{b}e^{-b(t-\tau)}\right]_a^t = \frac{1}{b}[1-e^{-b(t-a)}]H(t-a).$$

里曼-梅林反演公式 这是从像函数求原函数的一般公式：

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\supset e^{tp}\overline{\varphi}(p)dp,$$

积分号右下角的$\supset$表示积分路径平行于复数 p 平面上的虚轴且在 $\overline{\varphi}(p)$ 所有奇点的右方，在$\supset$上的积分方向是自下而上。

证 取一个实数 a，它大于(21.4)里的 s_0，则在 P 平面的直线 $\mathrm{Re}p=a$ 的右边，$\overline{\varphi}(p)$ 是解析的，没有奇点。

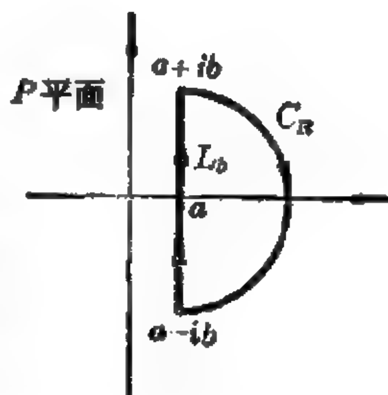


图 25

以原点为圆心作一个半径为 R 的圆弧 C_R，它跟直线 $\mathrm{Re}p=a$ 相交于 $a-ib$ 和 $a+ib$，如图 25 所示。图中还描出这段圆弧 C_R 跟直线 $\mathrm{Re}p=a$ 的一段 L_b 所构成的回路，并用箭头标明回路上的负方向。应用科希公式(9.4)，

$$\overline{\varphi}(p)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{a-ib}^{a+ib}\frac{\overline{\varphi}(\zeta)}{\zeta-p}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{\overline{\varphi}(\zeta)}{\zeta-p}d\zeta.$$

令 $R\to\infty$，从而 $b\to\infty$，上式成为

$$\overline{\varphi}(p)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\overline{\varphi}(\zeta)}{p-\zeta}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{\overline{\varphi}(\zeta)}{\zeta-p}d\zeta. \qquad (22.2)$$

这里将证明(22.2)右边第二项为零。事实上，利用(21.4)得

$$\left|\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{\overline{\varphi}(\zeta)}{\zeta-p}d\zeta\right|\sim\left|\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{d\zeta}{(\zeta-p)(\zeta-s_0)}\right|$$

$$\leqslant\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{d\zeta}{|\zeta-p|\cdot|\zeta-s_0|}\sim\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R^2}\int_{C_R}|d\zeta|=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R^2}R\pi=0.$$

于是(22.2)成为

$$\overline{\varphi}(p)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\overline{\varphi}(\zeta)}{p-\zeta}d\zeta. \qquad (22.3)$$

在(22.3)的两边同时取原函数。右边积分号下的 $1/(p-\zeta)$ 的原函数是 $e^{\zeta t}$，所以

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}e^{\zeta t}\overline{\varphi}(\zeta)d\zeta.$$

例 5 用里曼-梅林反演公式求 $1/\sqrt{p}$ 的原函数。

解 按照里曼-梅林反演公式

$$\frac{1}{\sqrt{p}}=\frac{1}{2\pi i}\int_{l}e^{pt}\frac{1}{\sqrt{p}}dp.$$

被积函数$1/\sqrt{p}$只有唯一的奇点$p=0$，这是极点型支点。沿负的实轴作切割，并作出两条积分路径如图26所示。因为在这两条路径所围区域上没有奇点，从科希定理知道

$$\int_{a-ib}^{a+ib}=\int_{C_R}+\int_{l_1}+\int_{l_2}+\int_{C_\varepsilon},$$

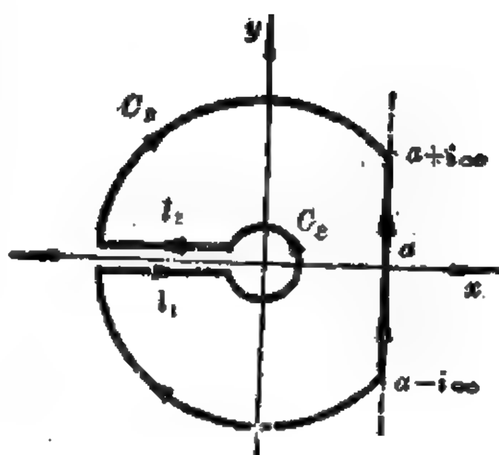


图 26

共中l_1和l_2分别沿着切割的下岸和上岸，C_R和C_ε则是以原点为圆心而半径分别是R和ε的圆。

令$R\to\infty$，用约当引理得$\int_{C_R}\to 0$．不难验证$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon}=0$．于是，

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}e^{pt}\frac{1}{\sqrt{p}}dp=\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{l_1}+\int_{l_2}\right)e^{pt}\frac{1}{\sqrt{p}}dp.$$

x在割线两岸l_1和l_2的辐角可分别定为$-\pi$和$+\pi$。这样，在l_1上，$\sqrt{x}=\sqrt{|x|}e^{-i\pi/2}=-i\sqrt{|x|}$；在$l_2$上，$\sqrt{x}=\sqrt{|x|}e^{i\pi/2}=i\sqrt{|x|}$。于是，

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{0}e^{xt}\frac{1}{-i\sqrt{|x|}}dx+\frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{-\infty}e^{xt}\frac{1}{i\sqrt{|x|}}dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}e^{xt}\frac{1}{\sqrt{|x|}}dx.$$

改用$y=\sqrt{|x|t}$作为积分变数，

$$\varphi(t)=\frac{1}{\pi}\int_{\infty}^{0}e^{-y^2}\frac{\sqrt{t}}{y}\left(-\frac{2y}{t}dy\right)$$

$$=\frac{2}{\pi\sqrt{t}}\int_0^\infty e^{-y^2}dy=\frac{2}{\pi\sqrt{t}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}.$$

习　　题

1. 把下列像函数反演。

(1) $\bar{y}(p)=\frac{6}{(p+1)^4}$,　　　(2) $\bar{y}(p)=\frac{3p}{p^2-1}$,

(3) $\bar{y}(p)=\frac{1}{p-2}$, $\bar{z}(p)=\frac{3}{p-2}$, (4) $\bar{y}(p)=\frac{2}{(p-1)^5}$.

2. 求 $\bar{j}(p)=\frac{Ep}{Lp^2+Rp+\frac{1}{c}}$的原函数。

3. 求$\bar{N}_4(p)=\frac{N_0c_1c_2c_3}{p(p+C_1)(p+C_2)(p+C_3)}$的原函数。

4. 求 $\bar{y}(p)=\lambda\mu\frac{p}{(p+C)^4}$的原函数。

5. 求 $\bar{j}(p)=\frac{E_0\omega}{(R+1/pc)(p^2+\omega^2)}$的原函数。

6. 求$\bar{T}(p)=A\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\frac{1}{p^2+\pi^2a^2/l^2}$的原函数。

7. 求 $\bar{T}(p)=\frac{1}{p^2+\omega^2a^2}\bar{g}(p)$的原函数，$\bar{g}(p)$ 是某个已知的 $g(t)$ 的像函数。

8. 求 $\bar{T}(p)=\frac{1}{p+\omega^2a^2}\bar{g}(p)$的原函数，$\bar{g}(p)$ 是某个已知的 $g(t)$ 的像函数。

9. 已知像函数 $\bar{y}(p)=e^{-p^2/4}p^{-(\lambda/2+1)}\int e^{p^2/4}p^{(\lambda/2+1)}\left(C_1+\frac{C_2}{p}\right)dp$, 其中$C_1$和 C_2 是两个任意常数。问 λ 应取怎样的数值才有可能选定 C_1 和 C_2 使原函数 $y(t)$为多项式？

10. 已知 $\bar{y}(p)=\frac{(p-1)^\lambda}{p^{\lambda+1}}$。问 λ 应取怎样的数值，原函数才是多项式？

11. 已知$\bar{X}(p)=F_0\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\frac{mp^2+k}{D(p)}$, 其中 $D(p)=(Mp^2+Rp+K+k)(mp^2+k)-k^2$, 而 $F_0, \omega, m, k, K, M, R$ 都是正的常数。试论证 $D(p)$ 没有正的根，也没有纯虚数根。在什么条件下，原函数 $X(t)$不含有稳定振荡的部分而只含有指数式衰减的部分或衰减振荡的部分？

12. 求下列像函数的原函数。

(1) $\bar{I}(p)=\frac{\pi}{2a}\frac{1}{p+a}$,　　(2) $\bar{I}(p)=\frac{\pi}{2p}$,

(3) $\bar{I}(p)=\frac{\pi}{2}\frac{1}{p(p+1)}$,　　(4) $\bar{I}(p)=\frac{\pi}{2p^2}$.

§ 23. 运算微积应用例

综合以上两节，用运算微积求解微分方程、积分方程的步骤可归纳为：(1)对方程施行拉普拉斯变换，这变换把初始条件也一并考虑了。(2)从变换后的方程解出像函数。(3)对求出的像函数进行反演，原函数就是原来的方程的解。

例 1 求解交流 RL 电路的方程

$$\begin{cases} L\frac{d}{dt}j+Rj=E_0\sin\omega t, \\ j(0)=0. \end{cases}$$

解 对方程施行拉普拉斯变换，

$$Lp\bar{j}+R\bar{j}=E_0\frac{\omega}{p^2+\omega^2}.$$

从变换后的方程容易解出

$$\bar{j}=\frac{E_0}{Lp+R}\frac{\omega}{p^2+\omega^2}=\frac{E_0}{L}\frac{1}{p+R/L}\frac{\omega}{p^2+\omega^2}.$$

最后是进行反演。由于

$$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\doteq\sin\omega t,\quad \frac{1}{p+R/L}\doteq e^{-(R/L)t},$$

引用卷积定理完成反演，

$$j(t)=\frac{E_0}{L}\int_0^t e^{-(R/L)(t-\tau)}\sin\omega\tau d\tau$$

$$=\frac{E_0}{L}\left\{e^{-(R/L)t}\left[e^{(R/L)\tau}\frac{(R/L)\sin\omega\tau-\omega\cos\omega\tau}{R^2/L^2+\omega^2}\right]_0^t\right\}$$

$$=\frac{E_0}{L}\frac{(R/L)\sin\omega t-\omega\cos\omega t}{R^2/L^2+\omega^2}+\frac{E_0}{L}\frac{\omega e^{-(R/L)t}}{R^2/L^2+\omega^2}$$

$$=\frac{E_0}{R^2+L^2\omega^2}(R\sin\omega t-\omega L\cos\omega t)+\frac{E_0\omega L}{R^2+L^2\omega^2}e^{-(R/L)t}.$$

所得结果的第一部分代表一个稳定的(幅度不变的)振荡，第二部分则是随时间而衰减的。

稳定振荡部分还可以如下改写:

$$\frac{E_0}{R^2+\omega^2L^2}(R\sin\omega t-\omega L\cos\omega t)$$

$$=\frac{E_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\left(\frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin\omega t-\frac{\omega L}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cos\omega t\right)$$

$$=\frac{E_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}(\cos\theta\sin\omega t-\sin\theta\cos\omega t)$$

$$=\frac{E_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin(\omega t-\theta),$$

其中

$$\theta=\arccos\frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}=\arcsin\frac{\omega L}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}.$$

电工学里常用的复数阻抗法或矢量法只给出这个形式的稳定振荡,没有考虑随时间衰减的部分。

例2 两个线圈(图 27) 具有相同的 R, L 和 C. 两线圈之间互感系数为 M. 在初级线路有直流电源,其电压为 E_0. 今接通初

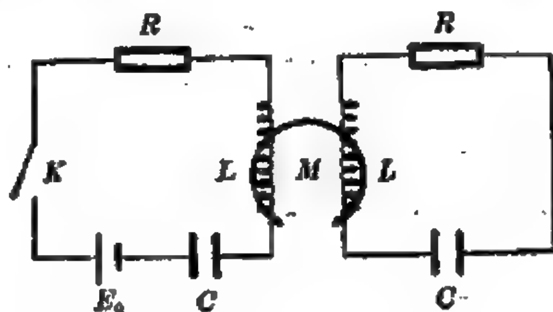


图 27

级线路中的电钥 K，问次级电路中的电流 j_2 的变化情况如何？

解 先写出电路方程，

$$\begin{cases} L\frac{d}{dt}j_1+Rj_1+\frac{1}{C}\int_0^t j_1dt+M\frac{d}{dt}j_2=E_0, \\ L\frac{d}{dt}j_2+Rj_2+\frac{1}{C}\int_0^t j_2dt+M\frac{d}{dt}j_1=0. \end{cases}$$

还有初始条件 $j_1(0)=0,\ j_2(0)=0.$

对方程施行拉普拉斯变换，

$$\begin{cases} \left(Lp+R+\frac{1}{Cp}\right)\bar{j}_1+Mp\bar{j}_2=\frac{E_0}{p}, \\ \left(Lp+R+\frac{1}{Cp}\right)\bar{j}_2+Mp\bar{j}_1=0. \end{cases}$$

从变换后的方程解出 $\bar{j}_2$，

$$\bar{j}_2=\frac{E_0Mp}{M^2p^4-\left(Lp^2+Rp+\frac{1}{C}\right)^2}.$$

把它分解为分项分式，

$$\bar{j}_2=\frac{E_0}{2}\left[\frac{1}{(L+M)p^2+Rp+\frac{1}{C}}-\frac{1}{(L-M)p^2+Rp+\frac{1}{C}}\right].$$

应用(22.1)的第三行进行反演，

$$j_2(t)=C_1e^{-\lambda_1t}\sin\omega_1t+C_2e^{-\lambda_2t}\sin\omega_2t,$$

其中

$$\lambda_1=\frac{R}{2(L+M)},\ \lambda_2=\frac{R}{2(L-M)},$$

$$\omega_1=\sqrt{\frac{1}{C(L+M)}-\frac{R^2}{4(L+M)^2}},$$

$$\omega_2=\sqrt{\frac{1}{C(L-M)}-\frac{R^2}{4(L-M)^2}},$$

$$C_1=\frac{E_0}{2(L+M)\omega_1},\ C_2=\frac{-E_0}{2(L-M)\omega_2}.$$

习　　题

1. 求解下列常微分方程.

(1) $\frac{d^3y}{dt^3}+3\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+y=6e^{-t}$，$y(0)=\frac{dy}{dt}\bigg|_{t=0}=\frac{d^2y}{dt^2}\bigg|_{t=0}=0$.

(2) $\frac{d^2y}{dt^2}+9y=30\text{ch}\,t$，$y(0)=3$，$\frac{dy}{dt}\bigg|_{t=0}=0$.

(3) $\begin{cases}\frac{dy}{dt}+2y+2z=10e^{2t},\\ \frac{dz}{dt}-2y+z=7e^{2t}.\end{cases}$　　$\begin{cases}y(0)=1,\\ z(0)=3.\end{cases}$

(4) $\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+y=t^2e^t$，$y(0)=\frac{dy}{dt}\bigg|_{t=0}=0$.

2. 电压为 E 的直流电源通过电感 L 和电阻 R 对电容 C 充电，求解充电电流 j 的变化情况。

3. 放射性元素 E_1 蜕变为 E_2，元素 E_1 的原子数 N_1 变化规律为 $\frac{dN_1}{dt}=-C_1N_1$. 元素 E_2 又蜕变为 E_3，元素 E_2 的原子数 N_2 变化规律为 $\frac{dN_2}{dt}=C_1N_1-C_2N_2$. 元素 E_3 又蜕变为 E_4，元素 E_3 的原子数 N_3 的变化规律为 $\frac{dN_3}{dt}=C_2N_2-C_3N_3$. 元素 E_4 是稳定的，不再蜕变，它的原子数 N_4 的变化规律为 $\frac{dN_4}{dt}=C_3N_3$. 以上 C_1，C_2，C_3 和 C_4 都是常数。设开始时只有元素 E_1 的 N_0 个原子，求解 N_4 的变化情况 $N_4(t)$。

4. 设地面有一震动，其速度 $v=H(t)$，地震仪中的感生电流 j 遵守规律

$$\frac{dj}{dt}+2cj+c^2\int_0^t j\,dt=\lambda\frac{dv}{dt}.$$

这电流通过检流计，使检流计发生偏转。偏转 y 遵守规律

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2c\frac{dy}{dt}+c^2y=\mu j.$$

求解偏转 y 的变化情况 $y(t)$.

5. 求解交流 RC 电路的方程

$$\begin{cases}Rj+\frac{1}{C}\int_0^t j\,dt=E_0\sin\omega t,\\ j(0)=0.\end{cases}$$

6. 求解 $T''+\frac{\pi^2a^2}{l^2}T=A\sin\omega t$, $T(0)=0, T'(0)=0$. [本题答案可应用于 § 37 例 5.]

7. 求解 $T''+\omega^2a^2T=g(t), T(0)=0, T'(0)=0$, $g(t)$ 是某个已知函数。[本题答案可应用于 § 39 例 8.]

8. 求解 $T'+\omega^2a^2T=g(t), T(0)=0$, $g(t)$ 是某个已知函数。[本题答案可应用于 § 39 例 9.]

9. 厄密方程 $\frac{d^2y}{dt^2}-2t\frac{dy}{dt}+\lambda y=0$ 里的 λ 应取怎样的数值才有可能使方程的解为多项式？

10. 拉盖尔方程 $t\frac{d^2y}{dt^2}+(1-t)\frac{dy}{dt}+\lambda y=0$ 的 λ 应取怎样的数值才有可能使方程的解为多项式？

11. 有一种船舶减震器利用的是耦合振动原理。在水面上颠簸的船体不妨看作是一个阻尼振子，其质量为 M，倔强系数为 K，阻尼系数为 R。减震器则是附着在船体上的振子，其质量为 m，倔强系数为 k. 因此，船体的位移 $X(t)$ 和减震器的位移 $x(t)$ 的运动方程是

$$\begin{cases}M\ddot{X}=F_0\sin\omega t-KX-R\dot{X}-k(X-x),\\ m\ddot{x}=-k(x-X),\end{cases}$$

其中 $F_0\sin\omega t$ 是使船体颠簸的外力。在什么条件下，船体的运动不含有稳定振荡而只含有指数式衰减或衰减振荡？

12. 用运算微积方法求出下列积分。

(1) $I(t)=\int_0^\infty\frac{\cos tx}{x^2+a^2}dx$, (2) $I(t)=\int_0^\infty\frac{\sin tx}{x}dx$,

(3) $I(t)=\int_0^\infty\frac{\sin tx}{x(x^2+1)}dx$, (4) $I(t)=\int_0^\infty\frac{\sin^2 tx}{x^2}dx$.

第二篇　傅里叶级数和积分

第六章　傅里叶级数

读者已经熟悉函数的幂级数展开，这种级数的每一项都是幂函数，就是说，采用了一系列幂函数作为展开的基本函数族。

幂函数没有周期性，所以周期函数展开为幂级数以后，周期性就很难直接体现出来了。这样，在着重研究函数的周期性的时候，幂级数展开并不合适，需要采用其它函数作为基本函数。

在科学技术的各个领域里，广泛地存在着振动和波这类周期现象，例如弹性振子、机械振动、声振动和声波、交变电流、电磁振荡和电磁波等。初等课程往往只研究正弦或余弦函数所描写的振动和波，即所谓谐振动和谐波。但实际的振动和波并不一定是简单的谐振动和谐波。例如图 28(*a*) 是C调"*do*"的音叉（频率为 264）发出的声振动，这是谐振动。图28(*b*)和(*c*)分别是某个提琴奏出的和某人唱出的C调"*do*"声振动，虽然频率也是 264，振动方式却比较复杂而且两者各不一样。各种乐器奏出的和各个人唱出

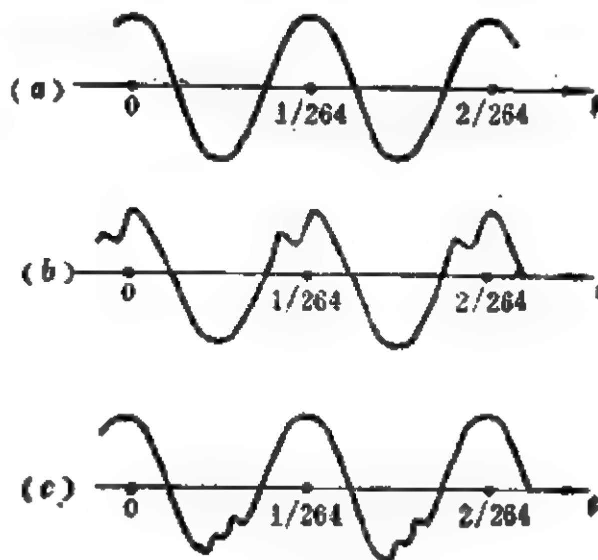


图　28

的C调"*do*"听起来很不相同，就是因为它们以各种不同的复杂方式振动。

可能的复杂振动方式不计其数，逐一加以研究显然是办不到的。人们经过研究发现这样做也并不必要，原来复杂振动可以分解为一系列各种频率的谐振动的叠加。在数学上，这就是把周期函数分解为傅里叶级数。

人耳的科蒂氏器官包括成万条纤维，它们的振动频率各不相同。声振动传进人耳后，相应于声振动所包含的各种谐振动频率的那些纤维被激发而共振，刺激相应的神经末梢并传到大脑，人就是这样听到和识别各种声音的。这里不仅是数学上的分解，而且是真实的物理过程。无线电电子学更是经常运用这种分解和叠加过程。

§24. 周期函数的傅里叶级数

设有某个确定的周期函数 $f(x)$。把它的周期记作 $2l$，即

$$f(x+2l)=f(x). \tag{24.1}$$

采取满足条件(24.1)的一系列谐函数

$$1,\ \cos\frac{\pi x}{l},\ \cos\frac{2\pi x}{l},\ \cdots,\ \cos\frac{k\pi x}{l},\ \cdots$$

$$\sin\frac{\pi x}{l},\ \sin\frac{2\pi x}{l},\ \cdots,\ \sin\frac{k\pi x}{l},\ \cdots \tag{24.2}$$

作为基本函数族。不难验证(参看附录二)，函数族(24.2)里的任意两个都是正交的，就是说，两者的乘积在一个周期上(例如从 $-l$ 到 $+l$)的积分为零，即

$$\begin{cases}\int_{-l}^{l} 1\cos\frac{k\pi x}{l}dx=0 \quad (k\neq 0),\\ \int_{-l}^{l} 1\sin\frac{k\pi x}{l}dx=0,\\ \int_{-l}^{l} \cos\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx=0 \quad (k\neq n),\\ \int_{-l}^{l} \sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx=0 \quad (k\neq n),\\ \int_{-l}^{l} \cos\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx=0.\end{cases} \tag{24.3}$$

取函数族(24.3)的前面有限个函数各附以某个系数，再叠加起来得到

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \cos\frac{k\pi x}{l}+\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi x}{l},$$

试拿这作为所给函数 $f(x)$ 的近似表达式。这个近似的误差

$$\varepsilon(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{N} a_k \cos\frac{k\pi x}{l}-\sum_{k=1}^{N} b_k \sin\frac{k\pi x}{l}. \tag{24.4}$$

为了考察近似式的优劣，研究它在一个周期上的平方平均误差

$$(1/2\pi)\int_{-l}^{l}[\varepsilon(x)]^2 dx \ .$$

这里的 $\varepsilon(x)$ 应以(24.4)代入，把平方展开并计及正交关系(24.3)，得

$$\begin{aligned}\int_{-l}^{l}[\varepsilon(x)]^2 dx=&\int_{-l}^{l}[f(x)]^2 dx\\ &+\sum_{k=0}^{N}\int_{-l}^{l}\left\{a_k^2\left[\cos\frac{k\pi x}{l}\right]^2-2a_k f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\right\}dx\\ &+\sum_{k=1}^{N}\int_{-l}^{l}\left\{b_k^2\left[\sin\frac{k\pi x}{l}\right]^2-2b_k f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\right\}dx.\end{aligned} \tag{24.5}$$

系数 a_k 和 b_k 的选取应当使平方平均误差尽可能地小。于是，由条件

$$\frac{\partial}{\partial a_k}\int_{-l}^{l}[\varepsilon(x)]^2 dx=0 \ \text{和}\ \frac{\partial}{\partial b_k}\int_{-l}^{l}[\varepsilon(x)]^2 dx=0$$

定出系数

$$a_k=\frac{\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx}{\int_{-l}^{l}\left[\cos\frac{k\pi x}{l}\right]^2dx},\qquad b_k=\frac{\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx}{\int_{-l}^{l}\left[\sin\frac{k\pi x}{l}\right]^2dx},\quad(24.6)$$

把(24.6)代回(24.5)得到

$$\int_{-l}^{l}[\varepsilon(x)]^2dx=\int_{-l}^{l}[f(x)]^2dx-\sum_{k=0}^{N}a_k^2\int_{-l}^{l}\left[\cos\frac{k\pi x}{l}\right]^2dx$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}b_k^2\int_{-l}^{l}\left[\sin\frac{k\pi x}{l}\right]^2dx.$$

上式左边的平方平均误差只能$\geqslant0$,右边当然也就$\geqslant0$,即

$$\int_{-l}^{l}[f(x)]^2dx\geqslant\sum_{k=0}^{N}a_k^2\int_{-l}^{l}\left[\cos\frac{k\pi x}{l}\right]^2dx$$

$$+\sum_{k=1}^{N}b_k^2\int_{-l}^{l}\left[\sin\frac{k\pi x}{l}\right]^2dx.$$

这叫作三角函数族(24.2)的**贝塞耳不等式**。

贝塞耳不等式右边每一项都是正的。从(24.2)取出的函数个数越多,就是说,N越大,则贝塞耳不等式右边的项数越多,从而右边越大,越接近左边。那么,$N\to\infty$的情况怎样呢?人们已证明,对于任意的分段连续的周期函数$f(x)$,

$$\int_{-l}^{l}[f(x)]^2dx=\sum_{k=0}^{\infty}a_k^2\int_{-l}^{l}\left[\cos\frac{k\pi x}{l}\right]^2dx+\sum_{k=1}^{\infty}b_k^2\int_{-l}^{l}\left[\sin\frac{k\pi x}{l}\right]^2dx.$$

这叫作三角函数族(24.2)的**完整性方程**(**或巴塞瓦等式**)。

完整性方程表明,当$N\to\infty$,平均平方误差$\to0$,这是说,

$$f_N(x)=\sum_{k=0}^{N}a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+\sum_{k=1}^{N}b_k\sin\frac{k\pi x}{l}$$

于$N\to\infty$时平均收敛于周期函数$f(x)$。

用三角函数族(24.2)作为基本函数族,把周期函数$f(x)$展开为级数

$$f(x)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right).\qquad(24.7)$$

这叫做周期函数 $f(x)$ 的傅里叶级数。傅里叶级数里的系数 a_k 和 b_k 叫做傅里叶系数。

从实用的角度说，算出傅里叶系数是很重要的。只要接受傅里叶级数展开式(24.7)，便容易导出傅里叶系数的计算公式。事实上，在一个周期上把(24.7)逐项积分，

$$\int_{-l}^{l} f(\xi)d\xi = a_0\int_{-l}^{l} d\xi +$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int_{-l}^{l}\cos\frac{k\pi\xi}{l}d\xi + b_k\int_{-l}^{l}\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi\right).$$

由于正交关系(24.3)，上式右边除去含有 a_0 的一项之外全为零，

$$\int_{-l}^{l} f(\xi)d\xi = a_0\int_{-l}^{l} d\xi = 2la_0,$$

所以

$$a_0 = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(\xi)d\xi. \tag{24.8}$$

用 $\cos\frac{n\pi x}{l}$ 遍乘(24.7)各项并在一个周期上逐项积分，

$$\int_{-l}^{l} f(\xi)\cos\frac{n\pi\xi}{l}d\xi = a_0\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi\xi}{l}d\xi$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int_{-l}^{l}\cos\frac{k\pi\xi}{l}\cos\frac{n\pi\xi}{l}d\xi + b_k\int_{-l}^{l}\sin\frac{k\pi\xi}{l}\cos\frac{n\pi\xi}{l}d\xi\right).$$

由于正交关系 (24.3)，上式右边除去含有 a_n 的一项之外全为零，

$$\int_{-l}^{l} f(\xi)\cos\frac{n\pi\xi}{l}d\xi = a_n\int_{-l}^{l}\left[\cos\frac{n\pi\xi}{l}\right]^2 d\xi$$

$$= a_n\int_{-l}^{l}\frac{1+\cos\frac{2n\pi\xi}{l}}{2}d\xi = la_n,$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(\xi)\cos\frac{n\pi\xi}{l}d\xi. \tag{24.9}$$

(24.8)和(24.9)还可以合并写成

$$a_n=\frac{1}{\delta_n l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos\frac{n\pi\xi}{l}d\xi,$$

$$\text{其中}\ \delta_n=\begin{cases}2 & (n=0),\\ 1 & (n\neq 0).\end{cases}$$

同理，用 $\sin\frac{n\pi x}{l}$ 遍乘(24.7) 各项并在一个周期上逐项积分，可得

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi. \qquad (24.10)$$

傅里叶系数计算公式(24.8)—(24.10)的分母 $2l$ 或 l 分别来自 $\int_{-l}^{l}1^2d\xi$, $\int_{-l}^{l}\left[\cos\frac{n\pi\xi}{l}\right]^2d\xi$ 和 $\int_{-l}^{l}\left[\sin\frac{n\pi\xi}{l}\right]^2d\xi$. 这几个积分的平方根分别叫做 $1,\cos\frac{n\pi\xi}{l}$ 和 $\sin\frac{n\pi\xi}{l}$ 的模。

推导(24.8)—(24.10)是以承认傅里叶级数(24.7)为前提的。这样作出的傅里叶级数究竟是否收敛，即使是收敛，究竟是否收敛到 $f(x)$，这些当然都还是问题。前面提到的完整性方程只表明平均收敛，也还不是普通意义的收敛。

定理 如果周期函数 $f(x)$ 处处连续，至于它的导数或者处处连续，或者在每个周期中只有有限个间断点 $x_i(i=1, 2, \cdots, m)$，而且在间断点的跃度 $\Delta_i(i=1,2,\cdots,m)$ 都是有限的，则傅里叶级数(24.7)绝对且一致收敛。

证 考察傅里叶系数 a_k 的绝对值

$$|a_k|=\frac{1}{l}\left|\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos\frac{k\pi\xi}{l}d\xi\right|.$$

进行一次分部积分，

$$\begin{aligned}|a_k|&=\frac{1}{k\pi}\left|\left[f(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}\right]_{-l}^{l}-\int_{-l}^{l}f'(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi\right|\\&=\frac{1}{k\pi}\left|\int_{-l}^{l}f'(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi\right|=\frac{1}{k\pi}\left|\int_{x_1}^{x_1+2l}f'(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi\right|\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{k\pi}\left|\sum_{i=1}^{m}\int_{x_i+0}^{x_{i+1}-0} f'(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi\right| \text{（其中 } x_{m+1}=x_1+2\pi\text{）。}$$

再进行一次分部积分，

$$|a_k|=\frac{l}{k^2\pi^2}\left|\sum_{i=1}^{m}\left[f'(x_i+0)\cos\frac{k\pi x_i}{l}-f'(x_{i+1}-0)\cos\frac{k\pi x_{i+1}}{l}\right]\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{m}\int_{x_i+0}^{x_{i+1}-0} f''(\xi)\cos\frac{k\pi\xi}{l}d\xi\right|$$

$$\leqslant\frac{l}{k^2\pi^2}\left\{\sum_{i=1}^{m}\left|\Delta_i\cos\frac{k\pi x_i}{l}\right|+\sum_{i=1}^{m}\int_{x_i+0}^{x_{i+1}-0} f''(\xi)\cos\frac{k\pi\xi}{l}d\xi\right\}.$$

上式的$\{\quad\}l/\pi^2$应是有界的，它$\leqslant$某个常数M。于是

$$|a_k|\leqslant\frac{M}{k^2}.$$

同理可得$|b_k|\leqslant M/k^2$。这样，傅里叶级数(24.7)的$\cos\frac{k\pi x}{l}$项和$\sin\frac{k\pi x}{l}$项合并起来的绝对值$\leqslant\frac{2M}{k^2}$。我们知道，正项级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2M}{k^2} \tag{24.11}$$

是收敛的（参看附录三），所以傅里叶级数(24.7)绝对且一致收敛。

其实，傅里叶级数收敛（不必是绝对收敛，也不必是一致收敛）的条件比这宽，如下面的狄里希利定理。

关于傅里叶级数的收敛性问题，我们限于指出狄里希利定理。

狄里希利定理 周期函数$f(x)$，如果满足狄里希利条件，即(1)处处连续，或者在每个周期中只有有限个间断点，并且在间断点的跃度是有限的，(2)在每个周期中只有有限个极值，则傅里叶级数(24.7)收敛，

$$\text{和}=\begin{cases}f(x) & \text{（在连续点 } x\text{），}\\ \frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\} & \text{（在间断点 } x\text{）。}\end{cases} \tag{24.12}$$

例 交流电压 $E(t)=E_0\sin\omega t$. 经过半波整流，负压被"削去"(图 29)。试研究半波整流电压的傅里叶级数。

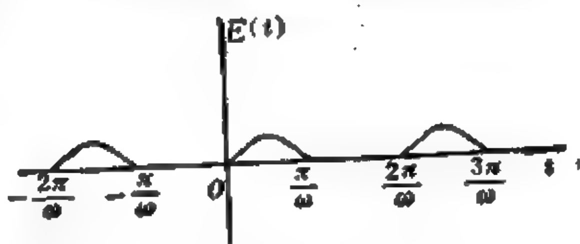


图 29

解 $E_0\sin\omega t$ 是周期函数，周期为 $2\pi/\omega$. 经半波整流后，周期还是 $2\pi/\omega$. 在 $[-\pi/\omega, \pi/\omega]$ 这个周期上，半波整流电压可表为

$$E(t)=\begin{cases}0 & (\text{在}[-\pi/\omega, 0]\text{上}),\\ E_0\sin\omega t & (\text{在}[0, \pi/\omega]\text{上}).\end{cases}$$

按照公式(24.7)把半波整流电压展开为傅里叶级数（公式里的 l 在本例即 π/ω），

$$E(t)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\omega t+b_k\sin k\omega t).$$

傅里叶系数则用(24.8)—(24.10)计算。

$$a_0=\frac{1}{2\pi/\omega}\left[\int_{-\pi/\omega}^{0}0dt+\int_0^{\pi/\omega}E_0\sin\omega t dt\right]$$

$$=\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\pi/\omega}E_0\sin\omega t dt=\frac{E_0}{\pi}.$$

$$a_k=\frac{1}{\pi/\omega}\int_0^{\pi/\omega}E_0\sin\omega t\cos k\omega t dt$$

$$=\frac{E_0\omega}{2\pi}\int_0^{\pi/\omega}[\sin(1+k)\omega t+\sin(1-k)\omega t]dt.$$

现在要区分 $k=1$ 和 $k\neq1$ 两种情况，

$$a_1=\frac{E_0\omega}{2\pi}\int_0^{\pi/\omega}\sin 2\omega t dt=-\frac{E_0}{4\pi}\cos2\omega t\Big|_0^{\pi/\omega}=0,$$

$$a_k=\frac{E_0\omega}{2\pi}\int_0^{\pi/\omega}[\sin(1+k)\omega t+\sin(1-k)\omega t]dt$$

$$=\frac{E_0}{2\pi}\left[-\frac{\cos(1+k)\omega t}{1+k}-\frac{\cos(1-k)\omega t}{1-k}\right]\Bigg|_0^{\pi/\omega}$$

$$=\frac{E_0}{2\pi}\left[-\frac{(-1)^{1+k}}{1+k}+\frac{1}{1+k}-\frac{(-1)^{1-k}}{1-k}+\frac{1}{1-k}\right]$$

$$=\begin{cases}0 & (k\text{ 为奇数 }2n+1),\\ \dfrac{2E_0}{[1-(2n)^2]\pi} & (k\text{ 为偶数 }2n).\end{cases}$$

至于

$$b_k=\frac{1}{\pi/\omega}\int_0^{\pi/\omega}E_0\sin\omega t\sin k\omega t dt$$

$$=\frac{E_0\omega}{2\pi}\int_0^{\pi/\omega}[\cos(1-k)\omega t-\cos(1+k)\omega t]dt.$$

也要区分 $k=1$ 和 $k\neq1$ 两种情况，

$$b_1=\frac{E_0\omega}{2\pi}\int_0^{\pi/\omega}(1-\cos2\omega t)dt=\frac{1}{2}E_0,$$

$$b_k=\frac{E_0\omega}{2\pi}\int_0^{\pi/\omega}[\cos(1-k)\omega t-\cos(1+k)\omega t]dt$$

$$=\frac{E_0}{2\pi}\left[\frac{\sin(1-k)\omega t}{1-k}-\frac{\sin(1+k)\omega t}{1+k}\right]\Bigg|_0^{\pi/\omega}=0.$$

这样，半波整流电压 $E(t)$ 的傅里叶级数是

$$E(t)=\frac{1}{\pi}E_0+\frac{1}{2}E_0\sin\omega t+\frac{2}{\pi}E_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-(2n)^2}\cos2n\omega t.$$

这个傅里叶级数的第一项即常数项 E_0/π 代表整流后的直流成分，它是交流电压峰值 E_0 的 $1/\pi$ 倍即大约 0.32 倍，或者说，它是交流电压有效值 $E_0/\sqrt{2}$ 的 $\sqrt{2}/\pi$ 倍即大约 0.45 倍。整流的目的本来就在于获得直流。但是，半波整流电压并不就是直流而是脉动的(从图 29 可以直接看出)。除直流成分以外，还有 $\frac{1}{2}E_0\sin\omega t$，这是频率跟原来的频率相同的交流成分，只是幅度已减为一半。另外还出现频率为原来频率 $2n$(偶数)倍的交流成分。

频率跟原来频率相同的交流成分叫做基波。频率为原来频率 k 倍(k 是整数)的交流成分叫做 k 次谐波。本例的 k 是偶数 $2n$，

所以是偶次谐波。

半波整流后的脉动电压并不是单纯的直流，而是附加了各种交流成分(基波和偶次谐波)，必须经过滤波，把交流成分尽可能滤掉，才得到比较单纯的直流。

本例 $2n$ 次谐波的幅度是 $\left|\frac{2E_0}{\pi}\frac{1}{1-(2n)^2}\right|$ 即 $\frac{2E_0}{\pi}\frac{1}{(2n)^2-1}$. 很明显，$2n$ 越大的谐波，或者说越是高次的谐波，其幅度越小。图 30 标明各个成分的频率和幅度，这就是频谱。随着 $2n$ 的增大，$2n$ 次谐波的幅度迅速减小，所以实际上往往可以只保留次数最低的很少几个谐波，而把高次谐波一概略去。至于究竟保留到哪一次谐波，则应根据所要求的精确度加以斟酌决定。



图 30

周期函数的傅里叶级数把直流、基波、谐波各个成分分析得十分清楚，这是幂级数展开式所作不到的。傅里叶级数展开在物理学中得到广泛应用的原因之一就在于此。

为了帮助理解，这里拿矢量来作类比。设想有某种无限维的所谓希耳伯空间，函数 $f(x)$ 好比希耳伯空间中的"矢量" $\boldsymbol{f}$. 基本函数族(24.2)好比沿着各个坐标轴的"矢量" $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3, \cdots$，它们构成希耳伯空间中的"基底矢量"，或简称"基"。两个函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的乘积在一个周期上的积分 $\int_{-l}^{l} f_1(x)f_2(x)dx$ 好比两个矢量的"标积" $\boldsymbol{f}_1\cdot\boldsymbol{f}_2$. 三角函数的正交关系好比是说希耳伯空间中的任意两个"基底矢量"的"标积"为零，就是说"互相垂直"。把函数 $f(x)$ 展开为傅里叶级数，好比是把"矢量"表为"基底矢量"的线性组合，

$$\boldsymbol{f}=c_1\boldsymbol{i}_1+c_2\boldsymbol{i}_2+c_3\boldsymbol{i}_3+\cdots\cdots,$$

傅里叶系数好比是这个线性组合中的系数，即"矢量"$f(x)$的"分量"。傅里叶系数的计算公式(24.8)—(24.10)好比是矢量的"分量"计算公式

$$c_k=\frac{f\cdot i_k}{i_k\cdot i_k}\quad(k=1,2,3,\cdots\cdots).$$

"基底矢量"(24.2)即$i_k(k=1,2,3,\cdots\cdots)$并不是"单位矢量"，这是由于它们的"大小"即模不等于一。因而"分量"计算公式出现分母$i_k\cdot i_k$. 要是用适当的常数分别去除基本函数族(24.2)的各个函数，使它们的模为一，就是说，采用"单位矢量"作为"基"，那么，"分量"的计算公式就无需分母$i_k\cdot i_k$了。

照这样类比下去，贝塞耳不等式好比是说，如果"基底矢量"的个数低于空间的维数，即基底矢量组是不完整的(例如说，在三维空间中只取了两个基底矢量)则"矢量"的"大小"的平方大于各个"分量"的"大小"的平方和。完整性方程则好比是说，如果"基底矢量"的个数等于空间的维数，即基底矢量组是完整的，则"矢量"的"大小"的平方等于各个"分量"的"大小"的平方和。

其实，并不一定要取函数族(24.2)作为希耳伯空间中的"基底矢量"，还有各种完整的函数族可作为"基底矢量"把函数$f(x)$展开为广义傅里叶级数。对于某些完整函数族，在"标积"的定义中，被积函数还要乘上某个权重(参看§43)，其它方面则大体跟本节相似。

习　题

1. 图31是硅可控整流电压$E(t)$的图象，试把它展开为傅里叶级数。在$[-\pi/\omega,\pi/\omega]$这个周期上，$E(t)$可表为

$$E(t)=\begin{cases}0 & \text{在}[-\pi/\omega,\ \alpha\pi/\omega]\text{上},\\ E_0\sin\omega t & \text{在}[\alpha\pi/\omega,\ \pi/\omega]\text{上},\end{cases}$$

其中α是触发电路控制的某个参数。注意直流成分的大小跟α有关，这就是硅可控整流的调压原理。

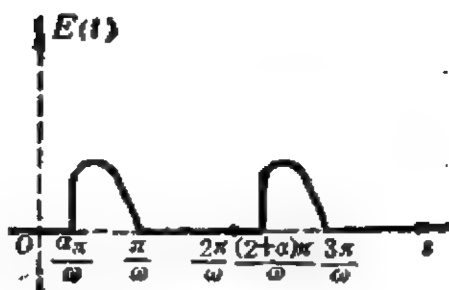


图 31

2. 试把图 32 的锯齿波展开为傅里叶级数。在$(0,T)$上，这个锯齿波可表为$f(x)=x/3$.



图 32

3. 交流电压$E_0\sin\omega t$，经过全波整流，成为$E(t)=E_0|\sin\omega t|$。试把它展开为傅里叶级数，并跟半波整流电压(本节例)比较。

4. 把下列周期函数$f(x)$展开为傅里叶级数。

(1) 在$(-l,+l)$这个周期上，$f(x)=e^{\lambda x}$。

(2) 在$(-\pi,\pi)$这个周期上，$f(x)=H(x)$，阶跃函数。

(3) 在$(0,\pi)$这个周期上，$f(x)=1-\sin\frac{x}{2}$.

(4) 在$(-1,1)$这个周期上，

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{在}(-1,0)\text{上}, \\ 1 & \text{在}(0,1/2)\text{上}, \\ -1 & \text{在}(1/2,1)\text{上}. \end{cases}$$

(5) 在$(0,l)$这个周期上，$f(x)=\left(\cos\frac{\pi x}{l}\right)[1-H(x-l/2)]$.

(6) 在$(-\pi,\pi)$这个周期上，$f(x)=x+x^2$。又，在本题答案中，置$x=\pi$，由此验证$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$.

§ 25. 奇的和偶的周期函数

如果周期函数是奇函数或偶函数，它的傅里叶级数具有鲜明的特点。

先说周期函数是奇函数的情况。在这种情况下，系数 a_0 和 a_n 的公式(24.8)和(24.9)的被积函数 $f(\xi)$ 和 $f(\xi)\cos\frac{n\pi\xi}{l}$ 也是奇函数。对于奇函数的积分，$\int_{-l}^{0}=-\int_{0}^{l}$，从而 $\int_{-l}^{l}=\int_{-l}^{0}+\int_{0}^{l}=0$. 这是说，$a_0$ 和所有的 a_n 都等于零，即傅里叶级数中没有余弦项，公式(24.7)成为

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin\frac{k\pi x}{l}, \tag{25.1}$$

这不妨叫作傅里叶正弦级数。至于系数 b_n 的公式(24.10)的被积函数 $f(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}$ 则是偶函数。对于偶函数的积分，$\int_{-l}^{0}=\int_{0}^{l}$，从而 $\int_{-l}^{l}=2\int_{0}^{l}$. 这是说，公式(24.10)可代之以

$$b_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}. \tag{25.2}$$

我们要顺便指出，由于 $\sin\frac{n\pi x}{l}\Big|_{x=0}=0$ 和 $\sin\frac{n\pi x}{l}\Big|_{x=l}=0$，所以正弦级数(25.1)在 $x=0$ 和 $x=l$ 为零，即

$$f(0)=0,\quad f(l)=0. \tag{25.3}$$

再说周期函数是偶函数的情况。在这种情况下，系数 b_n 的公式(24.10)的被积函数 $f(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}$ 是奇函数，因而 $\int_{-l}^{l}=0$. 这是说，所有的 b_n 都等于零，即傅里叶级数中没有正弦项，公式(24.7)

成为

$$f(x)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{k\pi x}{l}。\tag{25.4}$$

这不妨叫作傅里叶余弦级数。至于系数 a_0 和 a_n 的公式(24.8)和(24.9)的被积函数 $f(\xi)$ 和 $f(\xi)\cos\frac{n\pi\xi}{l}$ 则是偶函数，因而 $\int_{-l}^{l}=2\int_{0}^{l}$. 这是说(24.8)和(24.9)可代之以

$$a_0=\frac{1}{l}\int_0^l f(\xi)d\xi,\quad a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\cos\frac{n\pi\xi}{l}d\xi.\tag{25.5}$$

我们要顺便指出，余弦级数的导数是正弦级数，所以余弦级数(25.4)的导数在 $x=0$ 和 $x=l$ 为零，即

$$f'(0)=0,\quad f'(l)=0.\tag{25.6}$$

例 1 研究矩形波(图 33)

$$f(x)=\begin{cases}+1 & 于(0,\pi)以及(2m\pi,(2m+1)\pi),\\-1 & 于(-\pi,0)以及((2m-1)\pi,2m\pi)\end{cases}$$

的频谱。

解 这个矩形波是奇函数，可用(25.1)和(25.2)展开为傅里叶正弦级数

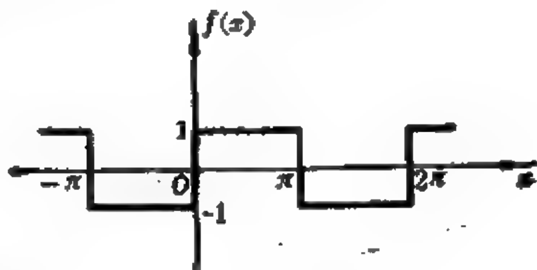


图 33

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kx,$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin n\xi d\xi=\frac{2}{n\pi}[-\cos n\xi]\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{n\pi}[-\cos n\pi+1]=\frac{2}{n\pi}[-(-1)^n+1]$$

$$=\begin{cases}0 & (n 为偶数),\\ \frac{4}{n\pi} & (n 为奇数).\end{cases}$$

这样，图 33 的矩形波的傅里叶级数是

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\cdots\cdots\right). \qquad (25.7)$$

矩形波是不断跃变的，它竟然可以用正弦函数(极平常的连续函数)的级数(25.7) 表示出来！为了阐明级数(25.7) 怎样逐渐逼近矩形波，我们作图 34a(为了看起来明白起见，图中纵轴和横轴上的单位长度取成不相同的)。S_n 指的是到 $\sin nx$ 项为止的前几项的部分和。可以看到，随着 n 的增大，S_n 逐渐逼近矩形波。n 很大的 S_n 描画在图 34b，它十分接近矩形波，但在间断点 $x=-\pi$, 0, π 有"冲过了头"的现象。这种"过冲"是傅里叶级数的特性，叫作吉布斯现象。

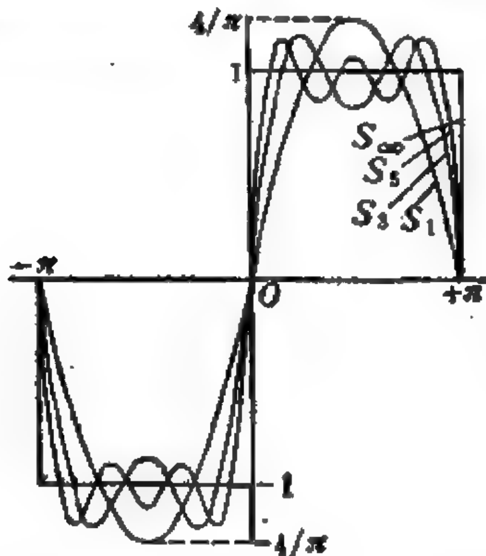


图 34a

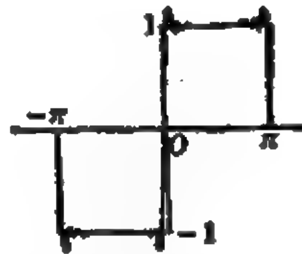


图 34b

矩形波(25.7)的频谱包含基波和奇次谐波。谐波的幅度跟它的次数成反比。随着次数的增大，谐波幅度减小，但不像半波整流电压的谐波幅度的减小(如图 29)那样迅速。因此，矩形波放大线路的频响曲线需要具有一定的宽度，否则某些谐波得不到放大，波形就会失真，而跟矩形有显著差别。

在本题答案(25.7)中令 $x=\frac{\pi}{2}$，可得

$$1=\frac{4}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right),$$

即
$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}. \tag{25.8}$$

例 2 把图 35 的三角波 $f_1(x)$展开为傅里叶级数。在一个周期$[-l, l]$上，$f_1(x)$可表为

$$f_1(x)=|x|.$$

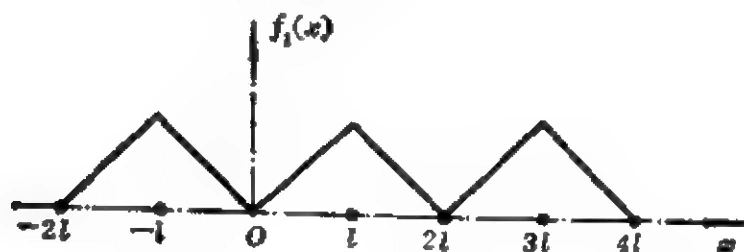


图 35

解 三角波 $f_1(x)$是偶函数，可用(25.4)和(25.5)展开为傅里叶余弦级数

$$f_1(x)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{k\pi x}{l},$$

$$a_0=\frac{1}{l}\int_0^l \xi d\xi=\frac{1}{2}l,$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l \xi\cos\frac{n\pi\xi}{l}d\xi=\frac{2}{l}\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2\int_0^l\left(\frac{n\pi\xi}{l}\right)\cos\frac{n\pi\xi}{l}d\frac{n\pi\xi}{l}$$
$$=\frac{2l}{n^2\pi^2}\left[\cos\frac{n\pi\xi}{l}+\frac{n\pi\xi}{l}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\right]\Big|_0^l=\frac{2l}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1]$$
$$=\begin{cases}0 & (n\text{ 为非零的偶数}),\\ -\dfrac{4l}{(2k+1)^2\pi^2} & (n\text{ 为奇数 }2k+1).\end{cases}$$

这样，

$$f_1(x)=\frac{l}{2}-\frac{4l}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)\pi x}{l}. \tag{25.9}$$

如果取 $l=\pi$，并在本题答案(25.9)中令 $x=\pi$，可得

$$\pi=\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2},$$ 即

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}. \tag{25.10}$$

例 3 把图 36 的锯齿波 $f_2(x)$展开为傅里叶级数。在一个周期$[-l, l]$上，$f_2(x)$可表为

$$f_2(x)=x.$$

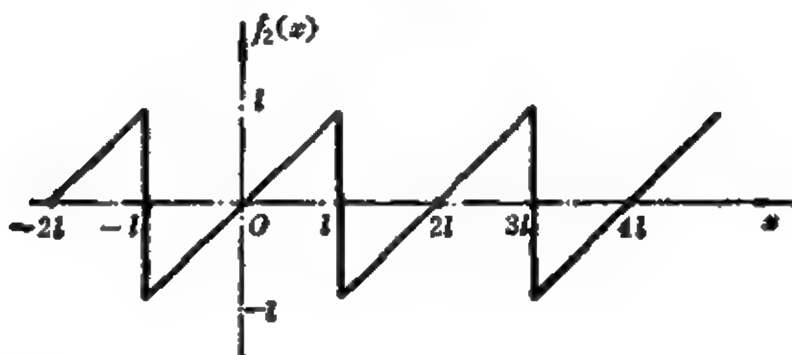


图 36

解 锯齿波 $f_2(x)$是奇函数，可用(25.1)和(25.2)展开为傅里叶正弦级数

$$f_2(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin\frac{k\pi x}{l},$$

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l\xi\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi=\frac{2}{l}\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2\int_0^l\left(\frac{n\pi\xi}{l}\right)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\frac{n\pi\xi}{l}$$

$$=\frac{2l}{n^2\pi^2}\left[\sin\frac{n\pi\xi}{l}-\frac{n\pi\xi}{l}\cos\frac{n\pi\xi}{l}\right]\Big|_0^l=\frac{2l}{n\pi}(-1)^{n+1}.$$

这样，

$$f_2(x)=\frac{2l}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin\frac{k\pi x}{l}. \tag{25.11}$$

注意例 3 的 $f_2(x)$和例 2 的 $f_1(x)$在区间$(0, l)$上相同。

习　题

把下列函数 $f(x)$ 展开为傅里叶级数。

(1) $f(x)=\cos^3 x$. [提示：可按(25.4)和(25.5)展开。此外，还可令 $t=e^{ix}$ 把 $f(x)$ 化为 t 的有理分式，展开为幂级数，然后再回到 x.]

(2) $f(x)=\dfrac{1-\alpha^2}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}(|\alpha|<1)$.

(3) $f(x)=\dfrac{1-\alpha\cos x}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}(|\alpha|<1)$.

(4) $f(x)=\dfrac{\alpha\sin x}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}(|\alpha|<1)$.

(5) 在$[-\pi,\pi]$这个周期上，$f(x)=x^2$. 又，在本题答案中，令 $x=0$，由此验证 $1-\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}-\dfrac{1}{4^2}+\cdots\cdots=\dfrac{\pi^2}{12}$.

(6) 在半个周期 $(-\pi,0)$ 上，$f(x)=-(\pi+x)/2$；在另外半个周期 $(0,\pi)$ 上，$f(x)=(\pi-x)/2$.

(7) 在半个周期$(-\pi,0)$上，$f(x)=-\cos x$；在另外半个周期$(0,\pi)$上，$f(x)=\cos x$.

(8) 在$(-\pi,\pi)$这个周期上，$f(x)=\cos\alpha x$(α 非整数)。

(9) 在$(-\pi,\pi)$这个周期上，$f(x)=\sin\alpha x$(α 非整数)。

(10) 在$(-\pi,\pi)$这个周期上，$f(x)=\operatorname{ch}\alpha x$.

(11) 在$(-\pi,\pi)$这个周期上，$f(x)=\operatorname{sh}\alpha x$.

(12) 在半个周期$(0,l/2)$上，$f(x)=\sin(\pi x/l)$；在另外半个周期$(l/2,l)$上，$f(x)=-\sin(\pi x/l)$.

(13) 在$[-\pi,\pi]$这个区间上，

$$f(x)=\begin{cases}\cos x & (\text{在}[-\pi/2,\pi/2]\text{上}),\\ 0 & (\text{在}[-\pi,-\pi/2]\text{和}[\pi/2,\pi]\text{上}).\end{cases}$$

§26. 有限区间上的函数的傅里叶级数

在物理问题中，所研究的物理系统，一般说来是有限大小的，比方说限于从 $x=0$ 伸展到 $x=l$。因此，我们常常需要研究在有

限区间$(0,l)$上定义的函数$f(x)$。超出区间$(0,l)$以外，函数$f(x)$没有定义。那么，这样的函数是否也可以展开为傅里叶级数呢？

例 在区间$(0,l)$上定义的函数$f(x)=x$（图 37a 和图 37b 里的实线），试把它展开为傅里叶级数。

解1 不妨把$(0,\ l)$上的函数$f(x)=x$看作是图 37a 的周期

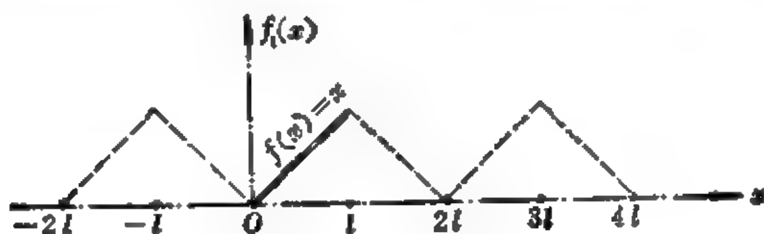


图 37a

函数$f_1(x)$的一段。这$f_1(x)$正是§25 例 2 所研究的周期函数，那里已把它展开为傅里叶余弦级数(25.9)即

$$f_1(x)=\frac{l}{2}-\frac{4l}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)\pi x}{l}$$

$$(-\infty<x<+\infty).$$

这$f_1(x)$在$(0,l)$上的一段正是本例的$f(x)$，所以

$$f(x)=\frac{l}{2}-\frac{4l}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)\pi x}{l}\quad(0<x<l).$$

解2 不妨把$(0,\ l)$上的函数$f(x)$看作是图 37b 的周期函数

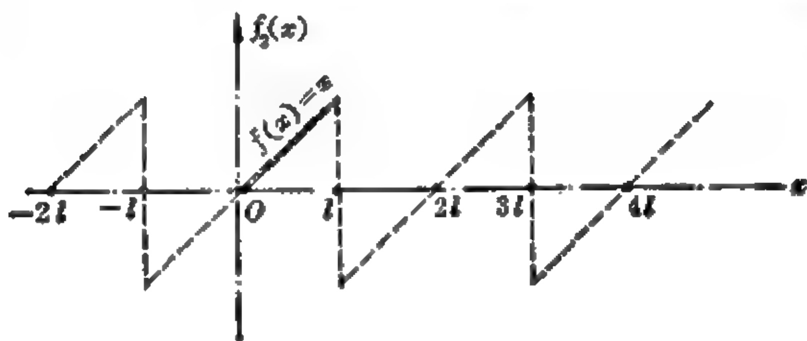


图 37b

$f_2(x)$的一段。这 $f_2(x)$正是 § 25 例 3 所研究的函数，那里已把它展开为傅里叶正弦级数(25.11)即

$$f_2(x)=\frac{2l}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin\frac{k\pi x}{l}\quad(-\infty<x<\infty).$$

这 $f_2(x)$在$(0,l)$上的一段正是本例的 $f(x)$，所以

$$f(x)=\frac{2l}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin\frac{k\pi x}{l}\quad(0<x<l).$$

讨论 解 1 和解 2 给出 $f(x)$的两个不同的傅里叶级数。哪一个对呢？应该说都对。从图 37*a* 和图 37*b* 可以看出，在$(0,l)$上，这两个级数都代表 $f(x)=x$(图中实线)，这就够了。至于两个级数在区间$(0,l)$以外不一致(图中虚线)，完全可以不管，这是因为函数 $f(x)$只定义在$(0,l)$上，而在区间$(0, l)$以外并无定义，随便怎么说都无所谓。

其实，只要把 $f(x)$当作某个周期函数在$(0, l)$上的一段就行，因而除去解 1 和解 2 之外，还可以有无数种解法。这样，如果没有附加的条件限制，定义在有限区间上的函数可以按无数种方式展开为傅里叶级数。

实际问题往往对函数 $f(x)$ 在边界 $x=0$ 和 $x=l$ 的行为提出限制(参看 § 30)，这叫作边界条件。

边界条件的一个例子是“$f(0)=0, f(l)=0$”。这正是(25.3)，正弦级数满足它。因此，在附加了这种边界条件的情况下，应当按照(25.1)和(25.2)把函数展开为傅里叶正弦级数。(在本节例题就是解 2.)如果采用“延拓”一词，也可以说，把函数 $f(x)$奇延拓到$(-l,0)$，然后以 $2l$ 为周期向整个实轴延拓，最后把延拓所得奇的周期函数按照(25.1)和(25.2)展开为傅里叶正弦级数。

边界条件的另一个例子是“$f'(0)=0, f'(l)=0$”。这正是

(25.6)，余弦函数满足它。因此，在附加了这种边界条件的情况下，应当按照(25.4)和(25.5)把函数展开为傅里叶余弦级数。在本节例题就是解 1.)采用“延拓”一词，也可以说，把函数 $f(x)$ 偶延拓到 $(-l,0)$，然后以 $2l$ 为周期向整个实轴延拓，最后把延拓所得偶的周期函数按照(25.4)和(25.5)展开为傅里叶余弦级数。

把区间 $(0,l)$ 上的函数展开为傅里叶级数时，可以满足给定的边界条件。幂级数展开式则难以作到这点。傅里叶级数展开在物理学中得到广泛应用的原因之一就在于此。

近年来，随着电子设备的数字化和集成化，在电子技术的许多领域里开始应用傅里叶-瓦耳希级数展开。就是说不用正弦函数与余弦函数作为基本函数，改用瓦耳希函数作为基本函数。参看附录四。

习　题

1. 要求下列函数 $f(x)$ 在它的定义区间的边界上为零。试根据这要求把 $f(x)$ 展开为傅里叶级数。

(1) $f(x)=\cos\alpha x$，定义在 $(0,\pi)$ 上。

(2) $f(x)=x^3$，定义在 $(0,\pi)$ 上。

(3) $f(x)=\alpha\left(1-\dfrac{x}{l}\right)$，定义在 $(0,l)$ 上。

(4) 在 $(0,l/2)$ 上，$f(x)=x$；在 $(l/2,l)$ 上，$f(x)=l-x$。

(5) $f(x)=1$，定义在 $(0,\pi)$ 上。

2. 要求下列函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 在函数定义区间的边界上为零。试根据这要求把 $f(x)$ 展开为傅里叶级数。

(1) 在 $(0,l/2)$ 上，$f(x)=\cos(\pi x/l)$；在 $(l/2,l)$ 上，$f(x)=0$。

(2) $f(x)=x^3$，定义在 $(0,\pi)$ 上。

(3) $f(x)=\alpha\left(1-\dfrac{x}{l}\right)$，定义在 $(0,l)$ 上。

(4) 在 $(0,l/2)$ 上，$f(x)=x$；在 $(l/2,l)$ 上，$f(x)=l-x$。

(5) $f(x)=1$，定义在 $(0,\pi)$ 上。

3. 在区间$(0, l)$上定义了函数$f(x)=x$。试根据条件"$f'(0)=0$, $f(l)=0$"把$f(x)$展开为傅里叶级数。

4. 二元函数$f(x,y)=xy$，定义在区域$-\pi<x<\pi$, $-\pi<y<\pi$上。试根据边界条件$f|_{x=-\pi}=f|_{x=+\pi}=0$把$f$对自变数$x$展为傅里叶级数，这个级数的"系数"仍然是$y$的函数。再根据边界条件$f|_{y=-\pi}=f|_{y=\pi}=0$把这个级数中的"系数"对自变数$y$展为傅里叶级数。这叫作双重傅里叶级数。

§27. 复数形式的傅里叶级数

基本函数族(24.2)是一些余弦和正弦函数，而按照欧勒公式，余弦和正弦函数可用虚指数的指数函数表出，

$$\cos\frac{k\pi x}{l}=\frac{1}{2}(e^{i\frac{k\pi x}{l}}+e^{-i\frac{k\pi x}{l}}),$$

$$\sin\frac{k\pi x}{l}=\frac{1}{2}(e^{i\frac{k\pi x}{l}}-e^{-i\frac{k\pi x}{l}}).$$

因此，代替(24.2)，完全可以采用

$$\cdots, e^{-i\frac{k\pi x}{l}}, \cdots, e^{-i\frac{2\pi x}{l}}, e^{-i\frac{\pi x}{l}}, 1, e^{i\frac{\pi x}{l}}, e^{i\frac{2\pi x}{l}}, \cdots, e^{i\frac{k\pi x}{l}}, \cdots \tag{27.1}$$

作为**基本函数族**，从而把周期函数$f(x)$展开为复数形式的傅里叶级数

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{k\pi x}{l}}. \tag{27.2}$$

请注意，这里k所取的数值不仅包括零和正整数，而且包括负整数。

不难验证，基本函数族(27.1)里的任意两个都是正交的，就是说，其中之一跟另一个的共轭复数的乘积在一个周期上的积分为零，即

$$\int_{-l}^{l} e^{i\frac{k\pi x}{l}}[e^{i\frac{n\pi x}{l}}]^* dx=0 \quad (k\neq n) \tag{27.3}$$

记号 * 表示共轭复数，$e^{i\frac{n\pi x}{l}}$ 的共轭复数就是 $e^{-i\frac{n\pi x}{l}}$。

于是，用 $[e^{i\frac{n\pi x}{l}}]^*$ 遍乘(27.2)的各项，并在一个周期上逐项积分，

$$\int_{-l}^{l} f(x)[e^{i\frac{n\pi x}{l}}]^* dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{-l}^{l} e^{i\frac{k\pi x}{l}}[e^{i\frac{n\pi x}{l}}]^* dx.$$

由于正交关系(27.3)，上式右边除去含有 c_n 的一项之外全为零，

$$\int_{-l}^{l} f(x)[e^{i\frac{n\pi x}{l}}]^* dx = c_n \int_{-l}^{l} e^{i\frac{n\pi x}{l}}[e^{i\frac{n\pi x}{l}}]^* dx = 2lc_n,$$

所以

$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(\xi)[e^{i\frac{n\pi \xi}{l}}]^* dx. \qquad (27.4)$$

这就是傅里叶系数的计算公式。分母 $2l$ 来自 $\int_{-l}^{l} e^{i\frac{n\pi x}{l}}[e^{i\frac{n\pi x}{l}}]^* dx$，这个积分的平方根就叫作 $e^{i\frac{n\pi x}{l}}$ 的模。这里，系数计算公式只有一个，这是比较方便的，不像 § 24 有(24.8)—(24.10)三个不同的公式。

对于复数形式的傅里叶级数，尽管 $f(x)$ 是实函数，它的傅里叶系数如(27.4)所给出却可能是复数。从(27.4)还可以看出，对于实函数，

$$c_{-n} = c_n^*. \qquad (27.5)$$

如果把复数形式的傅里叶级数 (27.2) 里的 $e^{i\frac{n\pi x}{l}}$ 和 $e^{-i\frac{n\pi x}{l}}$ 两项合并在一起看，那么，

$$\begin{aligned} c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}} + c_{-n} e^{-i\frac{n\pi x}{l}} &= c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}} + [c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}}]^* \\ &= 2\,\mathrm{Re}[c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}}] \\ &= 2|c_n|\cos\left(\frac{n\pi x}{l} + \arg c_n\right), \end{aligned}$$

这正是 n 次谐波。由此可以看到，$|c_n|$简单地是 n 次谐波的幅度的一半。这也是复数形式傅里叶级数的优点。

例 把 § 25 例 1 的矩形波(图 33)

$$f(x)=\begin{cases}+1 & 于(0,\pi)以及[2m\pi,(2m+1)\pi],\\ -1 & 于(-\pi,0)以及[(2m-1)\pi,2m\pi].\end{cases}$$

展开为复数形式的傅里叶级数。

解 按照(27.2)和(27.4),

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{ikx},$$

其中系数

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\xi)e^{-ik\xi}d\xi=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}-e^{-ik\xi}d\xi+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}e^{-ik\xi}d\xi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{ik}e^{-ik\xi}\right]\Bigg|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{ik}e^{-ik\xi}\right]\Bigg|_{0}^{\pi}$$

$$=\frac{1}{2\pi ik}[1-(-1)^k]+\frac{1}{2\pi ik}[-(-1)^k+1]$$

$$=\begin{cases}0 & (k\ 为偶数),\\ \dfrac{2}{\pi i(2n+1)} & (k\ 为奇数\ 2n+1).\end{cases}$$

于是得到结果

$$f(x)=\frac{2}{\pi i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)}e^{i(2n+1)x}.$$

用实数形式的傅里叶级数时，奇函数和偶函数分别展为正弦级数和余弦级数。但用复数形式的傅里叶级数时，奇函数和偶函数不能在级数中直接体现出来。在这一方面，复数形式不如实数形式。

习　题

1. 矩形波 $f(x)$，在 $(-T/2, T/2)$ 这个周期上可表为

$$f(x)=\begin{cases}0 & 在(-T/2,-\tau/2)上，\\ H & 在(-\tau/2,\tau/2)上，\\ 0 & 在(\tau/2,T/2)上。\end{cases}$$

试把它展开为复数形式的傅里叶级数。

2. 锯齿波 $f(x)$，在 $(0, T)$ 这个周期上可表为

$$f(x)=\frac{H}{T}x.$$

试把它展开为复数形式的傅里叶级数。

3. 在实数形式的傅里叶级数(24.7)里，把 $\cos\frac{k\pi x}{l}$ 和 $\sin\frac{k\pi x}{l}$ 按照欧勒公式用虚指数的指数函数 $e^{i\frac{k\pi x}{l}}$ 和 $e^{-i\frac{k\pi x}{l}}$ 表出，验证实数形式的傅里叶级数 (24.7) 就化为复数形式的傅里叶级数 (27.2)，而且 $c_k=\frac{1}{2}(a_k-ib_k)$，$c_{-k}=\frac{1}{2}(a_k+ib_k)$，其中 $k>0$。

第七章 傅里叶积分

§ 28. 非周期函数的傅里叶积分

上一章把周期函数分解为一系列谐函数（正弦和余弦函数）。在物理上，这就是把周期性的机械振动分解为一系列谐振动，把周期性的交变电压或电流分解为一系列谐变电压或电流，如此等等。

那么，非周期性的机械振动是否也能分解为谐振动呢？非周期性的交变电压或电流是否也能分解为谐变电压或电流呢？从数学上说，这个问题就是：非周期函数是否也能分解为谐函数？

周期函数和非周期函数各自的特点是什么？原来，在自变数的变化过程中，周期函数有规则地不断循环重复，自变数每增长一定数值（这个数值就是所谓周期），周期函数就重复变化一次。至于非周期函数则并不循环重复。

但是，"周期的"和"非周期的"这两个矛盾着的方面"因为一定的条件而各向着和自己相反的方面转化了去"(《矛盾论》)。设想周期函数的周期 $2l$ 不断增大而 $\to\infty$，这是说，自变数每增长 ∞，函数才重复变化一次。换句话说，不管自变数增长什么样的有限数值，函数并不重复变化，它已转化为非周期函数！

因此，周期函数的傅里叶级数展开式，在 $l\to\infty$ 的极限情况下，就成为非周期函数的展开式。下面仔细研究一下这个极限过程。

傅里叶级数展开的基本函数族(24.2)可改写为

$$\cos\omega x, \quad \sin\omega x,$$

其中 ω 是个不连续的参数，它跳跃式地依次取下列数值

$$0,\frac{\pi}{l},\frac{2\pi}{l},\frac{3\pi}{l},\cdots,\frac{k\pi}{l},\cdots \tag{28.1}$$

且无限增大。ω 每次跳跃的增量

$$\Delta\omega=\frac{\pi}{l}. \tag{28.2}$$

这样，周期函数 $f(x)$ 的傅里叶级数(24.7)就改写为

$$f(x)=a_0+\sum_{\omega}^{\infty}a_\omega\cos\omega x+\sum_{\omega}^{\infty}b_\omega\sin\omega x. \tag{28.3}$$

记号$\sum\limits_{\omega}^{\infty}$表示 ω 依次取(28.1)那些数值且无限增大。傅里叶系数公式(24.8)—(24.10)也改写为

$$\begin{cases}a_\omega=\dfrac{1}{\delta_\omega l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos\omega\xi d\xi,\\ b_\omega=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(\xi)\sin\omega\xi d\xi.\end{cases} \tag{28.4}$$

现在，令 $l\to\infty$。于是 ω 每次跳跃的增量 $\Delta\omega=\frac{\pi}{l}\to 0$. 这是说，$\omega$ 不再跳跃式变化，而是连续地变化。(28.3)的$\sum\limits_{\omega}$本来是按不连续的 ω 求和，现在成为按连续的 ω "求和"。这种"求和"实际上是积分，求和转化为积分!

那么，级数(28.3)究竟转化成怎样的积分呢?

先看(28.3)右边第一项，

$$\lim_{l\to\infty}a_0=\lim_{l\to\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(\xi)d\xi.$$

如果$\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)d\xi$ 有限，则

$$\lim_{l\to\infty}a_0=\lim_{l\to\infty}\frac{1}{2l}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)d\xi=0.$$

再看(28.3)右边第二部分，即余弦项部分

$$\lim_{l\to\infty}\sum_{\omega}^{\infty}\left[\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos\omega\xi d\xi\right]\cos\omega x$$

$$=\lim_{l\to\infty}\sum_{\omega}^{\infty}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos\omega\xi d\xi\right]\cos\omega x\Delta\omega$$

$$=\int_{0}^{\infty}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cos\omega\xi d\xi\right]\cos\omega xd\omega.$$

同理，(28.3)右边第三部分，即正弦项部分的极限是

$$\int_{0}^{\infty}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\sin\omega\xi d\xi\right]\sin\omega xd\omega.$$

这样，在 $l\to\infty$ 时，傅里叶级数成为

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}A(\omega)\cos\omega xd\omega+\int_{0}^{\infty}B(\omega)\sin\omega xd\omega, \tag{28.5}$$

其中

$$\begin{cases}A(\omega)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\omega xdx,\\ B(\omega)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin\omega xdx.\end{cases} \tag{28.6}$$

(28.5)右边的积分叫作非周期函数 $f(x)$ 的**傅里叶积分**，$A(\omega)$ 和 $B(\omega)$ 则叫作 $f(x)$ 的**傅里叶变换式**。(28.6)就是傅里叶变换式的计算公式。

跟傅里叶级数的情况类似，奇函数 $f(x)$ 的傅里叶积分是**傅里叶正弦积分**

$$f(x)=\int_{0}^{\infty}B(\omega)\sin\omega xd\omega, \tag{28.7}$$

其傅里叶正弦变换式

$$B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}f(x)\sin\omega xdx. \tag{28.8}$$

傅里叶正弦积分(28.7)满足条件

$$f(0)=0. \tag{28.9}$$

值得注意,(28.7)和(28.8)两个式子，除了常数因子的不同，对变数 x 和 ω 是对称的。

同样,偶函数 $f(x)$ 的傅里叶积分是傅里叶余弦积分

$$f(x)=\int_0^\infty A(\omega)\cos\omega x d\omega, \tag{28.10}$$

其傅里叶余弦变换式

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x dx. \tag{28.11}$$

傅里叶余弦积分(28.10)满足条件

$$f'(0)=0. \tag{28.12}$$

(28.10)和(28.11)两个式子,除了常数因子的不同,对变数 x 和 ω 是对称的。

例 1　研究矩形脉冲(图 38)

$$f(t)=\begin{cases}0 & (t<-T),\\ h & (-T<t<T),\\ 0 & (T<t)\end{cases}$$

的频谱。

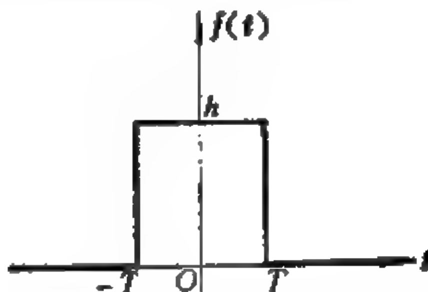


图 38

解　$f(t)$ 是偶函数，可按(28.10)和(28.11)展为傅里叶余弦积分

$$f(t)=\int_0^\infty A(\omega)\cos\omega t d\omega,$$

其傅里叶变换

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(t)\cos\omega t dt=\frac{2}{\pi}\int_0^T h\cos\omega t dt=\frac{2h}{\pi}\frac{\sin\omega T}{\omega}.$$

拿本例跟 § 24 例的半波整流电压比较。半波整流电压是周期函数,展开为傅里叶级数,包含直流、基波和偶次谐波等成分,其频率是一些分立的数值，就是说，它的频谱是线谱(图 29)。矩形

脉冲为非周期函数，展开为傅里叶积分，ω 从 0 到 ∞，什么频率都有，它的频谱是连续谱(图 39)。脉冲电波既然含有一切频率，它到达任何无线电接收机(不管接收机调谐到哪一个频率)，都会引起噪声。

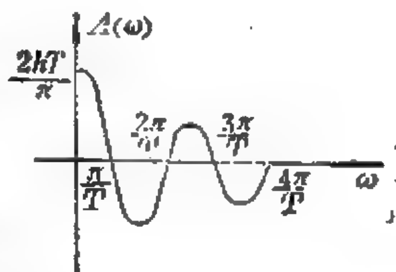


图 39

例 2 由 $2N$ 个(N 是正整数)正弦波组成有限的正弦波列

$$f(t)=\begin{cases}0 & \left(t<-N\dfrac{2\pi}{\omega_0}\right),\\ A\sin\omega_0 t & \left(-N\dfrac{2\pi}{\omega_0}<t<N\dfrac{2\pi}{\omega_0}\right),\\ 0 & \left(N\dfrac{2\pi}{\omega_0}<t\right).\end{cases}$$

研究这个有限正弦波列的频谱。

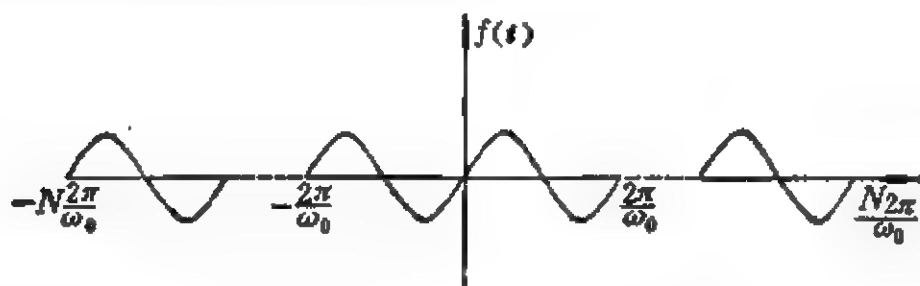


图 40

解 $f(t)$ 是奇函数(图 40)，可按(28.7)和(28.8)展开为傅里叶正弦积分

$$f(t)=\int_0^{\infty}B(\omega)\sin\omega t d\omega,$$

其傅里叶变换

$$B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(t)\sin\omega t dt=\frac{2A}{\pi}\int_0^{N\frac{2\pi}{\omega_0}}\sin\omega_0 t\sin\omega t dt$$

$$=-\frac{A}{\pi}\int_0^{N\frac{2\pi}{\omega_0}}[\cos(\omega+\omega_0)t-\cos(\omega-\omega_0)t]dt$$

$$=-\frac{A}{\pi}\left[\frac{\sin(\omega+\omega_0)t}{\omega+\omega_0}-\frac{\sin(\omega-\omega_0)t}{\omega-\omega_0}\right]\Bigg|_0^{N\frac{2\pi}{\omega_0}}$$

$$=\frac{A}{\pi}\sin\left(\frac{\omega}{\omega_0}N2\pi\right)\left[-\frac{1}{\omega+\omega_0}+\frac{1}{\omega-\omega_0}\right]$$

$$=\frac{2A\omega_0}{\pi(\omega^2-\omega_0^2)}\sin\left(\frac{\omega}{\omega_0}N2\pi\right).$$

这个频谱见图41。在 ω_0 有一尖峰，高度为 $(2N/\omega_0)A$。在两侧 ω 相差为 $\omega_0/2N$ 之处降为零。按大体来说，可以认为频谱集中在 ω_0 的左右 $\omega_0/2N$ 的范围内。在理论上，只要 N 是有限数值，就不是只有单个圆频率 ω_0。不过，在实际上，如果 N 相当大，频率分散的范围 $\omega_0/2N$ 相当小，也就可以近似当作只有单个圆频率 ω_0。

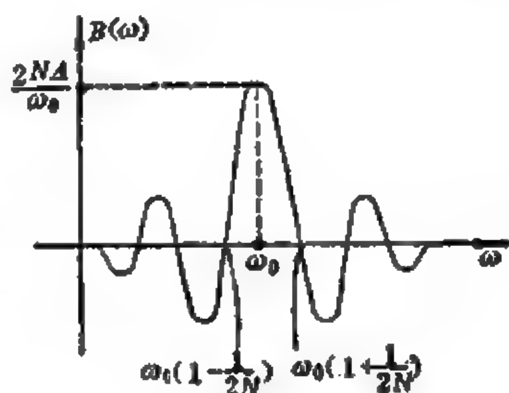


图 41

如果不从傅里叶级数(24.7)出发，改从复数形式的傅里叶级数(27.2)出发，同样通过 $l\to\infty$ 的极限过程，它就转化为非周期函数 $f(x)$ 的复数形式傅里叶积分

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}C(\omega)e^{i\omega x}d\omega, \tag{28.13}$$

其中 $C(\omega)$ 也叫作函数 $f(x)$ 的傅里叶变换式。复数形式傅里叶级数的系数公式(27.4)通过 $l\to\infty$ 的极限过限则转化为傅里叶变换式 $C(\omega)$ 的计算公式

$$C(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)[e^{i\omega x}]^*dx. \tag{28.14}$$

公式(28.13)和(28.14)有时也改写为较对称的形式

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{f}(\omega)e^{i\omega x}d\omega, \tag{28.15}$$

$$\bar{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)[e^{i\omega x}]^*dx. \qquad (28.16)$$

例3 把例1的矩形脉冲 $f(t)$ 展为复数形式的傅里叶积分。

解 应用(28.15)和(28.16),

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega,$$

$$\bar{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-T}^{T}he^{-i\omega t}dt$$

$$=-\frac{h}{\sqrt{2\pi}\,i\omega}\Big[e^{-i\omega t}\Big]_{-T}^{T}=\frac{h}{\sqrt{2\pi}\,i\omega}[e^{i\omega T}-e^{-i\omega T}]$$

$$=\frac{\sqrt{2}\,h}{\sqrt{\pi}}\frac{\sin\omega T}{\omega}.$$

这样,例1的矩形脉冲展为复数形式的傅里叶积分

$$f(t)=\frac{h}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega T}{\omega}e^{i\omega t}d\omega.$$

把(28.15)两边对 x 求导数,$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{f}(\omega)i\omega e^{i\omega x}d\omega$,这是说,

$$\text{导数 } f'(x) \text{ 的傅里叶变换式}=i\omega\bar{f}(\omega). \qquad (28.17)$$

把 $f'(x)$ 记作 $g(x)$,并把(28.17)反过来用,则

$$\text{不定积分}\int g(x)dx \text{ 的傅里叶变换式}=\frac{1}{i\omega}\bar{g}(\omega). \qquad (28.18)$$

(27.17)和(27.18)跟拉普拉斯变换的(21.14)和(21.17)很类似。此外,还有类似的延迟定理、位移定理和卷积定理。

延迟定理 如 $f(x)$ 的傅里叶变换式是 $C(\omega)$,则 $f(x-x_0)$ 的傅里叶变换式是 $C(\omega)e^{-i\omega x_0}$。

位移定理 如 $f(x)$ 的傅里叶变换式是 $C(\omega)$,则 $e^{i\omega_0 x}f(x)$ 的傅里叶变换式是 $C(\omega-\omega_0)$.

卷积定理(折积定理) 如 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的傅里叶变换式分

别是 $C_1(\omega)$ 和 $C_2(\omega)$，则 $\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi) d\xi$ 的傅里叶变换式是 $C_1(\omega)C_2(\omega)$.

以上研究的是一维无界空间中的非周期函数。现在说一说三维无界空间中的非周期函数 $f(x, y, z)$。先对自变数 x 把 $f(x, y, z)$ 展开为傅里叶积分，傅里叶变换式 $\bar{f}(k_1; y, z)$ 是 y 和 z 的函数。再把 $\bar{f}(k_1; y, z)$ 对 y 展开为傅里叶积分，傅里叶变换式 $\bar{f}(k_1, k_2; z)$ 是 z 的函数。最后把 $\bar{f}(k_1, k_2; z)$ 对 z 展开为傅里叶积分。这样就得到三重傅里叶积分

$$f(x, y, z) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(k_1, k_2, k_3) e^{i(k_1 x + k_2 y + k_3 z)} dk_1 dk_2 dk_3.$$

通常引用三个坐标轴方向的单位矢量 $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$ 和 $\boldsymbol{i}_3$，以及矢量

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}_1 x + \boldsymbol{i}_2 y + \boldsymbol{i}_3 z, \qquad \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}_1 k_1 + \boldsymbol{i}_2 k_2 + \boldsymbol{i}_3 k_3,$$

就把三重傅里叶积分写成

$$f(\boldsymbol{r}) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} dk_1 dk_2 dk_3, \tag{28.19}$$

其中三重傅里叶变换式

$$\bar{f}(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} f(\boldsymbol{r}) [e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}]^* dx dy dz. \tag{28.20}$$

公式(28.19)和(28.20)有时也改写为较对称的形式

$$f(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint \bar{f}(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} dk_1 dk_2 dk_3, \tag{28.21}$$

$$\bar{f}(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint f(\boldsymbol{r}) [e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}]^* dx dy dz. \tag{28.22}$$

习　　题

1. 把单个锯齿脉冲 $f(t)$ 展开为傅里叶积分，

$$f(t)=\begin{cases}0 & (t<0),\\ kt & (0<t<T),\\ 0 & (T<t).\end{cases}$$

2. 把振幅按双曲线衰减的振动函数 $f(t)$ 展开为傅里叶积分，

$$f(t)=\frac{\sin\Omega t}{t}\quad (\Omega \text{ 为常数}).$$

试拿本题的频谱跟图 38 比较，又拿本题的 $f(t)$ 跟图 39 比较。比较的结果说明什么问题？

3. 把下列脉冲 $f(t)$ 展开为傅里叶积分，

$$f(t)=\begin{cases}0 & (t<-T),\\ -h & (-T<t<0),\\ h & (0<t<T),\\ 0 & (T<t).\end{cases}$$

注意在半无界区间 $(0,\infty)$ 上，本例的 $f(t)$ 跟例 1 的 $f(t)$ 相同。

4. $f(t)$ 是定义在半无界区间 $(0,\infty)$ 上的函数，

$$f(t)=\begin{cases}h & (0<t<T),\\ 0 & (T<t).\end{cases}$$

(1)在边界条件 $f'(0)=0$ 下，把 $f(t)$ 展为傅里叶积分；(2)在边界条件 $f(0)=0$ 下，把 $f(t)$ 展为傅里叶积分。

5. 在边界条件 $f(0)=0$ 下，把定义在 $(0,\infty)$ 上的函数 $f(x)=e^{-\lambda x}$ 展为傅里叶积分。

6. 在边界条件 $f'(0)=0$ 下，把定义在 $(0,\infty)$ 上的函数 $f(x)=1-H(x-a)$ 展为傅里叶积分。

7. 在实数形式的傅里叶积分 (28.5) 里，把 $\cos\omega x$ 和 $\sin\omega x$ 按照欧勒公式用虚指数的指数函数 $e^{i\omega x}$ 和 $e^{-i\omega x}$ 表出，验证实数形式的傅里叶积分 (28.5) 就化为复数形式的傅里叶积分 (28.13)，而且 $C(\omega)=\frac{1}{2}[A(\omega)-iB(\omega)]$，$C(-\omega)=\frac{1}{2}[A(\omega)+iB(\omega)]$，其中 $\omega>0$。

8. 验证延迟定理、位移定理和卷积定理。

§ 29. δ 函数和它的傅里叶积分

为了突出主要因素，在物理学中常常运用质点、点电荷、瞬时力等抽象模型。"一切科学的(正确的、郑重的、非瞎说的)抽象，都更深刻、更正确、更完全地反映着自然。"(列宁:《黑格尔〈逻辑学〉一书摘要》第 101 页)质点的体积为零，所以它的密度(质量/体积)为无限大，但密度的体积积分（即总质量）却又是有限的。点电荷的体积为零，所以它的电荷密度(电量/体积)为无限大，但电荷密度的体积积分(即总电量)却又是有限的。瞬时力的延续时间为零，而力的大小为无限大，但力的时间积分(即冲量)是有限的。为了描写这一类抽象概念，定义 δ 函数如下：

$$\delta(x-x_0)=\begin{cases}0 & (x-x_0\neq 0),\\ \infty & (x-x_0=0);\end{cases} \tag{29.1}$$

$$\int_a^b \delta(x-x_0)dx=\begin{cases}0 & (a,b\text{ 都}<x_0\text{ 或都}>x_0),\\ 1 & (a<x_0<b).\end{cases} \tag{29.2}$$

(29.2)规定了 δ 函数的量纲$[\delta(x-x_0)]=1/[x]$. 图 42 是 δ 函数的示意图。曲线的"峰"无限高，但是无限窄，曲线下的面积是有限值 1。这样，位于 $\boldsymbol{r}_0$ 而质量为 m 的质点的密度可记作 $m\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)$ 或简写为 $m\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$；位

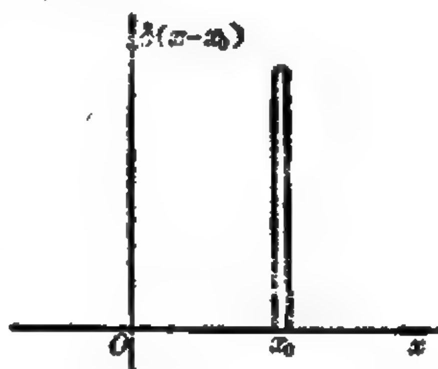


图 42

于$\boldsymbol{r}_0$ 而电量为 q 的点电荷的电荷密度可记作 $q\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)$ 或简写为$q\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$；作用于瞬时 t_0 而冲量为 K 的瞬时力可记作 $K\delta(t-t_0)$。

$\delta(x-0)$ 可简单地记作 $\delta(x)$. 由定义 (29.1) 和 (29.2) 或图

42，容易看出，$\delta(x)$是偶函数，它的导数$\delta'(x)$则是奇函数，

$$\delta(-x)=\delta(x), \qquad \delta'(-x)=-\delta'(x). \tag{29.3}$$

其实，就是连续分布的质量、电荷，或持续作用的力，也可以用δ函数表出。现在用从$t=a$持续到$t=b$的作用力$F(t)$为例加以说明。把时间区间$[a,\ b]$划分为许许多多小段。在某个从τ到$\tau+d\tau$的短时间段上，力$F(t)$的冲量是$F(\tau)d\tau$，既然$d\tau$很短，不妨把这段短时间上的作用力看作瞬时力，记作$F(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$.这许许多多瞬时力的累计就是持续力$F(t)$，即

$$F(t)=\sum_{\tau}F(\tau)\delta(t-\tau)d\tau=\int_a^b F(\tau)\delta(t-\tau)d\tau. \tag{29.4}$$

这式也可用下列演算加以证实。在区间(a,b)上任取某个t_0，

$$\begin{aligned}\int_a^b F(\tau)\delta(t_0-\tau)d\tau&=\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon}F(\tau)\delta(\tau-t_0)d\tau\\&=\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon}F(t_0)\delta(\tau-t_0)d\tau\\&=F(t_0)\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon}\delta(\tau-t_0)d\tau=F(t_0),\end{aligned}$$

式中的ε是某个小量。上式的t_0是任意选取的，这是说，上式对区间(a,b)上的任意时刻都成立，即(29.4)成立。

现在把δ函数展开为复数形式的傅里叶积分。按照（28.13）和(28.14)，

$$\delta(x)=\int_{-\infty}^{\infty}C(\omega)e^{i\omega x}d\omega,$$

$$C(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)e^{-i\omega x}dx=\frac{1}{2\pi}\,e^{-i\omega x}\Big|_{x=0}=\frac{1}{2\pi}.$$

这就给出δ函数的傅里叶积分

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}d\omega. \tag{29.5}$$

把(29.5)右边的积分算出来，还可以把δ函数表为某种初等

函数的极限，如(29.6)和(29.7)。先直接计算(29.5)右边的积分，

$$\delta(x)=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-k}^{k}e^{i\omega x}d\omega=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{\pi}\left(\frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2ix}\right)$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\sin Kx}{x}. \tag{29.6}$$

这个极限严格地说并不存在。为了改善积分的收敛性，在被积函数的指数上附加以小量 $\varepsilon\omega$ 或 $-\varepsilon\omega$，

$$\delta(x)=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{0}e^{(\varepsilon+ix)\omega}d\omega+\int_{0}^{\infty}e^{(-\varepsilon+ix)\omega}d\omega\right]$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon+ix}+\frac{1}{\varepsilon-ix}\right)=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+x^2}. \tag{29.7}$$

(29.6)的极限虽然不存在，还是常常被引用。这是因为它是在积分的意义上来理解的。例如，对于 $a<0<b$，

$$\lim_{K\to+\infty}\int_a^b\frac{1}{\pi}\frac{\sin Kx}{x}dx=\lim_{K\to+\infty}\int_a^b\frac{1}{\pi}\frac{\sin Kx}{Kx}d(Kx)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin y}{y}dy=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin y}{y}dy.$$

根据§17例8，$\int_0^{\infty}\frac{\sin y}{y}dy=\frac{\pi}{2}$。因此，

$$\lim_{K\to+\infty}\int_a^b\frac{1}{\pi}\frac{\sin Kx}{x}dx=1,$$

跟 δ 函数的定义(29.2)相符。

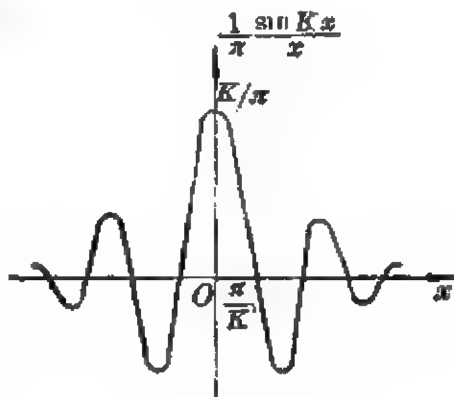


图 43

图 43 描画了函数 $\frac{1}{\pi}\frac{\sin Kx}{x}$ 的曲线。设想 $K\to\infty$. 在 $x=0$ 处的“峰”的高度 K/π 无限增高，“峰”的宽度 π/K 无限变窄，“峰”下的面积 $(K/\pi)(\pi/K)=1$。在 $x\neq0$ 处，曲线正负振荡的间距无限缩短，从而在任一有限区间(不包含 $x=0$) 上的积分性质同于零。可见，在 $K\to\infty$ 时，这根曲线的积分性

质符合 δ 函数的定义。

最后，谈一下函数 $\delta[\varphi(x)]$。按定义，

$$\delta[\varphi(x)]=\begin{cases}0 & (\varphi\neq 0),\\ \infty & (\varphi=0).\end{cases}$$

如果 $\varphi(x)=0$ 只有单根 $x_k(k=1,2,3,\cdots)$，则

$$\delta[\varphi(x)]=\begin{cases}0 & (x\neq x_k),\\ \infty & (x=x_k).\end{cases}$$

由此得知

$$\delta[\varphi(x)]=\sum_k c_k\delta(x-x_k). \tag{29.8}$$

为了求出系数 c_k，在区间$[x_n-\varepsilon, x_n+\varepsilon]$上把上式积分，

$$\int_{x_n-\varepsilon}^{x_n+\varepsilon}\delta[\varphi(x)]dx=\sum_k c_k\int_{x_n-\varepsilon}^{x_n+\varepsilon}\delta(x-x_k)dx.$$

上式右边除去含 c_n 的一项之外全为零，所以

$$c_n=\int_{x_n-\varepsilon}^{x_n+\varepsilon}\delta[\varphi(x)]\,dx=\int_{\varphi(x_n-\varepsilon)}^{\varphi(x_n+\varepsilon)}\delta[\varphi(x)]\frac{d\varphi}{\varphi'(x)}$$

$$=\frac{1}{\varphi'(x_n)}\int_{\varphi(x_n-\varepsilon)}^{\varphi(x_n+\varepsilon)}\delta[\varphi(x)]d\varphi.$$

如果 $\varphi'(x_n)>0$，则 $\varphi(x_n+\varepsilon)>\varphi(x_n-\varepsilon)$，积分等于 1；如果 $\varphi'(x_n)<0$，则 $\varphi(x_n+\varepsilon)<\varphi(x_n-\varepsilon)$，积分等于 -1。总之，$c_n=1/|\varphi'(x_n)|$。于是，(29.8)终于被写成

$$\delta[\varphi(x)]=\sum_k\frac{\delta(x-x_k)}{|\varphi'(x_k)|}. \tag{29.9}$$

例如

$$\delta(ax)=\frac{\delta(x)}{|a|},\qquad \delta(x^2-a^2)=\frac{\delta(x+a)+\delta(x-a)}{2|x|}. \tag{29.10}$$

在后一式中，令 $a\to 0$ 还可得

$$\delta(x^2)=\frac{\delta(x)}{|x|}. \tag{29.11}$$

习　题

1. 验证 $H'(t-\tau)=\delta(t-\tau)$，求 $\delta(t-\tau)$的拉普拉斯变换像函数。
2. 验证§28 例2的频谱 $B(\omega)$（图41），于 $N\to\infty$ 就成为 $A\delta(\omega-\omega_0)-A\delta(\omega+\omega_0)$。阐释这结果的物理意义。
3. 把 $\delta(x)$展为实数形式的傅里叶积分。

第三篇　数学物理方程

第八章　定解问题

§30. 定解问题

质点力学研究质点的位移怎样随着时间而变化，电路问题研究电流或电压怎样随着时间而变化。总之，是研究某个物理量（位移、电流或电压）怎样随着时间而变化。这往往导致以时间为自变数的常微分方程（质点的运动方程、电路微分方程）。

但是，在科学技术和生产实际中还常常要求研究静电场的电场强度或电势在空间中的分布，研究电磁波的电场强度和磁感应强度在空间和时间中的变化情况，研究声场中的声压在空间和时间中的变化情况，研究半导体扩散工艺中杂质浓度（单位体积里的杂质的量）在硅片中怎样分布并怎样随着时间而变化，等等。总之，是研究某个物理量（电场强度、电势、磁感应强度、声压、杂质浓度）在空间的某个区域中的分布情况，以及它怎样随着时间而变化。这些问题中的自变数就不仅仅是时间，而且还有空间坐标。

解决这些问题，当然首先必须掌握所研究的物理量在空间和时间中变化的规律，这就是物理课程中所研究并加以论述的**物理规律**，它是解决问题的依据。物理规律反映同一类物理现象的共同规律，即矛盾的**普遍性**，亦即**共性**。

可是，"各种物质运动形式中的矛盾，都带特殊性"。（《矛盾论》）同一类物理现象中，各个具体问题又各有其**特殊性**，即**个性**。物理

规律并不反映这种个性。

例如，剧院内壁如果采用反射较强的普通砖墙，声波在剧院内壁多次反射，形成“余音不绝”，前面的声音还没消失，后面的声音又来了，前后混杂，使人无法听清楚。实际上，剧院内壁总是镶有适当的吸声材料，声波传到壁上，大部分被吸收，很少被反射，消除了“余音不绝”，听起来就比较清楚了。在这两种情况下，虽然声波是按照同样的规律在剧院空间中传播，内壁材料的吸声性能对于剧院的声学质量却有极大的关系。

波长为厘米或毫米数量级的微波常用空心金属管道传输，这种管道叫作波导。波导内壁的电阻消耗微波能量。内壁材料的电阻率不同，能量损耗率也就不同，微波传输效率随之而异，尽管微波是按照同样的规律（电磁场的麦克斯韦方程组）在波导里的空间中传播。现代的大型电子直线加速器，即使采用最纯的铜制做波导，微波损耗仍然嫌大，加速器无法连续工作而只能脉冲式地工作。近年已研制出用超导电材料（在极低的温度下，电阻率实际为零的材料）作内壁的电子直线加速器波导，这才有可能连续工作。

在半导体扩散工艺中，有“恒定表面浓度扩散”和“限定源扩散”。前者是用携带着充足杂质的氮气包围硅片，使杂质源源不绝地通过硅片表面向硅片内部扩散，而硅片表面的杂质浓度保持一定。后者是只让硅片表层已有的杂质向硅片深部扩散，但不让新的杂质通过硅片表面进入硅片。在这两种情况下，虽然杂质按照同样的规律在硅片中扩散，硅片表面状况的不同使得扩散结果也不同。

这样，为了解算具体问题，还必须考虑到所研究的区域的边界处在怎样的状况下，或者，换个说法，必须考虑到研究对象处在怎样的特定“环境”中。我们知道，“超距作用”是不存在的，物理的联系总是要通过中介的（这在物理学中引起各种场的概念），周围“环

境”的影响总是通过边界才传给研究对象，所以周围“环境”的影响体现于边界所处的物理状况，即边界条件。

还有，研究问题不能割断历史。

例如，弦乐器的弦的振动有它的“历史”。两根同样的弦，其一在薄刀背敲击下发出的声音比较刺耳，另一在宽锤敲击下或手指的弹拨下发出的声音比较和谐。虽然这两根弦的振动是按照同样的规律进行的，但由于“历史”不同，即在敲击的那个所谓“初始”时刻的振动情况不一样，后来的振动情况也就不一样。

硅片里的杂质扩散也有它的“历史”。两块硅片，原来的杂质浓度分布不同，在同一工艺条件下进行扩散，扩散的结果也不一样。

这样，为了解算随着时间而发展变化的问题，还必须考虑到研究对象的特定“历史”，即它在早先某个所谓“初始”时刻的状态，即初始条件。

边界条件和初始条件反映了具体问题的特定环境和历史，即问题的特殊性，亦即个性。因此，问题的完整提法应当是：在给定的边界条件和初始条件下，根据已知的物理规律，解算某个物理量 u 在给定的区域里随着地点(x, y, z)和时刻 t 怎样变化，即解算函数 $u(x, y, z, t)$。

这个普遍性和特殊性，共性和个性的关系，读者其实早有接触，在力学和电学里，求解质点的运动方程或电路微分方程时出现积分常数，而积分常数就是利用初始条件确定的。只不过现在不仅仅有时间这一个自变数，而且还有空间坐标作为自变数，因而除了初始条件以外还要边界条件，问题略为复杂一些而已。

现在应当说一说物理规律的数学表示。物理规律，用数学的语言“翻译”出来，不过是物理量 u 在空间和时间中的变化规律，换句话说，它是物理量 u 在各个地点和各个时刻所取的值之间的联系。正是这种联系使我们有可能从边界条件和初始条件去推算 u

在任意地点(x,y,z)和任意时刻 t 的值 $u(x,y,z,t)$。而物理的联系总是要通过中介的，它的直接表现只能是 u 在邻近地点和邻近时刻所取的值之间的关系式。这种邻近地点、邻近时刻之间的关系式往往是偏微分方程(参看下节)。物理规律用偏微分方程表达出来，叫作**数学物理方程**。数学物理方程，作为同一类物理现象的共性，跟具体条件无关；具体问题的个性则由边界条件和初始条件反映。

在数学上，边界条件和初始条件合称为**定解条件**，数学物理方程本身（不连带定解条件）叫作**泛定方程**。定解条件提出具体问题，泛定方程提供解决问题的依据，作为一个整体，叫作**定解问题**。

从实际中来的定解问题还要回到实际中去，回答实际所提出的问题。这就要求定解问题是适定的，即(1)有解，(2)解是唯一的，(3)解是稳定的，就是说，如果定解条件的数值有细微的改变，解的值也只作细微的改变。由于测量不可能绝对精密，来自实际的定解条件不免带有细微的误差，所以不稳定的解没有实际价值。一个定解问题如果不是适定的，那就应当修改问题的提法使其适定。

§31. 数学物理方程的导出

本节讨论把物理规律"翻译"为数学物理方程的工作。希望读者不要只看到下面所导出的数学物理方程，而且要掌握这种"翻译"方法。

既然物理规律说的是邻近地点和邻近时刻之间的联系，它不牵涉边界条件或初始条件，推导数学物理方程也就用不着考虑边界上的物理条件和系统的初始状态。

数学物理方程的**导出步骤**如下：首先当然要确定研究哪一个

物理量 u. 从所研究的系统中划出一个小部分，根据物理规律分析邻近部分和这个小部分的相互作用(抓住主要的作用，略去不重要的因素)，这种相互作用在一个短时间段里怎样影响物理量 u. 把这种影响用算式表达出来，经简化整理就是数学物理方程。

下面导出的数学物理方程分别属于三种类型，即波动方程(一——六，十四)、输运方程(七、八)和稳定场方程(九——十三)。这大致对应于数学上的分类，即双曲型、抛物型和椭圆型偏微分方程。

(一) 均匀弦的微小横振动

演奏弦乐器(例如二胡，提琴)的人用弓在弦上来回拉动。弓所接触的只是弦的很小一段，似乎应该只引起这个小段的振动，实际上振动总是传播到整根弦，弦的各处都振动起来。

振动是怎样传播的呢？不妨认为弦是柔软的，就是说在放松的条件下，把弦弯成任意的形状，它都保持静止。可是在绷紧以后，相邻小段之间有拉力，这种拉力叫作弦中张力。张力沿着弦的切线方向。由于张力作用，一个小段的振动必定带动它的邻段，而邻段又带动它自己的邻段，……。这样，一个小段的振动必然传播到整根弦。这种振动传播现象叫作波。

弦的振动是一种机械运动。机械运动的基本定律是质点力学的 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$. 然而弦并不是质点，所以 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$ 对整根弦并不合用。但整根弦可以细分为许多极小的小段，每个小段可以抽象为质点，就是说，整根弦由许多互相牵连的质点组成，对每个质点即每个小段可以应用 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$.

弦乐器所用的弦往往是很轻的，它的重量只有张力的几万分之一。跟张力相比，弦的重量完全可以略去。这样，真实的弦就抽象为“没有重量的”弦。“当思维从具体的东西上升到抽象的东西

时，它不是离开——如果它是正确的——真理，而是接近真理。"（列宁：《黑格尔〈逻辑学〉一书摘要》第 101 页）

把没有重量的弦绷紧，它在不振动时是一根直线，就取这直线作为 x 轴(图 44)。把弦上各点的横向位移记作 u. 位移 u 在弦上各点是不一样的，即 u 有赖于 x; 另一方面，既然研究的是振动，位移 u 必随时间 t 而变，即 u 有赖于 t. 这样，横向位移 u 是 x 和 t 的函数，记作 $u(x, t)$。

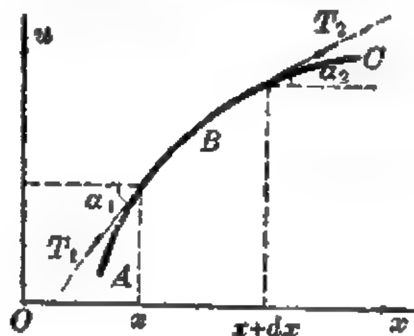


图 44

把弦细分为许多极小的小段。拿区间$(x, x+dx)$上的小段 B 为代表加以研究。B 既然没有重量而且是柔软的，它就只受到邻段 A 和 C 的拉力 T_1 和 T_2。

弦的每小段都没有纵向（即 x 方向）的运动，所以作用于 B 的纵向合力应为零，

$$T_2\cos\alpha_2 - T_1\cos\alpha_1 = 0. \tag{31.1}$$

B 的长度 $ds=\sqrt{(dx)^2+(du)^2}$。在小振动的条件下，

$$ds \approx \sqrt{(dx)^2} = dx.$$

用 ρ 表示单位长度的弦的质量，则 B 的质量是 ρdx. 于是根据 $F=ma$ 写出 B 的横向运动方程

$$T_2\sin\alpha_2 - T_1\sin\alpha_1 = (\rho dx)u_{tt}, \tag{31.2}$$

其中 u_{tt} 是横向加速度$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$的缩写。

对于小的振动，$\alpha_1\approx 0$, $\alpha_2\approx 0$, $\cos\alpha_1\approx 1$, $\cos\alpha_2\approx 1$, $\sin\alpha_1\approx \operatorname{tg}\alpha_1$, $\sin\alpha_2\approx \operatorname{tg}\alpha_2$, 而 $\operatorname{tg}\alpha$ 是切线的斜率即$\dfrac{\partial u}{\partial x}$, 今后缩写为 u_x, 即

$$\sin\alpha_1\approx \operatorname{tg}\alpha_1 = u_x|_x, \quad \sin\alpha_2 \approx \operatorname{tg}\alpha_2 = u_x|_{x+dx}.$$

这样，在小振动的条件下，B 段的纵向平衡方程(31.1)和横向运动

方程(31.2)成为

$$\begin{cases} T_2 - T_1 = 0, & (31.3) \\ T_2 u_x|_{x+dx} - T_1 u_x|_x = u_{tt} \rho dx. & (31.4) \end{cases}$$

(31.3)指出 $T_1 = T_2$，即张力不随地点而异，它在整根弦中取同一数值。前已指出，B段的长度 $ds \approx dx$，即长度 ds 在振动过程中不随时间而变，所以张力不随时间而变。总之，张力既跟 x 无关，又跟 t 无关，它是常数，记作 T. 这样一来，(31.4)成为

$$T \frac{u_x|_{x+dx} - u_x|_x}{dx} = \rho u_{tt}.$$

上式左边就是 $T\frac{\partial u_x}{\partial x}$，而$\frac{\partial u_x}{\partial x}$即$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，今后缩写为 u_{xx}. 这样，B段的运动方程就成为

$$\rho u_{tt} - T u_{xx} = 0. \tag{31.5}$$

其实，B是作为代表的一个小段，所以各个小段的运动方程都是这个样子。因此可以说，(31.5)是弦作微小横振动的运动方程，通常简单地说成**弦振动方程**。

对于均匀弦，各个小段的 ρ 是相同的，即 ρ 是常数。通常引用记号

$$a^2 = T/\rho, \tag{31.6}$$

而把弦振动方程改写成

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0. \tag{31.7}$$

以后(§34)将指出 a 就是振动在弦上传播的速度。

不妨把弦的运动方程跟质点的运动方程比较一下：质点的位移只是时间 t 的函数，质点的运动方程也就是以时间 t 为自变数的常微分方程。至于弦的位移 u 则是时间 t 和坐标 x 两个自变数的函数，弦的运动方程即许多彼此相牵连的质点的运动方程式，质点之间的牵连反映在 u_{xx} 项，因而是以 x 和 t 为自变数的偏微分方程。

再谈谈弦的受迫振动，即弦在振动过程中，还受到外力作用的情况。如果作用在单位长度弦上的横向力是 $F(x,t)$，则(31.2)应修改为

$$T_2\sin\alpha_2-T_1\sin\alpha_1+F(x,t)dx=(\rho dx)u_{tt},$$

因而(31.7)相应地修改为

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=F(x,t)/\rho. \tag{31.8}$$

力学系统的运动又可以用分析力学处理。作为例子，这里用哈密顿原理推导弦振动方程。

区间 $(x,x+dx)$ 上的小段 B(见图 44)的动能

$$Kdx=\frac{1}{2}(\rho dx)u_t^2dx,$$

其中 u_t 是速度 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 的缩写。它的势能

$$Vdx=T(ds-dx)=T(\sqrt{1+u_x^2}-1)dx\approx T\left(1+\frac{1}{2}u_x^2-1\right)dx=\frac{1}{2}Tu_x^2dx.$$

于是，弦的拉格朗日函数

$$L=\int(K-V)dx=\int\left(\frac{1}{2}\rho u_t^2-\frac{1}{2}Tu_x^2\right)dx.$$

按照哈密顿原理，弦的运动规律可表为变分问题

$$\delta\int Ldt=\delta\iint\frac{1}{2}\rho(u_t^2-a^2u_x^2)dx\ dt=0.$$

这个变分问题的欧勒方程(参看附录五)是

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial u_t}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial u_x}-\frac{\partial L}{\partial u}=0,$$

即
$$u_{tt}-a^2u_{xx}=0.$$

这正是弦振动方程(31.7)。

如果弦受外力作用，单位长弦上横向外力为 $F(x,t)$，其势能应附加以 Fu，从而小段 B 的势能

$$V=\frac{1}{2}Tu_x^2dx+Fudx,$$

而
$$L=\int\left(\frac{1}{2}\rho u_t^2-\frac{1}{2}Tu_x^2-Fu\right)dx.$$

于是，弦的受迫振动的运动规律可表为变分问题

$$\delta\int L dt = \delta\iint\left(\frac{1}{2}\rho u_t^2 - \frac{1}{2}Tu_x^2 - Fu\right)dx\ dt = 0.$$

这个变分问题的欧勒方程是

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = F(x, t)/\rho,$$

这正是方程(31.8)。

(二) 均匀杆的纵振动

一根杆，只要其中任一小段有纵向移动，必然使它的邻段压缩或伸长，这邻段的压缩或伸长又使它自己的邻段压缩或伸长，……。这样，任一小段的纵振动必然传播到整根杆。这种振动的传播就是波。

在杆的纵振动问题中所研究的是杆上各点的纵向位移$u(x, t)$。

把杆细分为许多极小的小段。拿区间$(x, x+dx)$上的小段B(图45)为代表加以研究。在振动过程中，B两端的位移分别记作u和$u+du=u+\frac{\partial u}{\partial x}dx$. 显然，$B$段的伸长即是$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx=u_x\,dx$，而相对伸长则是$\frac{du}{dx}=\frac{u_x dx}{dx}=u_x$.

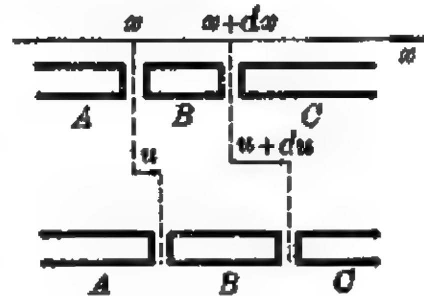


图 45

确切些说，在杆作纵振动时，相对伸长u_x还随地点而异。在B的两端，相对伸长就不一样，分别是$u_x|_x$和$u_x|_{x+dx}$. 如果杆的材料的杨氏模量是Y，那么，B的两端的胁强(又叫应力，即单位横截面两方相互作用力)分别是$Yu_x|_x$和$Yu_x|_{x+dx}$. 这是说，邻段A和C作用于B两端的力分别为$-YSu_x|_x$和$YSu_x|_{x+dx}$(S为杆的横截面积)。于是，写出B段的运动方程

$$\rho(S dx)u_{tt} = YSu_x|_{x+dx} - YSu_x|_x = YS\frac{\partial u_x}{\partial x}dx,$$

式中 ρ 为杆的密度。用 Sdx 遍除上式各项，得

$$\rho u_{tt}-Yu_{xx}=0. \tag{31.9}$$

这叫做杆的纵振动方程。

对于均匀杆，各个小段的 Y 和 ρ 都是相同的，即 Y 和 ρ 是常数。通常引用记号

$$a^2=Y/\rho, \tag{31.10}$$

把杆纵振动方程改写成

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=0. \tag{31.11}$$

这跟弦振动方程(31.7)形式上是完全一样的。a 也就是纵振动在杆中传播的速度。

杆的受迫纵振动方程也跟弦的受迫振动方程(31.8)完全一样，只是其中 $F(x,t)$ 应是纵向外力。

不同的物理过程中的物理规律，竟然可以用同一个数学物理方程来表示！正因为这样，就有可能用一种物理现象去模拟另一种物理现象。

(三) 电报方程

对于直流电和低频交流电，电路的基尔霍夫定律指出，同一支路中的电流相等。但对于较高频率的交变电流(不过，这里也不考虑频率很高以致显著地向外发射电磁波的情况)，电路中导线的自感和电容的效应不能忽略，因而同一支路中的电流未必相等。

考虑双线或同轴传输线(图 46)。把每单位长的传输线所具有导线电阻、线间电漏、电容以及自感分别记作 R,G,C 以及 L。

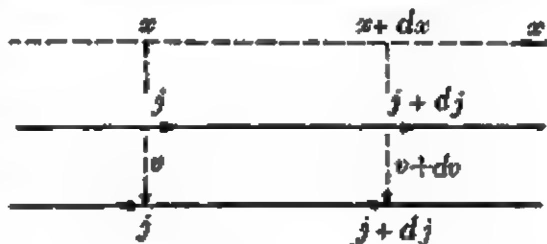


图 46

把传输线细分为许多极小的小段。拿区间 $(x,x+dx)$ 上的小段为代表加以研究。这个小段两端的电流并不相等，这是由于两

线之间的漏电流 $(Gdx)v$，还有两线之间的电容 Cdx 上的充放电。这样，

$$dj=-Gvdx-\frac{\partial}{\partial t}(Cvdx).$$

这个小段两端的电压也不相等，这是由于导线电阻 Rdx 上的电压降 $(Rdx)j$，还有两线之间的电感 Ldx 上的感生电动势 $(Ldx)\frac{\partial j}{\partial t}$.

这样，

$$dv=-Rjdx-Lj_tdx.$$

以上两式即

$$\begin{cases}j_x=-Gv-Cv_t,\\ v_x=-Rj-Lj_t.\end{cases} \tag{31.12}$$

亦即

$$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial x}j+\left(G+C\frac{\partial}{\partial t}\right)v=0,\\ \left(R+L\frac{\partial}{\partial t}\right)j+\frac{\partial}{\partial x}v=0.\end{cases}$$

以 $\frac{\partial}{\partial x}$ 作用于第一式，以 $G+C\frac{\partial}{\partial t}$ 作用于第二式，并相减，就消去 v 而得 j 的方程

$$LCj_{tt}-j_{xx}+(LG+RC)j_t+RGj=0. \tag{31.13}$$

同理，消去 j 可得 v 的方程

$$LCv_{tt}-v_{xx}+(LG+RC)v_t+RGv=0. \tag{31.14}$$

导线电阻 R 和线间电漏 G 很小的传输线叫作理想传输线。对于理想传输线，(31.13)和(31.14)可以简化为

$$j_{tt}-a^2j_{xx}=0 \quad 和 \quad v_{tt}-a^2v_{xx}=0, \tag{31.15}$$

其中 $a^2=1/LC$(参看 § 54 例 3，$1/LC$=光速平方)。

方程 (31.13) 和 (31.14) 以及它们的特例 (31.15) 叫作电报

方程。电报方程(31.15)跟弦振动方程(31.7)、杆纵振动方程(31.11)又是完全一样，尽管它们的物理本质根本不同。

（四）均匀薄膜的微小横振动

把柔软的均匀薄膜张紧，静止薄膜的平面记作 xy 平面。在膜的横振动问题中所研究的是膜上各点的横向位移 $u(x, y, t)$.

设想在膜上划一直线（参看图 47a，图的平面垂直于所划直线），直线两方的膜必互相牵引。每单位长直线两方的牵引力叫作张力。膜上张力的值是常数 T。我们还需要张力的横向分量，这当然就是 $T\sin\alpha$（角 α 是张力 T 的"仰角"，见图 47a）。对于小振动，$\sin\alpha\approx\mathrm{tg}\,\alpha$，所以张力的横向分量 $=T\sin\alpha\approx T\,\mathrm{tg}\alpha=T\dfrac{\partial u}{\partial n}$，$n$ 指的是所划直线在 xy 平面的投影的法线方向。

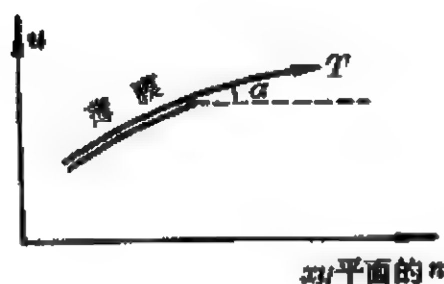


图 47a

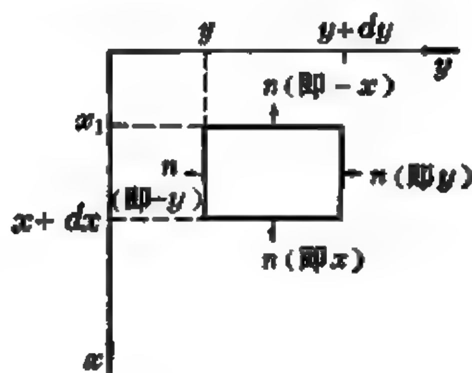


图 47b

把薄膜细分为许多极小的小块。拿 x 与 $x+dx$ 之间，y 与 $y+dy$ 之间的小块(图 47b)为代表加以研究。

先看 x 和 $x+dx$ 这两边。在这两边，作为代表的小块膜受邻近部分的张力作用，张力的横向分力分别是 $-T\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_x$ 和 $T\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x+dx}$。这样，这小块膜在 x 和 $x+dx$ 两边所受横向作用力是

$$[Tu_x|_{x+dx}-Tu_x|_x]dy=Tu_{xx}dxdy.$$

同理，在 y 和 $y+dy$ 两边所受横向作用力是

$$Tu_{yy}dxdy.$$

用 ρ 表示单位面积的薄膜的质量，则作为代表的小块膜的质量是 $\rho dxdy$. 于是，写出这小块膜的横向运动方程

$$\rho u_{tt}dxdy=Tu_{xx}dxdy+Tu_{yy}dxdy,$$

即

$$\rho u_{tt}-Tu_{xx}-Tu_{yy}=0. \tag{31.16}$$

这就是薄膜微小振动方程。$\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$叫作二维拉普拉斯算符，通常记作 Δ，或者为了强调二维而记作 Δ_2. 这样，(31.16) 可以记作

$$\rho u_{tt}-T\Delta_2 u=0.$$

对于均匀薄膜，面密度 ρ 是常数。通常引用记号

$$a^2=T/\rho,$$

把薄膜振动方程(31.16)改写成

$$u_{tt}-a^2\Delta_2 u=0. \tag{31.17}$$

对于薄膜的受迫振动，如果在单位面积上的横向外力是 $F(x,y,t)$，容易看出，只需把(31.17)修改为

$$u_{tt}-a^2\Delta_2 u=F/\rho. \tag{31.18}$$

（五）流体力学与声学方程

根据流体力学，理想流体的欧勒型运动方程是

$$\boldsymbol{v}_t+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\boldsymbol{f}. \tag{31.19}$$

连续方程则是

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=0. \tag{31.20}$$

另外，还有物态方程

$$p=f(\rho); \tag{31.21}$$

例如，对于绝热过程，(31.21)的具体形式就是 $p:p_0=\rho^\gamma:\rho_0^\gamma$，其

中 γ 是定压比热与定容比热的比值。

未知数共有五个，即 v_x, v_y, v_z, p, ρ. 方程组(31.19)—(31.21)恰好包含五个方程(其中矢量方程(31.19)应看作三个分量方程)。这样,(31.19)—(31.21)构成流体力学的完整方程组。可是这方程组是非线性的。

现在研究声波在空气中的传播。不妨认为(31.19)里的外力 $\boldsymbol{f}$ 不存在。

把声波中的空气密度相对变化量 $(\rho-\rho_0)/\rho_0$ 记作 s,

$$s=\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0}, \quad \rho=\rho_0(1+s).$$

当声波在空气中传播时，s 和 $\boldsymbol{v}$ 都是很小的量。于是，略去(31.19)和(31.20)中的二次项，把它们近似为线性方程

$$\boldsymbol{v}_t=-\frac{1}{\rho_0}\nabla p, \tag{31.22}$$

$$\rho_t+\rho_0\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0, \text{ 即 } \quad s_t+\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0. \tag{31.23}$$

声波的传播过程是绝热的，而绝热过程的物态方程 $p=p_0(1+s)^\gamma$ 也可近似为线性的,

$$p=p_0(1+\gamma s). \tag{31.24}$$

方程组(31.22)—(31.24)是声学的完整方程组，它们已线性化。

从(31.22)和(31.24)消去 p, 得

$$\boldsymbol{v}_t=-\frac{\gamma p_0}{\rho_0}\nabla s. \tag{31.25}$$

从(31.23)和(31.25)消去 $\boldsymbol{v}$, 得声波方程 $s_{tt}-a^2\nabla\cdot\nabla s=0$, 即

$$s_{tt}-a^2\Delta_3 s=0 \quad \left(a^2=\frac{\gamma p_0}{\rho_0}\right). \tag{31.26}$$

这里为了强调拉普拉斯算符 Δ 是三维的，特意记作 Δ_3。

如果在某个时刻存在速度势 U,

$$\boldsymbol{v}=\nabla U,$$

可以证明在任何时刻都有速度势 U，而且可以证明

$$U_{tt}-a^2\Delta_3U=0. \tag{31.27}$$

（六）电磁波方程

用国际单位制[①]，电磁场的麦克斯韦方程组的积分形式是

$$\begin{cases}\oint \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{\sigma}=\int \rho dv,\\ \oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s}=-\int \boldsymbol{B}_t\cdot d\boldsymbol{\sigma},\\ \oint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{\sigma}=0,\\ \oint \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{s}=\int(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{D}_t)\cdot d\boldsymbol{\sigma}.\end{cases}$$

相应的微分形式是

$$\begin{cases}\nabla\cdot \boldsymbol{D}=\rho,\\ \nabla\times \boldsymbol{E}=-\boldsymbol{B}_t,\\ \nabla\cdot \boldsymbol{B}=0,\\ \nabla\times \boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}+\boldsymbol{D}_t.\end{cases} \tag{31.28}$$

在真空中，$\rho=0$，$\boldsymbol{j}=0$，$\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}$，$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}$，(31.28) 可简化为

$$\begin{cases}\nabla\cdot \boldsymbol{E}=0,\\ \nabla\times \boldsymbol{E}=-\mu_0\boldsymbol{H}_t,\\ \nabla\cdot \boldsymbol{H}=0,\\ \nabla\times \boldsymbol{H}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}_t.\end{cases} \tag{31.29}$$

拿(31.29)的第四式对 t 求导，又用 $\nabla\times$ 作用于第二式，就可消去 $\boldsymbol{H}$ 而得到

$$\boldsymbol{E}_{tt}-a^2\Delta_3\boldsymbol{E}=0, \tag{31.30}$$

---

① 如果用高斯单位制，则麦克斯韦方程组是 $\oint \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{\sigma}=4\pi\int\rho dv$，$\oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s}=-\frac{1}{c}\int \boldsymbol{B}_t\cdot d\boldsymbol{\sigma}$，$\oint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{\sigma}=0$，$\oint \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{s}=\frac{4\pi}{c}\int\left(\boldsymbol{j}+\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{D}_t\right)\cdot d\boldsymbol{\sigma}$.

其中 $a^2=1/\mu_0\varepsilon_0$=光速平方。同理消去 $\boldsymbol{E}$ 可得

$$\boldsymbol{H}_{tt}-a^2\Delta_3\boldsymbol{H}=0. \qquad (31.31)$$

(31.30)和(31.31)就是电磁波方程。

(十) 扩散方程

把盛有化学药品例如酒精的瓶子打开。酒精容易挥发成为蒸汽，瓶口附近空气中混杂了很多酒精分子，所以瓶口有强烈酒精气味。而离开酒精瓶一定距离的地方也还有酒精气味，虽说不那么强烈。这表明，有少量酒精分子达到离开酒精瓶一定距离的地方。

一般地说，由于浓度(单位体积中的分子数或质量)的不均匀，物质从浓度大的地方向浓度小的地方转移，这种现象叫作扩散。

扩散现象并不限于气体。在固体中也有扩散现象。

制做半导体器件就常用扩散法。把含有所需杂质的物质涂敷在硅片表面，或者用携带杂质的气体包围着硅片，把硅片放在扩散炉里，杂质就向硅片里面扩散，扩散运动的方向基本上是垂直于硅片表面而指向硅片深处。这种只沿某一方向进行的扩散叫作一维的扩散。

商品超导材料 Nb_3Sn 硬而脆，不能拉丝。制做 Nb_3Sn 线材必须避开 Nb_3Sn 的拉丝，方法之一也是扩散。把铌(Nb)条包在锡(由于种种考虑，实际上不是纯锡而是铜锡合金)中，这是容易拉丝的。当然，这样拉出的丝里，铌和锡还是分开的。放进扩散炉，锡就向铌中扩散而形成一层 Nb_3Sn。

在扩散问题中研究的是浓度 u 在空间中的分布和在时间中的变化 $u(x,y,z,t)$。

扩散运动的强弱可用“单位时间里通过单位横截面积的原子或分子数”表示，这叫作扩散流强度，记作 q。

扩散运动的起源是浓度的不均匀。浓度不均匀的程度可用浓度梯度 ∇u 表示。

那么，扩散流强度 q 跟浓度梯度 ∇u 的关系是怎样的呢？根据实验结果，扩散定律是

$$q=-D\nabla u. \tag{31.32}$$

负号表示扩散转移的方向（浓度减小的方向）跟浓度梯度(浓度增大的方向)相反。比例系数 D 叫作扩散系数。不同物质的扩散系数各不一样。同一物质在不同温度的扩散系数也不同，一般说，温度越高，扩散系数越大。

对于沿 x 方向进行的一维扩散，(31.32)成为

$$q=-D\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{31.33}$$

现在应用扩散定律(31.33)来研究一维扩散问题中的浓度在空间中分布和在时间中变化 $u(x,t)$ 的规律。为此，把空间加以细分，拿 x 与 $x+dx$ 之间，y 与 $y+dy$ 之间，z 与 $z+dz$ 之间的小平行六面体(图 48)为代表加以研究。这个平行六面体里的浓度变化取决于扩散流强度 q 的向它汇集或从它发散，也就是取决于穿过它的表面的流量。

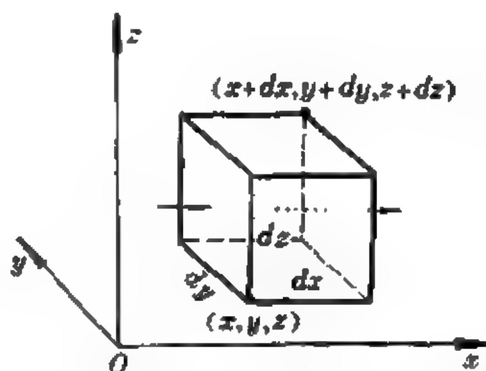


图 48

既然扩散只沿 x 方向进行，扩散流并不穿过前后和上下四面，而只穿过左右两面。在左面，流量 $q|_x dydz$ 是流入的；在右面，流量 $q|_{x+dx}dydz$ 则是流出的。出入相抵，

$$净流入流量=-(q|_{x+dx}-q|_x)dydz=-\frac{\partial q}{\partial x}dxdydz.$$

把扩散定律(31.33)代入，

$$净流入流量=\frac{\partial}{\partial x}(Du_x)dxdydz.$$

如果小平行六面体里没有源和汇(就是说,这种物质的原子或分子既不从其他物质转化出来也不转化为其他物质),则浓度的时间变化率

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\text{净流入流量}}{dxdydz}=\frac{\partial}{\partial x}(Du_x). \tag{31.34}$$

这叫作(一维的)扩散方程。

如果扩散系数在空间中是均匀的,则扩散方程(31.34)简化为 $u_t-Du_{xx}=0$. 通常又引用记号 $a^2=D$ 把扩散方程写成

$$u_t-a^2u_{xx}=0. \tag{31.35}$$

对于三维的扩散问题,那就不仅需要计算穿过图 48 的小平行六面体左右两面的流量,而且要计算穿过前后和上下四个面的流量,其结果是三维扩散方程

$$u_t-\left[\frac{\partial}{\partial x}(Du_x)+\frac{\partial}{\partial y}(Du_y)+\frac{\partial}{\partial z}(Du_z)\right]=0. \tag{31.36}$$

如果扩散系数在空间中是均匀的,则(31.36)简化为

$$u_t-a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})=0,\quad \text{即}\quad u_t-a^2\Delta u=0. \tag{31.37}$$

简单说一说源和汇的问题。例如,所研究的物质是放射性的,蜕变的半衰期为 τ,则单纯由蜕变所导致的浓度的时间变化率为 $-\frac{\ln 2}{\tau}u$. 这样,一维和三维的扩散方程(31.35)和(31.37)应分别修改为

$$u_t-a^2u_{xx}+\frac{\ln 2}{\tau}u=0,$$

$$u_t-a^2\Delta u+\frac{\ln 2}{\tau}u=0.$$

再如,所研究的物质由于链式反应而增殖,浓度的增殖的时间变化率为 b^2u. 这样,一维和三维的扩散方程(31.35)和(31.37)应分别修改为

$$u_t - a^2 u_{xx} - b^2 u = 0,$$
$$u_t - a^2 \Delta u - b^2 u = 0.$$

（八）热传导方程

由于温度不均匀，热量从温度高的地方向温度低的地方转移，这种现象叫作热传导。

热传导的强弱可用“单位时间里通过单位横截面积的热量”表示，这叫作**热流强度**，记作 q。

热传导的起源是温度 u 的不均匀。温度不均匀的程度可用**温度梯度** ∇u 表示。

根据实验结果，**热传导定律**是

$$q = -k\nabla u,$$

比例系数 k 叫作**热传导系数**。不同物质的热传导系数各不一样。

仿照扩散问题，可导出没有热源和热汇的一维和三维的热传导方程如下：

$$c\rho u_t - \frac{\partial}{\partial x}(ku_x) = 0, \tag{31.38}$$

$$c\rho u_t - \left[\frac{\partial}{\partial x}(ku_x) + \frac{\partial}{\partial y}(ku_y) + \frac{\partial}{\partial z}(ku_z)\right] = 0, \tag{31.39}$$

其中 c 是比热，ρ 是密度。

（九）稳定浓度分布

扩散运动持续进行下去，如果达到稳定状态，浓度的空间分布不再变动，即 $u_t = 0$. 以 $u_t = 0$ 代入三维扩散方程(31.36)得到浓度的稳定分布方程

$$\frac{\partial}{\partial x}(Du_x) + \frac{\partial}{\partial y}(Du_y) + \frac{\partial}{\partial z}(Du_z) = 0. \tag{31.40}$$

如果扩散系数在空间中是均匀的，则(31.40)简化为**拉普拉斯方程**

$$\Delta u = 0.$$

（十）稳定温度分布

热传导持续进行下去，如果达到稳定状态，温度的空间分布不再变动，即 $u_t=0$. 以 $u_t=0$ 代入三维热传导方程(31.39)得到温度的稳定分布方程

$$\frac{\partial}{\partial x}(ku_x)+\frac{\partial}{\partial y}(ku_y)+\frac{\partial}{\partial z}(ku_z)=0. \qquad (31.41)$$

如果热传导系数在空间中是均匀的，则(31.41)也简化为**拉普拉斯方程**

$$\Delta u=0.$$

（十一）静电场

从静电学知道，用国际单位制，穿过闭合曲面 S 向外的电通量等于闭合曲面 S 所围空间 Ω 中的电量的 $1/\varepsilon_0$ 倍，即

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot d\boldsymbol{\sigma}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_\Omega \rho dv.$$

应用曲面积分的高斯定理把上式左边改表为体积积分，

$$\int_\Omega \nabla\cdot\mathbf{E}\,dv=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_\Omega \rho dv.$$

上式并不是只对特定的空间 Ω 成立，而是对任意的空间 Ω 都成立，这只能是由于两边的被积函数相等，

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho. \qquad (31.42)$$

这就是**静电场方程**。

我们知道，静电场的电场强度 $\mathbf{E}$ 是无旋的，因而存在电势 V，

$$\mathbf{E}=-\nabla V. \qquad (31.43)$$

电场强度 $\mathbf{E}$ 是矢量，电势 V 则是标量，解算比较方便。因此，以(31.43)代入(31.42)得到，静电场的电势 V 应当满足**泊松方程**

$$\Delta V=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho. \qquad (31.44)$$

如果在静电场的某一区域里没有电荷,即 $\rho=0$，则静电场方程(31.44)在该区域上简化为**拉普拉斯方程**

$$\Delta V=0. \tag{31.45}$$

(十二) 无旋稳恒电流场

设在导电物质中有稳恒电流分布。稳恒，是说电流密度 $\boldsymbol{j}$ 不随时间而变。

按照散度的定义，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{j}=\lim_{\Omega\to 0}\left[\frac{1}{\Omega}\oint_S \boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{\sigma}\right],$$

其中 S 是闭合曲面，Ω 是 S 所围体积。上式右边的曲面积分是单位时间里从 Ω 流出的总电量，从而上式右边的极限表示单位时间里从单位体积流出的电量，这正是电流的源的强度。把电流源的强度分布记作 $f(x,y,z)$，就有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{j}=f. \tag{31.46}$$

既然电流是无旋的，必定存在势 φ，

$$\boldsymbol{j}=-\nabla\varphi.$$

把上式代入(31.46)得到，无旋稳恒电流势满足**泊松方程**

$$\Delta\varphi=-f. \tag{31.47}$$

如果在某一区域里没有电流源,则(31.47)在该区域上简化为**拉普拉斯方程**

$$\Delta\varphi=0. \tag{31.48}$$

(十三) 流体的无旋稳恒流动

把流体的速度分布记作 $\boldsymbol{v}(x,y,z)$. 按照散度的定义，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=\lim_{\Omega\to 0}\left[\frac{1}{\Omega}\oint_S \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{\sigma}\right],$$

上式右边是从单位体积流出的流量，这正是流体的源的强度。把流体的源强度分布记作 $f(x,y,z)$，就有

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = f. \tag{31.49}$$

既然流动是无旋的，必定存在速度势 φ，

$$\boldsymbol{v} = -\nabla\varphi.$$

把上式代入(31.49)得到，流体无旋稳恒流动的速度势满足泊松方程

$$\Delta\varphi = -f. \tag{31.50}$$

如果在某一区域里没有流体的源，则(31.50)在该区域上简化为拉普拉斯方程

$$\Delta\varphi = 0. \tag{31.51}$$

（十四）杆的微小横振动

柔软的弦没有固定的形状，在放松的条件下，不管弯成什么形状，都保持静止。杆却不是柔软的，对于形状的改变，它是有抵抗的。

杆在横向变形时，各个横截面依次错开，或者说存在切变，因而每一截面上存在切力。我们把截面左方作用于右方的切力记作T(图 49)，右方作用于左方的切力则记作 $-T$. 杆的任一小段例如图 49 的B段在切力的作用下有转动趋势。这转动造成杆的弯曲。

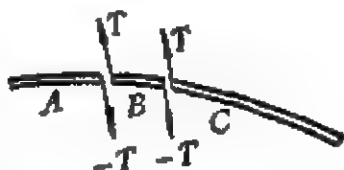


图 49

在弯曲时，杆的中线(参看图 50 的 AB)长度不变，中线一方伸长，另一方压缩。于是在杆的每一截面出现张力和压力组成的力偶，其力矩叫作挠矩。我们把截面左方施于右方的挠矩记作M，右方施于左方的挠矩则记作$-M$. 这挠矩抵抗着弯曲。

为计算挠矩M的大小，在杆上截取长为 dx 的一小段(图 50)，它的中线是 AB. 中线 AB 的长度不变，但被弯曲，我们把它的曲率半径记作 R. 这样，图中的 $d\theta = dx/R$.

中线以上被拉长，因而受邻段的张力；中线以下被压缩，因而受邻段的压力。划出一个薄层，它距中线 y 而厚度为 dy。这个薄层的长度 $=(R+y)d\theta=dx+ydx/R$，可见它的伸长为 ydx/R，所以相对伸长是 y/R。从而这薄层中的张胁强（张应力）为 Yy/R，张力

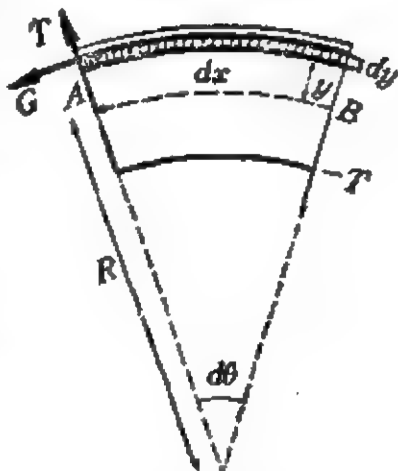


图 50

$$G=\frac{Yy}{R}(bdy),$$

其中 Y 是杨氏模量，b 是薄层的宽度。这张力相对于 A 点的力矩

$$=Gy=\frac{Y}{R}y^2bdy.$$

作用在整个截面上的挠矩 M 应当是力矩 Gy 的总和，即

$$M=\int Gy=\frac{Y}{R}\int y^2bdy.$$

积分 $\int y^2bdy$ 正是截面的"转动惯量"，可记作 I。于是，

$$M=\frac{Y}{R}I. \tag{31.52}$$

我们知道，曲率即 $1/R=u_{xx}/(1+u_x^2)^{3/2}$。对于小的弯曲，$1/R\approx u_{xx}$，所以

$$M=YIu_{xx}. \tag{31.53}$$

(31.52)或简化的(31.53)给出挠矩的大小与杆在该处的曲率之间的关系。

就图 50 的那一小段而论，两端的切力组成力偶，其力矩 Tdx 是顺时针方向的，左端的挠矩 $M|_x$ 是逆时针的，右端的挠矩 $M|_{x+dx}$ 则是顺时针的。因此，

$$M|_x - M|_{x+dx} - Tdx = 0,$$

即
$$T = -\frac{1}{dx}\{M|_{x+dx} - M|_x\} = -\frac{\partial M}{\partial x}.$$

以(31.53)代入上式，

$$T = -YIu_{xxx}, \tag{31.54}$$

这给出切力与曲率变化率之间的关系.

确切些说，在杆作横振动时，切力T还随地点而异。在图50的那小段的两端，切力就不一样，分别是$T|_x$和$-T|_{x+dx}$. 正是两端切力的合力使这一段获得横向加速度u_{tt},

$$(\rho dx)u_{tt} = T|_x - T|_{x+dx},$$

式中ρ是单位长度的杆的质量。上式也就是

$$\rho u_{tt} = \frac{1}{dx}\{T|_x - T|_{x+dx}\} = -\frac{\partial T}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = YIu_{xxxx}.$$

这就是杆的横振动方程。

引用记号

$$a^2 = YI/\rho,$$

可把杆的横振动方程改写成

$$u_{tt} - a^2 u_{xxxx} = 0. \tag{31.55}$$

对于杆的受迫横振动，如果单位长度杆上外加横向力是$F(x, t)$，容易看出，只需把(31.55)修改为

$$u_{tt} - a^2 u_{xxxx} = F(x, t)/\rho. \tag{31.56}$$

（十五）量子力学的薛定谔方程

以上各例引自古典物理学。作为另一类例子，这里提一下量子力学的薛定谔方程。微观粒子在势场$V(x, y, z, t)$中，波函数u（为符号前后一贯起见，这里用u表示波函数，而在量子力学中通常是用ψ）满足薛定谔方程

$$i\hbar u_t = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta u + Vu. \tag{31.57}$$

势能V不显含时间t的情况叫作定态。对于定态，方程(31.57)简化为定态薛定谔方程

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta u + Vu = Eu. \tag{31.58}$$

习　　题

1. 拿图51的B段弦作为代表，推导弦振动方程。

2. 用均质材料制做细圆锥杆，试推导它的纵振动方程。

3. 弦在阻尼介质中振动，单位长度的弦所受阻力$F=-Ru_t$(比例常数R叫作阻力系数)，试推导弦在这阻尼介质中的振动方程。

4. 试推导一维和三维的热传导方程(31.38)和(31.39)。

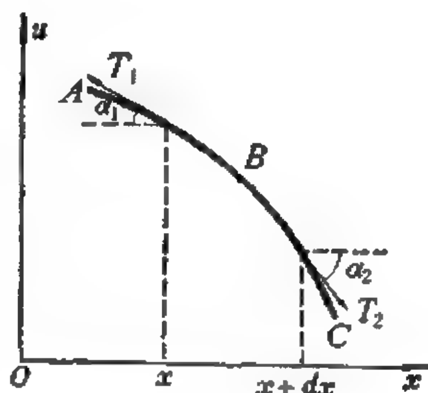


图　51

5. 混凝土浇灌后逐渐放出"水化热"，放热速率正比于当时尚储存着的水化热密度Q，即$\frac{dQ}{dt}=-\beta Q$. 试推导浇灌后的混凝土内的热传导方程。

6. 均质导线电阻率为r，通有均匀分布的直流电，电流密度为j. 试推导导线内的热传导方程。

7. 长为l柔软均质轻绳，一端固定在以匀速ω转动的竖直轴上。由于惯性离心力的作用，这弦的平衡位置应是水平线。试推导此弦相对于水平线的横振动方程。

8. 长为l的柔软均质重绳，上端固定在以匀速ω转动的竖直轴上。由于重力作用，绳的平衡位置应是竖直线。试推导此绳相对于竖直线的横振动方程。

9. 推导均匀圆杆的扭转振动方程。杆半径R，切变模量为N.

10. 推导水槽中的重力波方程。水槽长l，截面为矩形，两端由刚性平面封闭。槽中的水在平衡时深度为h.

§32. 定解条件

数学物理方程是同一类现象的共同规律，反映的是矛盾的普遍性即共性。但是我们还"必须暴露过程中矛盾各方面的特殊性"(《矛盾论》)。就物理现象来说，各个具体问题的特殊性就在于研究对象所处的特定"环境"和"历史"，即边界条件和初始条件。

(一) 初始条件

对于随着时间而发展变化的问题，必须考虑到研究对象的特定"历史"，就是说，追溯到早先某个所谓"初始"时刻的状态，即初始条件。

对于输运过程(扩散、热传导)，初始状态指的是所研究的物理量 u 的初始分布(初始浓度分布、初始温度分布)。因此，初始条件是

$$u(x,y,z,t)\big|_{t=0}=\varphi(x,y,z), \tag{32.1}$$

其中 $\varphi(x,y,z)$ 是已知函数。

对于振动过程(弦、杆、膜的振动，较高频率交变电流沿传输线传播，声振动和声波，电磁波)，只给出初始"位移"

$$u(x,y,z,t)\big|_{t=0}=\varphi(x,y,z) \tag{32.2}$$

是不够的，还需要给出初始"速度"

$$u_t(x,y,z,t)\big|_{t=0}=\psi(x,y,z). \tag{32.3}$$

从数学的角度看，就时间 t 这个自变数而言，输运过程的泛定方程只出现一阶的导数 u_t，是一阶微分方程，所以只需一个初始条件(32.1)；振动过程的泛定方程则出现二阶的导数 u_{tt}，是二阶微分方程，所以需要两个初始条件(32.2)和(32.3)。

注意：初始条件应当给出整个系统的初始状态，而不仅是系统中个别地点的初始状态。例如，一根长为 l 而两端固定的弦，用

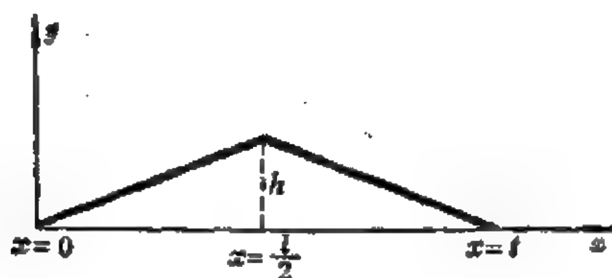


图 52

手把它的中点朝横向拨开距离 h(图 52)，然后放手任其振动。所谓初始时刻就是放手的那个瞬间，初始条件就是放手那个瞬间的弦的位移和速度。初始速度显然为零，即 $u_t(x,t)|_{t=0}=0$；至于初始位移如写成

$$u(x,t)|_{t=0}=h,$$

那就错了，因为 h 只是弦的中点的初始位移，其他各点的位移并不是 h。考虑到弦的初始形状是由两段直线衔接而成，初始位移应是

$$u(x,t)|_{t=0}=\begin{cases}(2h/l)x & (\text{在}[0,l/2]\text{上}),\\(2h/l)(l-x) & (\text{在}[l/2,l]\text{上})。\end{cases}$$

最后，谈一谈"没有初始条件的问题"。没有外源，只是由于初始时刻的不均匀分布引起的输运叫作**自由输运**。在自由输运过程中，不均匀的分布逐渐均匀化。随着分布的逐渐均匀化，输运过程也逐步衰减。因此，一定时间以后，自由输运就衰减到可以认为已消失。没有外加力，只是由于初始偏离或初始速度引起的振动叫作**自由振动**。上节推导自由振动方程时没有计及**阻尼作用**(该节习题 3 要求计及阻尼作用)，而实际上阻尼是不可避免的，自由振动不可避免逐渐衰减，因此，一定时间以后，自由振动就衰减到可以认为已消失。这样，在周期性外源引起的输运问题或周期性外力作用下的振动问题中，经过很多周期之后，初始条件引起的自由输运或自由振动衰减到可以认为已消失，这时的输运或振动完

全是周期性外源或外力所引起。处理这类问题时，我们完全可以忽略初始条件的影响，这类问题也就叫作没有初始条件的问题。

稳定场问题(静电场，稳定浓度分布，稳定温度分布，无旋稳恒电流场，无旋稳恒流动)根本就不存在初始条件问题，这是无需多说的。

(二) 边界条件

研究具体的物理系统，还必须考虑研究对象所处的特定“环境”，而周围环境的影响常体现为边界上的物理状况，即边界条件。

有一类边界条件直接规定了边界上的数值。例如，取一根长为 l 的弦，把它的两端 $x=0$ 和 $x=l$ 固定起来，然后让它振动。边界 $x=0$ 和 $x=l$ 既然是固定的，那里的位移 u 当然始终为零，

$$u(x,t)|_{x=0}=0, \qquad u(x,t)|_{x=l}=0.$$

又如，细杆导热问题，如果杆的某一端点 $x=a$ 处于恒温 u_0 的环境中，就是说边界 $x=a$ 那里的温度 u 保持为常数 u_0，

$$u(x,t)|_{x=a}=u_0.$$

或者，导热杆的一个端点 $x=a$ 的温度 u 按已知的规律 $f(t)$ 变化，则那里的边界条件是

$$u(x,t)|_{x=a}=f(t).$$

再如，半导体扩散工艺的“恒定表面浓度扩散”中，硅片周围环境是携带着充足杂质的氮气，杂质源源不断通过硅片表面向内部扩散，而硅片表面的杂质浓度保持一定。硅片的边界就是它的表面 $x=0$ 和 $x=l$，边界上的物理状况则是杂质浓度 u 保持为常数 N_0，

$$u(x,t)|_{x=0}=N_0, \quad u(x,t)|_{x=l}=N_0.$$

总之，这类边界条件直接规定了边界上的数值(可以是随时间 t 变化的数值)，

$$u(x,y,z,t)|_{\text{边界}x_0,y_0,z_0}=f(x_0,y_0,z_0,t). \qquad (32.4)$$

这叫作第一类边界条件。

但是，有不少边界条件所直接规定的并不是边界上的数值。例如，作纵振动的杆的某一端点 $x=a$ 是自由的，从"自由"这个条件并不能推断在该端点的纵向位移 u 的值。但是，自由意味着在该端点的胁强为零，而胁强等于杨氏模量 Y 与相对伸长 u_x 的乘积，因此

$$u_x(x,t)|_{x=a}=0.$$

又如，细杆导热问题，如果杆的某一端点 $x=a$ 是绝热的，从"绝热"这个条件并不能推断在该端点的温度 u 的值。但是，绝热意味着进出该端点的热流强度为零，而沿 x 方向的热流强度等于热传导系数 k 与温度梯度 u_x 的乘积变号，因此，

$$u_x(x,t)|_{x=a}=0.$$

再如，半导体扩散工艺的"限定源扩散"中，没有外来的杂质通过硅片表面进入硅片，只是硅片表层已有的杂质向硅片深部扩散。从"限定源"这个条件并不能推断在硅片表面的浓度 u 的值。但是，限定源意味着通过硅片表面 $x=0$ 和 $x=l$ 的扩散流强度为零，而沿 x 方向的扩散流强度等于扩散系数 D 与浓度梯度 u_x 的乘积变号，因此

$$u_x(x,t)|_{x=0}=0,\quad u_x(x,t)|_{x=l}=0.$$

总之，有这样一类边界条件，它并不直接规定边界上的数值，而是直接规定梯度在边界上的数值

$$u_x(x,t)|_{x=a}=f(t). \qquad (32.5)$$

这叫作第二类边界条件。(32.5)是就一维问题而言的；对于二维或三维问题，梯度 u_x 应代之以边界的(外)法线方向的导数 $\frac{\partial u}{\partial n}$，第二类边界条件是

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{边界\ x_0,y_0,z_0}=f(x_0,y_0,z_0,t). \qquad (32.6)$$

还有一类边界条件，既不直接规定边界上的数值，也不直接规定边界上法向导数的数值，而是规定它们之间的某个线性关系。例如，细杆导热问题，如果杆的某一端点 $x=a$ 自由冷却，即杆端和周围介质（温度 θ）按照牛顿冷却定律交换热量，从“自由冷却”这个条件既不能推断在该端点的温度 u 的值，也不能推断在该端点的温度梯度 u_x 的值。但是，自由冷却规定了从杆端流出的热流强度 $(-ku_n)$ 与温度差 $(u|_{x=a}-\theta)$ 之间的关系

$$-ku_n|_{x=a}=h(u|_{x=a}-\theta),$$

即

$$(u+Hu_n)|_{x=a}=\theta \quad (H=k/h).$$

对于两端 $x=0$ 和 $x=l$ 都是自由冷却的杆（图 53），在 $x=l$ 的一端，外法向 n 就是 x 方向，所以自由冷却条件可表为

$$(u+Hu_x)|_{x=l}=\theta;$$



图 53

在 $x=0$ 的一端，外法向 n 是 $-x$ 方向，所以自由冷却条件可表为

$$(u-Hu_x)|_{x=0}=\theta.$$

值得注意的是，如果杆端跟周围介质的热交换系数 h 远远大于杆的热传导系数 k，则 $H=k/h\approx 0$，上述边界条件就退化为第一类边界条件 $u|_{x=0}=\theta$ 和 $u|_{x=l}=\theta$.

又如，作纵振动的杆，如果某一端点 $x=a$ 既非固定也非自由，而是通过弹性体连结到固定物上，从“弹性连结”既不能推断在该端点的位移 u 的值，也不能推断在该端点的相对伸长 u_x 的值。但是，弹性连结规定了杆中弹性力 (YSu_n) 等于弹性连结物中的弹性恢复力 $(-ku$, k 是倔强系数或叫劲度系数），

$$\left(u-\frac{YS}{k}u_n\right)\Big|_{x=a}=0.$$

总之，有这样一类边界条件，它只规定边界上的数值与（外）法

向导数在边界上的数值之间的一个线性关系

$$(u+Hu_n)|_{边界x_0,y_0,z_0}=f(x_0,y_0,z_0,t). \qquad (32.7)$$

这叫作第三类边界条件。

边界条件 (32.4)——(32.7) 都是线性的。其中 $f\equiv 0$ 的边界条件又叫作齐次的。

线性的边界条件并不限于以上三类。例如，杆的一端挂有重物而作纵振动（图 54)。杆端所受的力有重力 (Mg) 和惯性力 $(-Mu_{tt})$，所以

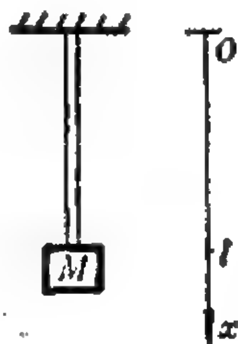


图 54

$$YSu_x|_{x=l}=Mg-Mu_{tt}|_{x=l}.$$

在这个边界条件中不仅出现对 x 的偏导数 u_x，还出现了对 t 的偏导数 u_{tt}。

有的边界条件甚至是非线性的。例如，在热传导问题中，如果物体表面按斯蒂芬定律（温度四次方定律）向周围辐射热量，那就出现非线性边界条件了。

上节导出的泛定方程，除杆的横振动方程以外，在边界上的每一点都只要一个边界条件。以弦振动为例，就 x 这个自变数而言，弦振动方程中出现二阶导数 u_{xx}，是二阶微分方程，要求两个条件，即两端点各一个边界条件。杆的横振动方程中出现四阶偏导数 u_{xxxx}，所以每个端点就要两个边界条件。例如，端点 $x=a$ 被固定（图 55a），那么这端点的位移始终为零，而且杆在该处的斜率亦为



图 55a



图 55b



图 55c

零，即

$$u|_{x=a}=0, \quad u_x|_{x=a}=0. \quad \text{(固定端)}$$

又如端点 $x=a$ 是被支承的(图 55b)，那么这端点的位移始终为零，而该处截面上挠矩为零，即

$$u|_{x=a}=0, \quad u_{xx}|_{x=a}=0. \quad \text{(支承端)}$$

再如端点 $x=a$ 是自由的(图 55c)，那么该处截面上不仅挠矩为零，而且切力也为零，即

$$u_{xx}|_{x=a}=0, \quad u_{xxx}|_{x=a}=0. \quad \text{(自由端)}$$

边界条件只要确切说明边界上的物理状况就行。例如，长为 l 的均匀杆，一端固定于车壁上，另一端自由，车子以速度 v_0 进行而忽然停止(图 56)。边界条件应当怎样写呢？这个问题本来很简单，$x=0$ 端固定而 $x=l$ 端自由可用"$u|_{x=0}=0$"和"$u_x|_{x=l}=0$"确切地表示。但有些初学者却"不满足"于这个简单的说明，而想到

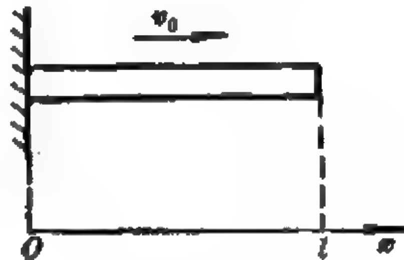


图 56

什么 $x=0$ 端在突然停止时有某个冲力，在振动过程中还不断受到车壁的作用力，$x=l$ 端在突然停止时有向前冲出去的惯性，但又苦于不知道固定端所受的作用力和自由端的运动情况，因而觉得很难写出边界条件。其实这是对边界条件要求过高了，因为只有解出定解问题之后才好计算固定端所受作用力和自由端的运动情况。既然"$u|_{x=0}=0$"和"$u_x|_{x=l}=0$"能够确切说明 $x=0$ 端固定而 $x=l$ 端自由，这两个简单的式子就是所要的边界条件。

注意区分边界条件与泛定方程中的外力或外源。例如，一维扩散问题，如果在某一端点 $x=a$ 有粒子流注入，流的强度 q 是已知的，这注入的粒子流是一种边界条件，即 $Du_n|_{x=a}=q$. 可是，有些初学者认为既然注入的粒子流是外源，应在泛定方程中列入外源：

$$u_t - a^2 u_{xx} = q/c\rho.$$

这就错了，因为这个方程意味着处处有粒子流注入，其强度处处是 q.

最后，谈一谈"没有边界条件的问题"。物理系统总是有限的，必然有边界，要求边界条件。拿弦振动问题为例，弦总是有限长的，有两个端点。如果着重研究靠近一端的那段弦，那么，在不太长的时间里，另一端的影响还没来得及传到，不妨认为另一端并不存在，或者说另一端在无限远，当然就无需提出另一端的边界条件了。这样，有限长的真实的弦抽象成**半无界的**弦。如果着重研究不靠近两端的那段弦，那么，在不太长的时间里，两端的影响都没来得及传到，不妨认为两端都不存在，或者说两端都在无限远，当然就无需提出边界条件了。这样，有限长的真实的弦抽象成**无界的**弦。

又如，半导体工艺的金扩散比较快，在 1100°C 左右，金原子用几分钟时间就扩散到整个硅片。硼和磷的扩散则慢得多，在差不多同样的温度，硼或磷原子用了几十分钟以至两、三小时只能进入硅片几微米。用扩散法制做超导材料 Nb_3Sn 线，锡原子进入铌芯也只有几微米。硅片或铌芯的厚度 l 很小，不到一毫米，可是，硼、磷、锡原子的扩散深度更小。如果着重研究边界 $x=0$ 附近的慢扩散，在不太长的时间(其实是几小时甚至几十小时)里，硼、磷、锡原子来不及达到另一边界 $x=l$，根本不受另一边界 $x=l$ 的影响，我们不妨认为不存在另一边界 $x=l$，认为硅片或铌芯从 $x=0$ 延伸到无限远(其实还不到一毫米)，构成**半无界的**。

"半无界的"和"无界的"是一种抽象，但由于捉住了主要矛盾，它们是列宁所说的那种"科学的(正确的、郑重的、不是荒唐的)抽象"(《黑格尔〈逻辑学〉一书摘要》第 101 页)。

(三) 衔接条件

有时，由于一些原因，在所研究的区域里出现跃变点，泛定方程在跃变点失去意义。例如弦振动问题，如果有横向力 $F(t)$ 集中地作用于 $x=x_0$ 点，这点就成为弦的折点（图 57）。在折点 x_0，斜率 u_x 的左极限值 $u_x(x_0-0, t)$ 跟右极限值 $u_x(x_0+0, t)$ 不同，即 u_x 有跃变，因而 u_{xx} 不存在，弦振动方程 $u_{tt}-a^2u_{xx}=0$ 在这一点没有意义。这样，我们只能把 $x<x_0$ 和 $x>x_0$ 两段分别考虑，在各段上，弦振动方程是有意义的。但是，既然这不过是同一根弦的两段，它们并不是各自独立振动的。反映在数学上，不可能在两段上分别列出适定的定解问题。事实上，对于 $x<x_0$ 的一段，无法列出 $x=x_0$ 处的边界条件；对于 $x>x_0$ 的一段同样无法列出 $x=x_0$ 处的边界条件。两段应该作为一个整体来研究，因为两段的振动是互相关连的。首先，$x=x_0$ 虽是折点，但仍是连续的，即

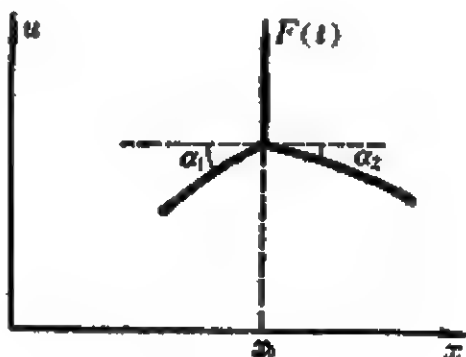


图 57

$$u(x_0-0, t)=u(x_0+0, t). \tag{32.8}$$

其次，在折点，力 $F(t)$ 应同张力平衡，即

$$F(t)-T\sin\alpha_1-T\sin\alpha_2=0.$$

由于 $\sin\alpha_1\approx \operatorname{tg}\alpha_1=u_x(x_0-0, t)$，$\sin\alpha_2\approx \operatorname{tg}\alpha_2=-u_x(x_0+0, t)$，上式即

$$Tu_x(x_0+0, t)-Tu_x(x_0-0, t)=-F(t). \tag{32.9}$$

条件(32.8)和(32.9)合称为衔接条件。考虑到衔接条件，两段弦作为一个整体，其振动问题是适定的。

严格说来，跃变点也是科学的抽象。实际上存在的是一个小的过渡区，在过渡区上，某些物理量的空间变化率很大，但毕竟还

是连续变动的。只要过渡区很小，不妨认为过渡集中于一个点即跃变点，这就简化了问题，不必详细考察过渡区上的变化情况。

习　题

1. 长为 l 的均匀弦，两端 $x=0$ 和 $x=l$ 固定，弦中张力为 T_0. 在 $x=h$ 点，以横向力 F_0 拉弦，达到稳定后放手任其自由振动。写出初始条件。

2. 长为 l 的均匀杆两端受拉力 F_0 作用而纵振动。写出边界条件。

3. 长为 l 的均匀杆，两端有恒定热流进入，其强度为 q_0. 写出这个热传导问题的边界条件。

4. 半径为 R 而表面熏黑的金属长圆柱，受到阳光照射。阳光方向垂直于柱轴，热流强度为 M. 写出这个圆柱的热传导问题的边界条件。

5. 习题 1 是否需要衔接条件？

6. 一根杆由横截面相同的两段连接而成。两段的材料不同，杨氏模量分别是 Y^{I} 和 Y^{II}，密度分别是 ρ^{I} 和 ρ^{II}. 试写出衔接条件。

7. 写出静电场中电介质表面的衔接条件。

8. 一根导热杆由两段构成，两段热传导系数、比热、密度分别是 $k^{\mathrm{I}}, c^{\mathrm{I}}, \rho^{\mathrm{I}}$ 和 $k^{\mathrm{II}}, c^{\mathrm{II}}, \rho^{\mathrm{II}}$. 初始温度是 u_0，然后保持两端温度为零。试把这个热传导问题表为定解问题。

§33. 二阶线性偏微分方程的分类

§31 导出的泛定方程，除杆的横振动方程以外，都是二阶的。本书将着重讨论二阶偏微分方程。

把所有自变数（包括空间坐标和时间坐标）依次记作 x_1，x_2，$\cdots x_n$. 二阶偏微分方程如果可以表为

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}u_{x_i x_j}+\sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i}+cu+f=0, \tag{33.1}$$

其中 a_{ij}, b_i, c, f 只是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的函数，就叫作线性的方程。§31 导出的泛定方程以及许多常见的偏微分方程都是线性的。

线性方程 (33.1) 中不含未知函数 u 及其偏导数的项 $f\equiv 0$，则

方程叫作齐次的，否则叫作非齐次的。一般说来，大凡有源(外力、热源或热汇、流体的源或汇、电荷、电流源)的情况，泛定方程为非齐次的，没有源的情况是齐次的。

如果泛定方程和定解条件都是线性的，可以把定解问题的解看作几个部分的线性叠加，只要这些部分各自所满足的泛定方程和定解条件的相应的线性叠加正好是原来的泛定方程和定解条件就行。这叫作叠加原理。本书将经常引用叠加原理。

以下研究方程分类，并把各类方程分别化为标准形式。这样，今后就只需讨论标准形式的方程的解法。

(一) 两个自变数的方程分类

先研究两个自变数 x 和 y 的二阶线性偏微分方程

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu+f=0, \tag{33.2}$$

其中 a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c, f 只是 x 和 y 的函数。在以下的讨论中，我们假定 $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c, f$ 都是实数。

试作自变数的代换

$$\begin{cases}x=x(\xi,\eta),\\ y=y(\xi,\eta),\end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases}\xi=\xi(x,y),\\ \eta=\eta(x,y),\end{cases} \tag{33.3}$$

代换的雅可俾式 $\dfrac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}\neq 0$. 通过代换(33.3)，$u(x,y)$ 成为 ξ 和 η 的函数。这里，还应把方程(33.2)改用新的自变数 ξ 和 η 表出。为此，作如下计算：

$$\begin{cases}u_x=u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x,\\ u_y=u_\xi\xi_y+u_\eta\eta_y;\end{cases} \tag{33.4}$$

$$\begin{cases}u_{xx}=(u_{\xi\xi}\xi_x^2+u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+u_\xi\xi_{xx})+(u_{\eta\xi}\eta_x\xi_x+u_{\eta\eta}\eta_x^2+u_\eta\eta_{xx})\\ \qquad =u_{\xi\xi}\xi_x^2+2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+u_{\eta\eta}\eta_x^2+u_\xi\xi_{xx}+u_\eta\eta_{xx},\\ u_{xy}=(u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y+u_{\xi\eta}\xi_x\eta_y+u_\xi\xi_{xy})+(u_{\eta\xi}\eta_x\xi_y+u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y+u_\eta\eta_{xy})\\ \qquad =u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y+u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y+u_\xi\xi_{xy}+u_\eta\eta_{xy},\\ u_{yy}=(u_{\xi\xi}\xi_y^2+u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y+u_\xi\xi_{yy})+(u_{\eta\xi}\eta_y\xi_y+u_{\eta\eta}\eta_y^2+u_\eta\eta_{yy})\\ \qquad =u_{\xi\xi}\xi_y^2+2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y+u_{\eta\eta}\eta_y^2+u_\xi\xi_{yy}+u_\eta\eta_{yy}.\end{cases} \tag{33.5}$$

把(33.4)和(33.5)代入(33.2)得到采用新自变数ξ和η后的方程

$$A_{11}u_{\xi\xi}+2A_{12}u_{\xi\eta}+A_{22}u_{\eta\eta}+B_1u_\xi+B_2u_\eta+Cu+F=0, \tag{33.6}$$

其中系数

$$\begin{cases} A_{11}=a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2, \\ A_{12}=a_{11}\xi_x\eta_x+a_{12}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+a_{22}\xi_y\eta_y, \\ A_{22}=a_{11}\eta_x^2+2a_{12}\eta_x\eta_y+a_{22}\eta_y^2, \\ B_1=a_{11}\xi_{xx}+2a_{12}\xi_{xy}+a_{22}\xi_{yy}+b_1\xi_x+b_2\xi_y, \\ B_2=a_{11}\eta_{xx}+2a_{12}\eta_{xy}+a_{22}\eta_{yy}+b_1\eta_x+b_2\eta_y, \\ C=c, \\ F=f. \end{cases} \tag{33.7}$$

方程(33.6)仍然是线性的。

从(33.7)可以看到，如果取一阶偏微分方程

$$a_{11}z_x^2+2a_{12}z_xz_y+a_{22}z_y^2=0 \tag{33.8}$$

的一个特解作为新自变数ξ，则$a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2=0$，从而$A_{11}=0$。同理，如果(33.8)的另一特解作为新自变数$\eta$，则$A_{22}=0$。这样，方程(33.6)就得以化简。

一阶偏微分方程(33.8)的求解可转化为常微分方程的求解。事实上，(33.8)可改写为

$$a_{11}\left(-\frac{z_x}{z_y}\right)^2-2a_{12}\left(-\frac{z_x}{z_y}\right)+a_{22}=0. \tag{33.9}$$

如果把

$$z(x,y)=\text{常数} \tag{33.10}$$

当作定义隐函数$y(x)$的方程，则$dy/dx=-z_x/z_y$，从而(33.9)正是

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2a_{12}\frac{dy}{dx}+a_{22}=0. \tag{33.11}$$

总之，为了化简二阶线性偏微分方程(33.2)，先求解常微分方

程(33.11)。求得(33.11)的一个解“$\xi(x,y)=$常数”后，取$\xi=\xi(x,y)$作为新的自变数，则在新的二阶线性偏微分方程(33.6)中，系数$A_{11}=0$. 求得 (33.11) 的另一个解“$\eta(x,y)=$常数”后，又取$\eta=\eta(x,y)$作为新的自变数，则在新的方程(33.6)中，系数 $A_{22}=0$.

常微分方程 (33.11) 叫作二阶线性偏微分方程(33.2)的特征方程，特征方程的一般积分“$\xi(x,y)=$常数”和“$\eta(x,y)=$常数”叫作特征线。

特征方程(33.11)可分为两个方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}+\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \tag{33.12}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}-\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \tag{33.13}$$

通常根据 (33.12) 和 (33.13) 的根号下的符号划分偏微分方程(33.2)的类型：

$$\begin{cases} a_{12}^2-a_{11}a_{22}>0, & \text{双曲型;} \\ a_{12}^2-a_{11}a_{22}=0, & \text{抛物型;} \\ a_{12}^2-a_{11}a_{22}<0, & \text{椭圆型。} \end{cases}$$

方程(33.2)的系数 a_{11}, a_{12} 和 a_{22} 可以是 x 和 y 的函数，所以，一个方程在自变数的某一区域上属于某一类型，在另一区域上可能属于另一类型。用(33.7)容易验证

$$A_{12}^2-A_{11}A_{22}=(a_{12}^2-a_{11}a_{22})(\xi_x\eta_y-\xi_y\eta_x)^2,$$

这是说，作自变数的代换时，方程的类型不变。

先看双曲型。(33.12)和(33.13)各给出一族实的特征线

$$\xi(x,y)=\text{常数},\quad \eta(x,y)=\text{常数}。$$

取 $\xi=\xi(x,y)$ 和 $\eta=\eta(x,y)$ 作为新的自变数，则 $A_{11}=0, A_{22}=0$, 从而自变数代换后的方程(33.6)成为

$$u_{\xi\eta}=-\frac{1}{2A_{12}}[B_1u_\xi+B_2u_\eta+Cu+F]. \tag{33.14}$$

或者，再作自变数代换

$$\begin{cases}\xi=\alpha+\beta,\\ \eta=\alpha-\beta,\end{cases}\quad \text{即} \quad \begin{cases}\alpha=\dfrac{1}{2}(\xi+\eta),\\ \beta=\dfrac{1}{2}(\xi-\eta),\end{cases}$$

则方程(33.14)化为

$$u_{\alpha\alpha}-u_{\beta\beta}=-\frac{1}{A_{12}}[(B_1+B_2)u_\alpha+(B_1-B_2)u_\beta+2Cu+2F].$$

(33.15)

(33.14)或(33.15)是双曲型方程的标准形式。一维波动方程，如弦振动方程(31.7)和(31.8)，杆的纵振动方程(31.11)，电报方程(31.14)和(31.15)等，都是标准形式的双曲型方程。

再看抛物型。由于 $a_{12}^2-a_{11}a_{22}=0$，特征方程(33.11)即

$$\left(\sqrt{a_{11}}\frac{dy}{dx}-\sqrt{a_{22}}\right)^2=0,$$

因此只有一族实的特征线

$$\sqrt{a_{11}}\,y-\sqrt{a_{22}}\,x=\text{常数}。$$

取 $\xi=\sqrt{a_{11}}\,y-\sqrt{a_{22}}\,x$ 作为新的自变数，就有 $A_{11}=0$. 除此之外，

$$\begin{aligned}A_{12}&=a_{11}\xi_x\eta_x+\sqrt{a_{11}a_{22}}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+a_{22}\xi_y\eta_y\\&=(\sqrt{a_{11}}\,\xi_x+\sqrt{a_{22}}\,\xi_y)(\sqrt{a_{11}}\,\eta_x+\sqrt{a_{22}}\,\eta_y)\\&=0(\sqrt{a_{11}}\,\eta_x+\sqrt{a_{22}}\,\eta_y)=0.\end{aligned}$$

从而自变数代换后的方程(33.6)成为

$$u_{\eta\eta}=-\frac{1}{A_{22}}[B_1u_\xi+B_2u_\eta+Cu+F]. \qquad (33.16)$$

这是抛物型方程的标准形式。一维输运方程，如扩散方程(31.35)，热传导方程(31.38)等，都是标准形式的抛物型方程。

最后看椭圆型方程。(33.12)和(33.13)各给出一族复数的特

征线

$$\xi(x,y)=\text{常数},\quad \eta(x,y)=\text{常数},$$

而且 $\eta=\xi^*$. 取 $\xi=\xi(x,y)$ 和 $\eta=\eta(x,y)=\xi^*(x,y)$ 作为新的自变数，则 $A_{11}=0, A_{22}=0$，从而自变数代换后的方程(33.6)成为

$$u_{\xi\eta}=-\frac{1}{2A_{12}}[B_1u_\xi+B_2u_\eta+Cu+F]. \tag{33.17}$$

这方程不同于(33.14)，因为这里的 ξ 和 η 是复变数。一般说来，这是不方便的。通常又作代换

$$\begin{cases}\xi=\alpha+i\beta,\\ \eta=\alpha-i\beta,\end{cases}\quad \text{即}\quad \begin{cases}\alpha=\operatorname{Re}\xi=\dfrac{1}{2}(\xi+\eta),\\ \beta=\operatorname{Im}\xi=\dfrac{1}{2i}(\xi-\eta).\end{cases}$$

则方程(33.17)化为

$$u_{\alpha\alpha}+u_{\beta\beta}=-\frac{1}{A_{12}}[(B_1+B_2)u_\alpha+i(B_2-B_1)u_\beta+2Cu+F]. \tag{33.18}$$

(33.17) 或 (33.18)是椭圆型方程的标准形式。平面稳定场方程，如稳定浓度分布 (31.40)，稳定温度分布 (31.41)，静电场方程(31.44)和(31.45)，无旋稳恒电流场方程(31.47)和(31.48)，无旋稳恒流动方程(31.50) 和 (31.51) 等，在二维情况下，都是 (33.18) 形式的椭圆型方程。

（二）多自变数的方程分类

考察线性方程(33.1)

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}u_{x_ix_j}+\sum_{i=1}^{n}b_iu_{x_i}+cu+f=0. \tag{33.1}$$

试作自变数的代换

$$\xi_k=\xi_k(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad k=1,2,\cdots,n. \tag{33.19}$$

代换的雅可俾式 $\dfrac{\partial(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\neq0$. 通过代换(33.19)，$u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 成

为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 的函数。这里，还应把方程(33.1)改用新的自变数 ξ_k 表出。为此，作如下计算：

$$\begin{cases} u_{x_i}=\sum_{k=1}^{n}u_{\xi_k}(\xi_k)_{x_i}, \\ u_{x_ix_j}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}u_{\xi_k\xi_l}(\xi_k)_{x_i}(\xi_l)_{x_j}+\sum_{k=1}^{n}u_{\xi_k}(\xi_k)_{x_ix_j} \end{cases} \tag{33.20}$$

把(33.20)代入(33.1)得到采用新自变数 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 后的方程

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}A_{kl}u_{\xi_k\xi_l}+\sum_{k=1}^{n}B_ku_{\xi_k}+Cu+F=0, \tag{33.21}$$

其中系数

$$\begin{cases} A_{kl}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}(\xi_k)_{x_i}(\xi_l)_{x_j}, \\ B_k=\sum_{i=1}^{n}b_i(\xi_k)_{x_i}+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}(\xi_k)_{x_ix_j}, \end{cases} \tag{33.22}$$

方程(33.21)仍然是线性的。

值得注意的是，二阶偏导数的系数变换公式恰恰是二次齐次式

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}y_iy_j \tag{33.23}$$

的系数在自变数代换($y_1,y_2,\cdots,y_n\to\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$)

$$y_i=\sum_{k=1}^{n}(\xi_k)_{x_i}\eta_k \tag{33.24}$$

下的变换公式。二次齐次式(33.23)可以用适当的代换而对角化，在相应的代换下，方程(33.21)也就"对角化"，即

$$\begin{cases} A_{ij}=0 \quad (i\neq j), \\ A_{ii}=+1,\ -1\ 或\ 0. \end{cases} \tag{33.25}$$

二次齐次式对角化时有一条**惯性定律**，从而 A_{ii} 之为正或为负或为零的个数亦各为一定。据此，划分偏微分方程的类型：

- 所有 n 个 $A_{ii}\neq0$，且全为同号， **椭圆型**；
- 有某些 $A_{ii}=0$， **抛物型**；
- 所有 n 个 $A_{ii}\neq0$，其中 $n-1$ 个同号，另一反号， **双曲型**；
- 所有 n 个 $A_{ii}\neq0$，两种符号都不止一个， **超双曲型**。

相应的标准形式是

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}u_{x_ix_i}+\sum_{i=1}^{n}B_iu_{x_i}+Cu+F=0, & \text{(椭圆型)}\\ \sum_{i=1}^{n-m}u_{x_ix_i}+\sum_{i=1}^{n}B_iu_{x_i}+Cu+F=0, & \text{(抛物型)}\\ u_{x_1x_1}-\sum_{i=2}^{n}u_{x_ix_i}+\sum_{i=1}^{n}B_iu_{x_i}+Cu+F=0, & \text{(双曲型)}\\ \sum_{i=1}^{m}u_{x_ix_i}-\sum_{i=m+1}^{n}u_{x_ix_i}+\sum_{i=1}^{n}B_iu_{x_i}+Cu+F=0. & \text{(超双曲型)}\end{cases}$$

§31导出的泛定方程之中，波动方程（弦、杆、膜的振动方程，电报方程，声振动和声波方程，电磁波方程）是双曲型的，输运方程（扩散方程、热传导方程）是抛物型的，稳定场方程（静电场，稳定浓度分布，稳定温度分布，无旋稳恒电流场，无旋稳恒流动）是椭圆型的。量子力学的薛定谔方程(31.57)虽是抛物型的，但由于系数中有 $i=\sqrt{-1}$，所以并不代表输运过程，而是代表波动（量子力学的波函数）。

应当指出，除非自变数的个数 $n\leq 2$，二阶线性偏微分方程(33.1)只能逐点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 化为上述标准形式，一般不能在某个区域上各点同时化为标准形式。即使方程在某个区域上各点属于同一类型，一般还是不能在该区域上各点同时化为标准形式。道理是这样的：非“对角的”系数 $A_{ij}(i\neq j)$ 有

$$\frac{n(n-1)}{2} \tag{33.26}$$

个，要求它们为零意味着满足 $n(n-1)/2$ 个条件，可供选择的代换 $\xi_k(k=1,2,\cdots,n)$ 只有

$$n \tag{33.27}$$

个。如 $n>3$，则(33.27)总是小于(33.26)，因而不可能选择一种代换使所有非“对角的”系数全为零。如 $n=3$，则(33.27)等于(33.26)，可选一代换使所有非“对角的”系数为零，但“对角的”系数一般未必全相同。因此，必须 $n\leq 2$，才有可能在某一区域上各点同时化为标准形式。

（三）常系数线性方程

常系数线性方程按上述方法化为标准形式之后，还可以进一

步简化。

以电报方程(31.13)或(31.14)为例，

$$LCu_{tt}-u_{xx}+(LG+RC)u_t+RGu=0. \tag{33.28}$$

试作函数变换 $u(x,t)\to v(x,t)$,

$$u(x,t)=e^{\lambda x+\mu t}v(x,t), \tag{33.29}$$

其中 λ 和 μ 是尚待确定的常数。于是，

$$\begin{cases} u_x=e^{\lambda x+\mu t}(v_x+\lambda v), \\ u_t=e^{\lambda x+\mu t}(v_t+\mu v), \\ u_{xx}=e^{\lambda x+\mu t}(v_{xx}+2\lambda v_x+\lambda^2 v), \\ u_{xt}=e^{\lambda x+\mu t}(v_{xt}+\lambda v_t+\mu v_x+\lambda\mu v), \\ u_{tt}=e^{\lambda x+\mu t}(v_{tt}+2\mu v_t+\mu^2 v). \end{cases} \tag{33.30}$$

把(33.29)和(33.30)代入(33.28)，约去公共因子 $e^{\lambda x+\mu t}$，得

$$LCv_{tt}-v_{xx}-2\lambda v_x+[2\mu LC+(LG+RC)]v_t$$
$$+[LC\mu^2-\lambda^2+\mu(LG+RC)+RG]v=0.$$

如果选取 $\lambda=0$, $\mu=-(LG+RC)/2LC$, 即 $u(x,t)=e^{-\frac{LG+RC}{2LC}t}$ $v(x,t)$，则一阶偏导数 v_t 和 v_x 的项消失，方程简化为

$$LCv_{tt}-v_{xx}-\frac{(LG-RC)^2}{4LC}v=0. \tag{33.31}$$

习　　题

1. 把下列方程化为标准形式。

(1) $au_{xx}+2au_{xy}+au_{yy}+bu_x+cu_y+u=0$,

(2) $u_{xx}-2u_{xy}-3u_{yy}+2u_x+6u_y=0$,

(3) $u_{xx}+4u_{xy}+5u_{yy}+u_x+2u_y=0$,

(4) $u_{xx}+yu_{yy}=0$,

(5) $u_{xx}+xu_{yy}=0$,

(6) $y^2u_{xx}+x^2u_{yy}=0$,

(7) $4y^2u_{xx}-e^{2x}u_{yy}-4y^2u_x=0$.

2．簡化下列常系数方程。

(1) $u_{xx}+u_{yy}+\alpha u_x+\beta u_y+\gamma u=0$，

(2) $u_{xx}=\dfrac{1}{a^2}u_y+\alpha u+\beta u_x$，

(3) $u_{xy}+\dfrac{c-b}{a}u_x+\dfrac{b}{a}u_y+u=0$，

(4) $u_{xy}+3u_x+4u_y+2u=0$，

(5) $2au_{xx}+2au_{xy}+au_{yy}+2bu_x+2cu_y+u=0$。

第九章　行 波 法

§34. 行波法

读者已经熟悉常微分方程的求解，一般是先求方程的通解，而通解含有任意常数(积分常数)，于是再用初始条件确定这些常数。本节仿照这个办法求解偏微分方程的定解问题。先求偏微分方程的通解，而通解含有任意函数，再用定解条件确定这些函数。但是，偏微分方程的通解不那么容易求，用定解条件确定函数往往更加困难，因而上述办法只适用于很少数的某些定解问题，例如本节的定解问题。

(一) 达朗伯公式・行波

无限长("无限长"的真实物理意义见§32)的弦的自由振动、无限长的杆的自由纵振动、无限长理想传输线上的电流和电压变化，具有相同的泛定方程

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=0. \qquad (34.1)$$

这正是标准形式(33.15)的双曲型方程。在§33中，还有另一标准形式(33.14)即下面的(34.4)。为了照顾略去§33未读的读者，这里还是给出(34.4)的推导。(34.1)即

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+a\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}-a\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0. \qquad (34.2)$$

这就提示我们作代换 $x=a(\xi+\eta)$，$t=\xi-\eta$，因为这样一来，

$$\frac{\partial}{\partial \xi}=\frac{\partial t}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial t}+a\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial \eta}=\frac{\partial t}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial x}=-\left(\frac{\partial}{\partial t}-a\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

方程(34.2)就成为 $u_{\xi\eta}=0$. 但为了以后的书写便利，我们把这个

代换修改为

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}(\xi+\eta), \\ t=\frac{1}{2a}(\xi-\eta), \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} \xi=x+at, \\ \eta=x-at. \end{cases} \tag{34.3}$$

于是泛定方程(34.1)即(34.2)成为

$$u_{\xi\eta}=0. \tag{34.4}$$

泛定方程既已化为(34.4),就很容易求出通解。先对 η 积分,得

$$u_\xi=f(\xi),$$

其中 f 是任意函数。再对 ξ 积分,就得到通解

$$\begin{aligned} u&=\int f(\xi)d\xi+f_2(\eta)=f_1(\xi)+f_2(\eta) \\ &=f_1(x+at)+f_2(x-at), \end{aligned} \tag{34.5}$$

其中 f_1 和 f_2 都是任意函数。

通解(34.5)有很鲜明的物理意义。事实上,凡 $f(x-at)$ 形状的函数描写的是沿 x 的正方向传播的行波,其速度为 a. 这不难用下面的办法看出:改用以速度 a 沿 x 的正方向移动的坐标轴 X,则动坐标 X 和静坐标 x 之间的关系是

$$X=x-at,$$

于是函数

$$f(x-at)=f(X),$$

这是说,在动坐标系中,函数的值只取决于坐标 X,而跟时间无关。换句话说,函数的图象相对于动坐标系保持不变,亦即随着动坐标系以速度 a 沿 x 的正方向移动,这正是行波。同理,凡 $f(x+at)$ 形状的函数描写的是沿 x 的负方向传播的行波,其速度为 a. 这样,通解(34.5)的物理意义可叙述如下:对于无限长的弦的自由振动、无限长杆的自由纵振动、无限长理想传输线上的电流和

电压变化而言，任意扰动总是以行波的形式分向两方传播出去，波速为 a.

按照(31.6)，弦振动方程的 $a=\sqrt{T/\rho}$，这是说，弦张得越紧，弦的线密度越小，则波速越快。按照(31.10)，杆的纵振动方程的 $a=\sqrt{Y/\rho}$，这是说，杆的材料的杨氏模量越大(粗浅地说，弹性越足)，密度越小，则波速越快。电报方程的 $a=\sqrt{1/LC}$，在电磁学里可以证明，传输线的两线形状、线间距离改变，则 L 和 C 都随之而变，但 $a=\sqrt{1/LC}$ 则保持不变，总是等于光速.

至于行波的具体波形，当然和它的“历史”有关，即取决于初始条件

$$u|_{t=0}=\varphi(x),\quad u_t|_{t=0}=\psi(x).$$

以通解(34.5)代入初始条件，得

$$f_1(x)+f_2(x)=\varphi(x),\quad af_1'(x)-af_2'(x)=\psi(x);$$

即
$$\begin{cases} f_1(x)+f_2(x)=\varphi(x), \\ f_1(x)-f_2(x)=\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{x_0}^{x}\psi(\xi)d\xi+f_1(x_0)-f_2(x_0). \end{cases}$$

由此解得

$$\begin{cases} f_1(x)=\dfrac{1}{2}\varphi(x)+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x_0}^{x}\psi(\xi)d\xi+\dfrac{1}{2}[f_1(x_0)-f_2(x_0)], \\ f_2(x)=\dfrac{1}{2}\varphi(x)-\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x_0}^{x}\psi(\xi)d\xi-\dfrac{1}{2}[f_1(x_0)-f_2(x_0)]. \end{cases}$$

于是，从通解(34.5)挑选出符合给定的初始条件的特解

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi. \quad (34.6)$$

这叫作达朗伯公式。

作为例子，设初速为零即 $\psi(x)=0$，达朗伯公式(34.6)给出 $u(x,t)=\frac{1}{2}\varphi(x+at)+\frac{1}{2}\varphi(x-at)$，即初始位移(图 58 最下一图的粗线所描画)分为两半(该图细线)，分别向左右两方以速度 a 移

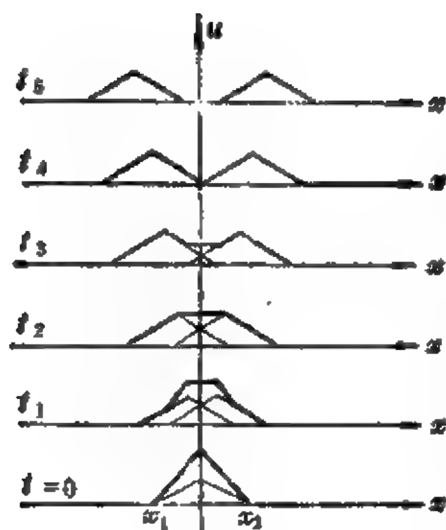


图 58

动(图 58 由下而上各图的细线所描画)，这两个行波的和(图 58 由下而上各图的粗线所描画）给出各个时刻的波形。

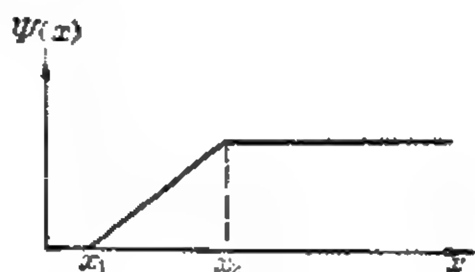


图 59

作为第二个例子，设初始位移为零即 $\varphi(x)=0$，而且初速 $\psi(x)$ 也只在区间 (x_1,x_2) 上不为零，

$$\psi(x)=\begin{cases}\text{常数 } \psi_0 & (x \text{ 在}(x_1,x_2)\text{上}),\\ 0 & (x \text{ 不在}(x_1,x_2)\text{上}).\end{cases}$$

达朗伯公式(34.6)给出

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{x+at}\psi(\xi)d\xi-\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{x-at}\psi(\xi)d\xi$$
$$=\Psi(x+at)-\Psi(x-at),$$

这里 Ψ 指的是(图 59)

$$\Psi(x)=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi=\begin{cases}0 & (x\leqslant x_1),\\ \frac{1}{2a}(x-x_1)\psi_0 & (x_1\leqslant x\leqslant x_2),\\ \frac{1}{2a}(x_2-x_1)\psi_0 & (x_2\leqslant x).\end{cases}$$

于是，作出 $+\Psi(x)$ 和 $-\Psi(x)$ 两个图形，让它们以速度 a 分别向左右两方移动(图 60 由下而上各图的细线所描画)，两者的和(图 60 由下而上各图的粗线)就描画出各个时刻的波形。

在图 58 中，波已“通过”的地区，振动消失而弦静止在原平衡位置；在图 60 中，波已“通过”的地区，虽然振动也消失，但偏离了原平衡位置。

达朗伯公式给出的解是稳定的，这不难如下证明。设有两组初始条件

$$\begin{cases} u|_{t=0}=\varphi_1(x), \\ u_t|_{t=0}=\psi_1(x); \end{cases}$$

$$\begin{cases} u|_{t=0}=\varphi_2(x), \\ u_t|_{t=0}=\psi_2(x). \end{cases}$$

它们相差很细微

$$|\varphi_1-\varphi_2|<\delta,$$

$$|\psi_1-\psi_2|<\delta.$$

相应的两解 u_1 和 u_2 的差

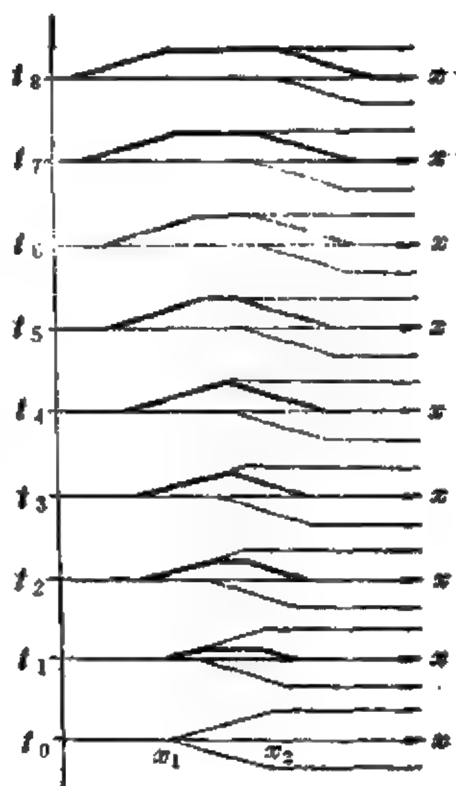


图 60

$$|u_1(x,t)-u_2(x,t)|\leqslant\frac{1}{2}|\varphi_1(x+at)-\varphi_2(x+at)|$$

$$+\frac{1}{2}|\varphi_1(x-at)-\varphi_2(x-at)|+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}|\psi_1(\xi)-\psi_2(\xi)|d\xi$$

$$<\frac{1}{2}\delta+\frac{1}{2}\delta+\frac{1}{2a}\delta 2at=(1+t)\delta,$$

可见相差也是很细微的。

（二）端点的反射

研究半无限长（“半无限长”的真实物理意义见 § 32）弦的自由振动。半无限长的弦具有一个端点。

先考察端点固定的情况，即定解问题

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \qquad (0<x<\infty), \tag{34.7}$$

$$\begin{cases} u|_{t=0}=\varphi(x), \\ u_t|_{t=0}=\psi(x) \end{cases} \quad (0\leqslant x<\infty), \tag{34.8}$$

$$u|_{x=0}=0. \tag{34.9}$$

注意初始条件(34.8)里的 $\varphi(x)$和 $\psi(x)$必须宗量 $x\geqslant0$ 才有意义，这是因为在 $x<0$ 的区域上弦并不存在，也就谈不上初始条件．这样，对于较迟的时间（$t>x/a$），达朗伯公式里的 $\varphi(x-at)$ 和 $\int_{x-at}\psi(\xi)d\xi$ 失去意义，公式也就不能应用。

参照§28 习题 4 和§26 例题，不妨把这根半无限长弦当作某根无限长弦的 $x\geqslant0$ 的部分。按照(34.9)，这无限长弦的振动过程中，点 $x=0$ 必须保持不动。这是说，无限长弦的位移 $u(x,t)$应当是奇函数，因而无限长弦的初始位移 $\Phi(x)$和初始速度 $\Psi(x)$都应当是奇函数，即

$$\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x) & (x\geqslant0),\\ -\varphi(-x) & (x<0);\end{cases}\quad \Psi(x)=\begin{cases}\psi(x) & (x\geqslant0),\\ -\psi(-x) & (x<0).\end{cases}\tag{34.10}$$

通常采用"延拓"一词把(34.10)说成"把 $\varphi(x)$和 $\psi(x)$从半无界区间 $x\geqslant0$ 奇延拓到整个无界区间，分别成为 $\Phi(x)$和$\Psi(x)$"。现在完全可以应用达朗伯公式(34.6)求解无限长弦的自由振动，它的 $x\geqslant0$ 的部分正是我们所考察的半无限长弦。根据(34.6)，

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\Phi(x+at)+\Phi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(\xi)d\xi.$$

把(34.10)代入上式，

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]\\ \qquad+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi \quad \left(t\leqslant\dfrac{x}{a}\right),\\ \dfrac{1}{2}[\varphi(x+at)-\varphi(at-x)]\\ \qquad+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{at-x}^{x+at}\psi(\xi)d\xi \quad \left(t\geqslant\dfrac{x}{a}\right).\end{cases}\tag{34.11}$$

为了阐明(34.11)的物理意义，图 61 描画了只有初始位移而

没有初始速度的情况。最下一图右半边用实线描画出分别向左右两方移动的波，左半边用细线描画出其奇延拓，奇延拓的波也分别向左右两方移动。在这图中，端点还没有引起什么影响。由下而上各图按着时间顺序描画了波的传播情况，粗线为合成的波形，端点 $x=0$ 确实保持不动。由图可见，端点的影响表现为反射波。这反射波的周相跟入射波相反，这就是所谓半波损失。

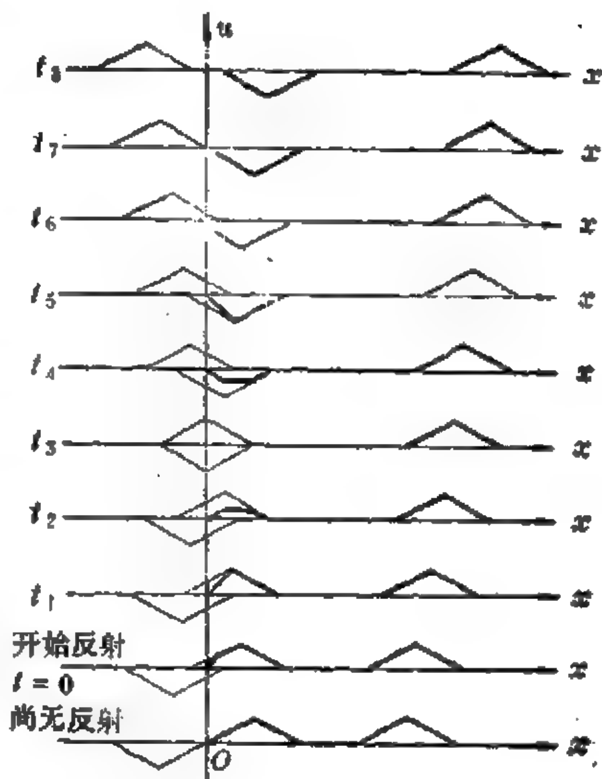


图 61

再考察半无限长杆的自由振动，杆的端点自由，这个定解问题是

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \quad (0<x<\infty), \tag{34.12}$$

$$\begin{cases} u|_{t=0}=\varphi(x), \\ u_t|_{t=0}=\psi(x) \end{cases} (0\leqslant x<\infty), \tag{34.13}$$

$$u_x|_{x=0}=0. \tag{34.14}$$

同样，不妨把这根半无限长杆当作某根无限长杆的 $x\geqslant 0$ 的部分。按照(34.14)，这无限长杆的振动过程中，在点 $x=0$ 的相对伸长 u_x 必须保持为零。这是说，无限长杆的位移 $u(x,t)$ 应当是偶函数，因而无限长杆的初始位移 $\Phi(x)$ 和初始速度 $\Psi(x)$ 都应当是偶函数，即

$$\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x) & (x\geqslant 0), \\ \varphi(-x) & (x<0);\end{cases} \Psi(x)=\begin{cases}\psi(x) & (x\geqslant 0), \\ \psi(-x) & (x<0).\end{cases} \tag{34.14'}$$

这就是“把 $\varphi(x)$和 $\psi(x)$从半无界区间 $x\geqslant0$ 偶延拓到整个无界区间分别成为 $\Phi(x)$和 $\Psi(x)$”。现在，应用达朗伯公式(34.6)求解无限长杆的自由振动，

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\Phi(x+at)+\Phi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(\xi)d\xi.$$

把(34.14)代入上式，

$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]\\ \quad+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi \quad \left(t\leqslant\frac{x}{a}\right),\\ \frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(at-x)]\\ \quad+\frac{1}{2a}\int_{0}^{x+at}\psi(\xi)d\xi+\frac{1}{2a}\int_{0}^{at-x}\psi(\xi)d\xi \\ \qquad\qquad \left(t>\frac{x}{a}\right).\end{cases} \tag{34.15}$$

自由端点的影响可以仿照图 61 加以阐明，这也是一种反射波。不同的是反射波的周相跟入射波相同，没有半波损失。

（三）跃变点的反射

不仅端点会引起反射，跃变点也会引起反射。

研究一根无限长的杆，它的 $x<0$ 部分和 $x>0$ 部分是由两种不同的材料做成，其杨氏模量、密度分别是 Y^{I}, ρ^{I} 和 Y^{II}, ρ^{II}。点 $x=0$ 是一个跃变点。设有行波 $u(x,t)=f(t-x/a^{\mathrm{I}})$ 从区域 I(即 $x<0$ 的区域)向 $x=0$ 行进，到达 $x=0$ 时即发生反射和透射。现在求反射波和透射波。把这个行波到达跃变点的时刻取作 $t=0$，则定解问题是

$$\begin{cases}u^{\mathrm{I}}_{tt}-a^{\mathrm{I}2}u^{\mathrm{I}}_{xx}=0 \quad (x<0), & (34.16)\\ u^{\mathrm{I}}|_{t<0}=f\left(t-\frac{x}{a^{\mathrm{I}}}\right) \ (x<0); & (34.17)\end{cases}$$

$$\begin{cases} u^{\mathrm{II}}_{tt}-a^{\mathrm{II}2}u_{xx}=0 & (x>0), \quad (34.18)\\ u^{\mathrm{II}}|_{t\le 0}=0,\ u^{\mathrm{II}}_t|_{t\le 0}=0 & (x>0); \quad (34.19)\end{cases}$$

$$\begin{cases} u^{\mathrm{I}}|_{x=0}=u^{\mathrm{II}}|_{x=0},\\ Y^{\mathrm{I}}u^{\mathrm{I}}_x|_{x=0}=Y^{\mathrm{II}}u^{\mathrm{II}}_x|_{x=0}. \end{cases} \qquad (34.20)$$

这里不拟从达朗伯公式(34.6)出发，而是直接从通解(34.5)出发。方程(34.16)的通解是区域Ⅰ中的行波

$$u^{\mathrm{I}}(x,t)=f\left(t-\frac{x}{a^{\mathrm{I}}}\right)+g\left(t+\frac{x}{a^{\mathrm{I}}}\right)\ (x<0), \qquad (34.21)$$

$g(t+x/a^{\mathrm{I}})$ 是尚待确定的反射波。据条件 (34.17)，$g(x/a^{\mathrm{I}})=0$ $(x<0)$，即

$$g(\xi)=0\ (\xi<0). \qquad (34.22)$$

方程 (34.18) 的通解是区域Ⅱ中的行波。考虑到区域Ⅱ只能有透射波而不可能有反射波，

$$u^{\mathrm{II}}(x,t)=h\left(t-\frac{x}{a^{\mathrm{I}}}\right)\ (x>0), \qquad (34.23)$$

$h(t-x/a^{\mathrm{I}})$是尚待确定的透射波。据条件(34.19)，$h(-x/a^{\mathrm{II}})=0$，$h'(-x/a^{\mathrm{II}})=0(x>0)$，即

$$h(\xi)=0,\quad h'(\xi)=0\quad (\xi<0). \qquad (34.24)$$

两个区域中的振动，分别地看，不能构成适定的定解问题。必须通过衔接条件(34.19)把它们连接起来才构成定解问题。为此，把通解(34.21)和(34.23)代入衔接条件(34.20)，

$$\begin{cases} f(t)+g(t)=h(t),\\ -\frac{1}{a^{\mathrm{I}}}Y^{\mathrm{I}}f'(t)+\frac{1}{a^{\mathrm{I}}}Y^{\mathrm{I}}g'(t)=-\frac{1}{a^{\mathrm{II}}}Y^{\mathrm{II}}h'(t) \end{cases}\ (t>0),$$

即
$$\begin{cases} f(t)+g(t)=h(t),\\ -a^{\mathrm{II}}Y^{\mathrm{I}}f(t)+a^{\mathrm{II}}Y^{\mathrm{I}}g(t)=-a^{\mathrm{I}}Y^{\mathrm{II}}h(t) \end{cases}\quad (t>0). \quad (34.25)$$

从(34.25)解得

$$
\begin{cases}
h(\xi)=\dfrac{2a^{\mathrm{II}}Y^{\mathrm{I}}}{a^{\mathrm{II}}Y^{\mathrm{I}}+a^{\mathrm{I}}Y^{\mathrm{II}}}f(\xi), \\
g(\xi)=\dfrac{a^{\mathrm{II}}Y^{\mathrm{I}}-a^{\mathrm{I}}Y^{\mathrm{II}}}{a^{\mathrm{II}}Y^{\mathrm{I}}+a^{\mathrm{I}}Y^{\mathrm{II}}}f(\xi)
\end{cases}
\quad (\xi>0). \qquad (34.26)
$$

合并(34.22),(34.24)和(34.26),得到答案

$$
h\left(t-\frac{x}{a^{\mathrm{II}}}\right)=\begin{cases}
0 & \left(t<\dfrac{x}{a}\right), \\
\dfrac{2a^{\mathrm{II}}Y^{\mathrm{II}}}{a^{\mathrm{II}}Y^{\mathrm{I}}+a^{\mathrm{I}}Y^{\mathrm{II}}}f\left(t-\dfrac{x}{a^{\mathrm{I}}}\right) & \left(t>\dfrac{x}{a}\right);
\end{cases}
$$

$$
g\left(t+\frac{x}{a^{\mathrm{I}}}\right)=\begin{cases}
0 & \left(t<\dfrac{x}{a}\right), \\
\dfrac{a^{\mathrm{II}}Y^{\mathrm{I}}-a^{\mathrm{I}}Y^{\mathrm{II}}}{a^{\mathrm{II}}Y^{\mathrm{I}}+a^{\mathrm{I}}Y^{\mathrm{II}}}f\left(t+\dfrac{x}{a^{\mathrm{I}}}\right) & \left(t>\dfrac{x}{a}\right).
\end{cases}
$$

对于绝大多数定解问题,本节这种先求通解的方法并不适用,这是因为偏微分方程的通解并不那么容易求,用定解条件确定函数往往更加困难。从下章开始,我们将不再先求泛定方程的通解,而是把泛定方程和定解条件作为整体加以研究。

习　题

1. 求解无限长弦的自由振动,设弦的初始位移为 $\varphi(x)$,初始速度为 $-a\varphi'(x)$。

2. 求解无限长理想传输线上电压和电流的传播情况,设初始电压分布为 $A\cos kx$,初始电流分布为 $\sqrt{C/L}\,A\cos kx$.

3. 在 $G/C=R/L$ 条件下求无限长传输线上的电报方程的通解。

4. 无限长弦在点 $x=x_0$ 受到初始冲击,冲量为 I,试求解弦的振动。[提示:$u_t|_{t=0}=(I/\rho)\delta(x-x_0)$]

5. 求解细圆锥形均质杆的纵振动。[提示:泛定方程见§31 习题2,作变换 $u=v/x$.]

6. 半无限长杆的端点受到纵向力 $F(t)=A\sin\omega t$ 作用,求解杆的纵振

7. 求解半无限长理想传输线上电报方程的解，端点通过电阻R而相接，初始电压分布$A\cos kx$，初始电流分布$\sqrt{C/L}A\cos kx$。在什么条件下端点没有反射（这种情况叫作匹配）？

8. 半无限长弦的初始位移和速度都是零，端点作微小振动$u|_{x=0}=A\sin\omega t$。求解弦的振动。

9. 在弦的$x=0$处悬挂着质量为M的载荷。有一行波$u(x,t)=f(t-x/a)$从$x<0$的区域向悬挂点行进。试求反射波和透射波。

10. 平面偏振的平面光波沿x轴行进而垂直地投射于两种介质的分界面上。入射光波的电场强度$E=E_0\sin\omega\left(t-\frac{n_1}{a}x\right)$，其中$n_1$是第一种介质的折射率。求反射光波和透射光波。〔提示：在分界面上，E连续，$\partial B/\partial t$（即$\partial E/\partial x$）连续。〕

第十章　分离变数(傅里叶级数)法

§ 34 先求泛定方程通解的办法只适用于很少数的某些定解问题。本章论述的分离变数(傅里叶级数)法却适用于大量的各种各样定解问题。§ 35 以两端固定弦的自由振动为例介绍这个方法，§ 36 和 § 37 则把这个方法应用于许多各不相同的定解问题。

§ 35 分离变数法介绍

(一) 分离变数法

研究两端固定的均匀弦的自由振动，即定解问题

泛定方程 $$u_{tt}-a^2u_{xx}=0, \tag{35.1}$$

边界条件 $$\begin{cases}u|_{x=0}=0,\\ u|_{x=l}=0,\end{cases} \tag{35.2}$$

初始条件 $$\begin{cases}u|_{t=0}=\varphi(x),\\ u_t|_{t=0}=\psi(x)\end{cases}\quad (0<x<l). \tag{35.3}$$

§ 34 已指出端点引起波的反射。这里研究的弦是有限长的，它有两个端点，波就在这两端点之间往复反射。我们知道，两列反向行进的同频率的波形成驻波。这就启发我们尝试从驻波出发解决问题。

在驻波中，有些点振幅最大，叫作波腹(图 62)；还有些点振幅最小(在图 62中这个最小振幅是零)，叫作波节。驻波没有波形传播现象，

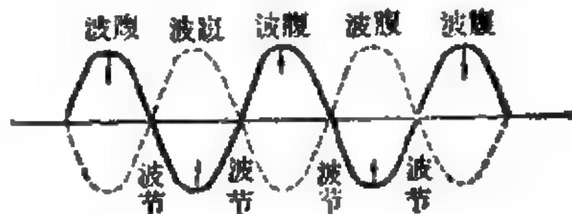


图　62

就是说，各点振动周相(位相)并不依次滞后，它们按同一方式随时间 t 振动，可以统一表示为 $T(t)$. 但是各点的振幅 X 却随地点 x 而异，即振幅 X 是 x 的函数 $X(x)$. 这样，驻波的一般表示式为

$$u(x,t)=X(x)T(t). \tag{35.4}$$

在(35.4)里，自变数 x 只出现于 X 之中，自变数 t 只出现于 T 之中，它们被分离开来。

那么，在两端固定的弦上究竟有哪些驻波呢？把驻波的一般表示式(35.4)代入弦振动方程(35.1)和边界条件(35.2)，得

$$XT''-a^2X''T=0, \tag{35.5}$$

$$\begin{cases} X(0)T(t)=0, \\ X(l)T(t)=0. \end{cases} \tag{35.6}$$

条件(35.6)的意义很清楚：不论在什么时刻 t, $X(0)\,T(t)$ 和 $X(l)T(t)$ 总是零。这只能是

$$X(0)=0,\ \ X(l)=0. \tag{35.7}$$

注意：如果边界条件不是齐次的，就不可能作出任何类似于(35.7)的简单结论。现在再看方程(35.5)，用 a^2XT 遍除各项即得

$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{X''}{X}.$$

左边是时间 t 的函数，跟坐标 x 无关；右边则是坐标 x 的函数，跟时间 t 无关。两边相等显然是不可能的，除非两边实际上是同一个常数。把这个常数记作 $-\lambda$,

$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{X''}{X}=-\lambda.$$

这可以分离为关于 T 的常微分方程和关于 X 的常微分方程，后者还附带有条件(35.7),

$$T''+\lambda a^2T=0; \tag{35.8}$$

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0, & (35.9) \\ X(0)=0,\ \ X(l)=0. & (35.7) \end{cases}$$

先看关于X的方程(35.9)和条件(35.7)。逐一考察$\lambda<0$，$\lambda=0$和$\lambda>0$三种可能性。

① $\lambda<0$. 方程(35.9)的解是

$$X(x)=C_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

积分常数C_1和C_2由条件(35.7)确定，即

$$\begin{cases}C_1+C_2=0,\\C_1e^{\sqrt{-\lambda}l}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}l}=0.\end{cases}$$

由此解出$C_1=0, C_2=0$，从而$X(x)\equiv0$，所求驻波$u(x,t)=X(x)T(t)\equiv0$，这是没有意义的。于是，$\lambda<0$的可能性就排除了。

② $\lambda=0$. 方程(35.9)的解是

$$X(x)=C_1x+C_2.$$

积分常数C_1和C_2由条件(35.7)确定，即

$$\begin{cases}C_2=0,\\C_1l+C_2=0.\end{cases}$$

由此解出$C_1=0$，$C_2=0$，从而$X(x)\equiv0$，所求驻波$u=XT\equiv0$，没有意义. 于是，$\lambda=0$的可能性也排除了。

③ $\lambda>0$. 方程(35.9)的解是

$$X(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x.$$

积分常数C_1和C_2由条件(35.7)确定，即

$$\begin{cases}C_1=0,\\C_2\sin\sqrt{\lambda}l=0.\end{cases}$$

由此仍然解出$C_1=0$，$C_2=0$，除非是$\sin\sqrt{\lambda}l=0$. 在$\sin\sqrt{\lambda}l=0$的条件下，C_2是任意常数。条件$\sin\sqrt{\lambda}l=0$即$\sqrt{\lambda}\,l=n\pi$(n为正整数)，亦即

$$\lambda=\frac{n^2\pi^2}{l^2}\ (n=1,2,3,\cdots). \qquad (35.10)$$

这样，分离变数过程中所引入的常数λ不能为负数或零，甚至

也不能是任意的正数，它必须取(35.10)所给的特定数值，才可能从方程(35.9)和条件(35.7)解出有意义的解

$$X(x)=C_2\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{35.11}$$

除此以外，只能得到恒等于零的解，而恒等于零的解是没有意义的。常数 λ 的特定数值(35.10)叫作**本征值**，相应的解(35.11)叫作**本征函数**，方程(35.9)和条件(35.7)则构成**本征值问题**。

再看关于 T 的方程(35.8)。根据(35.10)，这应改写成

$$T''+a^2\frac{n^2\pi^2}{l^2}T=0.$$

这个方程的解是

$$T(t)=A\cos\frac{n\pi at}{l}+B\sin\frac{n\pi at}{l}, \tag{35.12}$$

其中 A 和 B 是积分常数。

把(35.11)和(35.12)代回(35.4)，得到两端固定弦上的可能的驻波

$$u_n(x,t)=\left(A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+B_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{35.13}$$

n 为正整数。每一个 n 对应于一种驻波。这些驻波也叫作两端固定弦的**本征振动**。

在 $x=0,(l/n),2(l/n),3(l/n),\cdots,n(l/n)$ 即 l，这些点(共计 $n+1$ 个点)，相应的 $n\pi x/l=0$，π，2π，3π，$\cdots$，$n\pi$，从而振幅 $X(x)=\sin\dfrac{n\pi x}{l}=0$，可见这些点正是节点。两相邻节点间隔 l/n 应为半个波长(参看图 62)，由此可见驻波的波长 $=2l/n$。(35.12)则表明驻波的圆频率 $\omega=n\pi a/l$，从而频率 $\nu=\omega/2\pi=na/2l$。

$n=1$ 的驻波除两端 $x=0$ 和 $x=l$ 外没有其他节点，它的波长 $2l$ 在所有本征振动中是最长的；相应地，它的频率 $a/2l$ 在所有本

征振动中是最低的。这个驻波叫作基波。$n>1$ 的各个驻波分别叫作 n 次谐波。n 次谐波的波长 $2l/n$ 是基波的 $1/n$，频率 $na/2l$ 则是基波的 n 倍。

以上根据弦振动方程(35.1)和边界条件(35.2)求出两端固定弦的本征振动(35.13)。方程(35.1)和条件(35.2)都是线性而且齐次的，一般解应是各个线性独立解的线性叠加。这就是说，两端固定的弦的振动一般是本征振动的叠加，

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+B_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}. \qquad (35.14)$$

我们不应只是泛泛地说两端固定弦的振动一般是(35.14)，还应当从具体的初始状态(35.3)出发求解两端固定弦的振动。在数学上，这就是要选定(35.14)中的各个系数 A_n 和 B_n 使初始条件(35.3)得以满足。为此，以(35.14)代入(35.3)，

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{l}=\varphi(x),\\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}=\psi(x)\end{cases}\quad (<x<l). \qquad (35.15)$$

(35.14)的左边是傅里叶正弦级数，这就提示我们把右边的 $\varphi(x)$ 和 $\varphi(x)$ 展开为傅里叶正弦级数，然后比较两边的系数就可确定 A_n 和 B_n，

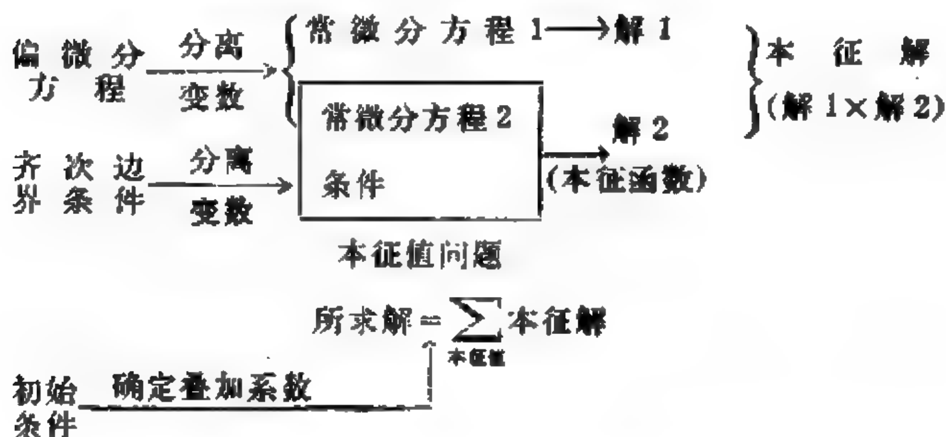
$$\begin{cases}A_n=\text{傅里叶系数 }\varphi_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi,\\ B_n=\dfrac{l}{n\pi a}\cdot\text{傅里叶系数 }\psi_n=\dfrac{2}{n\pi a}\displaystyle\int_0^l\psi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi.\end{cases} \qquad (35.16)$$

到这里，定解问题(35.1)—(35.3)已经解出，答案是(35.14)，其中系数 A_n 和 B_n 取决于弦的初始状态，具体计算公式是

(35.16)。

§27 曾经指出，n 次谐波的幅度是复数形式傅里叶级数的系数 C_n 的模 $|C_n|$ 的二倍，该节习题 3 又指出 $|C_n|=\sqrt{A_n^2+B_n^2}/2$. 由此可见，$\sqrt{A_n^2+B_n^2}$ 是基音和各级谐音的幅度，而 $A_n^2+B_n^2$ 则代表基音和各级谐音的强度。

回顾整个求解过程，可以作出图解如下：



关键在于把分离变数形式的试探解代入偏微分方程，从而把它分解为几个常微分方程，自变数各自分离开来了，问题转化为求解常微分方程。虽然我们是从驻波引出解题的线索，其实整个求解过程跟驻波并没有特殊的联系，完全可以推广应用于各种定解问题。这个方法，按照它的特点，叫作分离变数法。

用分离变数法得到的解答一般是无穷级数。不过，在具体问题中，往往跟§24 例题类似，级数里只有前若干项较为重要，后面的项则迅速减小从而可以一概略去。

（二）傅里叶级数法

其实，不仅(35.15)提示我们把初始条件的 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 展开为傅里叶级数，而且解(35.14)也强烈地提示它就是傅里叶级数。至于它采取正弦级数的形式而不是一般的傅里叶级数形式，则完全是由于边界条件 $u|_{x=0}=0$ 和 $u|_{x=l}=0$。这样，我们可以从另一

角度把求解过程重新叙述一遍如下。

这里研究的是定解问题

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=0, \tag{35.1}$$

$$\begin{cases}u|_{x=0}=0,\\ u|_{x=l}=0,\end{cases} \tag{35.2}$$

$$\begin{cases}u|_{t=0}=\varphi(x),\\ u_t|_{t=0}=\psi(x)\end{cases} \quad (0<x<l). \tag{35.3}$$

参照边界条件(35.2)，试把解 $u(x,t)$展开为傅里叶正弦级数。不过，这里除了自变数 x 之外，还有另一个自变数——时间 t，因而 $u(x,t)$的傅里叶系数不是常数，而是时间 t 的函数，我们把它记作 $T_n(t)$。这样，

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{35.17}$$

为了决定 $T_n(t)$是什么函数，把(35.17)代入泛定方程(35.1)，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n''(t)+\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T_n(t)\right]\sin\frac{n\pi x}{l}=0.$$

一个傅里叶级数等于零，意味着各个系数为零，这就给出决定 $T_n(t)$的常微分方程

$$T_n''+\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T_n=0.$$

这个方程的解是

$$T_n(t)=A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+B_n\sin\frac{n\pi at}{l}.$$

这样，解 $u(x,t)$的傅里叶正弦级数是

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+B_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l},$$

这正是(35.14)。

至于系数 A_n 和 B_n 则由初始条件(35.3)来确定，如前面所叙述的那样归结到(35.16)，这里不重复。

这个方法可叫作**傅里叶级数法**。很明显，这个方法的关键在于分离出 $T_n(t)$ 的常微分方程，其中不可混杂着另一自变数 x. 这是怎样作到的呢？原来，这个级数展开的基本函数 $\sin\frac{n\pi x}{l}$ 正是分离变数法所求得的本征函数，我们才得以分离出 $T_n(t)$ 的常微分方程。因此，这并不是一个独立的方法。

(三) 非齐次边界条件的处理

上面所叙述的分离变数(傅里叶级数)法有个前提，即边界条件必须是齐次的。(为什么这样说？)

但是，非齐次边界条件也是可能的。例如，把弦的一端 $x=0$ 固定起来，迫使另一端 $x=l$ 作谐振动 $A\sin\omega t$，弦的初始位移和初始速度都是零。这个定解问题是

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=0, \tag{35.18}$$

$$\begin{cases}u|_{x=0}=0,\\ u|_{x=l}=A\sin\omega t,\end{cases} \tag{35.19}$$

$$\begin{cases}u|_{t=0}=0,\\ u_t|_{t=0}=0\end{cases}\quad (0<x<l). \tag{35.20}$$

边界条件 $u|_{x=l}=A\sin\omega t$ 不是齐次的。这个问题怎样处理？

让我们设法消除这个非齐次边界条件。为此，任选一个满足边界条件(35.19)的函数 $v(x,t)$，例如

$$v(x,t)=A\frac{x}{l}\sin\omega t. \tag{35.21}$$

令所求的 $u(x,t)$ 为这个 $v(x,t)$ 与某个待求的 $w(x,t)$ 的叠加，即

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t). \tag{35.22}$$

把 (35.22) 代入定解问题(35.18)—(35.20)。由于方程和条件都是线性的，就把 u 的定解问题转化为 $w(x,t)$ 的定解问题：

$$w_{tt}-a^2w_{xx}=-(v_{tt}-a^2v_{xx})=A\frac{x}{l}\omega^2\sin\omega t,$$

$$\begin{cases} w|_{x=0}=0-v|_{x=0}=0, \\ w|_{x=l}=A\sin\omega t-v|_{x=l}=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} w|_{t=0}=0-v|_{t=0}=0, \\ w_t|_{t=0}=0-v_t|_{t=0}=-\dfrac{A\omega x}{l} \end{cases} (0<x<l).$$

这里，边界条件已转化为齐次的。但是，泛定方程却转化成非齐次的了。关于非齐次泛定方程的解法见 § 37。

其实，(35.21)是随手写出的。我们完全可以把 $v(x, t)$ 选得更恰当些，例如

$$v(x, t)=A\frac{\sin(\omega x/a)}{\sin(\omega l/a)}\sin\omega t, \tag{35.23}$$

这既满足边界条件(35.19)，又满足泛定方程(35.18)。用(35.23)代替(35.21)作为(35.22)中的 v，并把(35.22)代入 u 的定解问题(35.18)—(35.20)，就把它转化为 $w(x, t)$的定解问题:

$$w_{tt}-a^2w_{xx}=-(v_{tt}-a^2v_{xx})=0,$$

$$\begin{cases} w|_{x=0}=0-v|_{x=0}=0, \\ w|_{x=l}=A\sin\omega t-v|_{x=l}=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} w|_{t=0}=0-v|_{t=0}=0, \\ w_t|_{t=0}=0-v_t|_{t=0}=-A\omega\dfrac{\sin(\omega x/a)}{\sin(\omega l/a)} \end{cases} (0<x<l).$$

这里，既把边界条件转化为齐次的，而且泛定方程也保持为齐次的。这个定解问题的解由(35.14)给出，

$$w(x, t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+B_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l},$$

其中系数 A_n 和 B_n 可按(35.16)计算:

$$A_n=0,$$

$$B_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l -A\omega\frac{\sin(\omega\xi/a)}{\sin(\omega l/a)}\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi$$

$$=\frac{-2A\omega}{n\pi a\sin(\omega l/a)}\left[-\frac{\sin(\omega/a+n\pi/l)\xi}{2(\omega/a+n\pi/l)}+\frac{\sin(\omega/a-n\pi/l)\xi}{2(\omega/a-n\pi/l)}\right]_0^l$$

$$=\frac{A\omega}{n\pi a\sin(\omega l/a)}\left[\frac{\sin(\omega l/a+n\pi)}{\omega/a+n\pi/l}-\frac{\sin(\omega l/a-n\pi)}{\omega/a-n\pi/l}\right]$$

$$=(-1)^n\frac{A\omega}{n\pi a}\left[\frac{1}{\omega/a+n\pi/l}-\frac{1}{\omega/a-n\pi/l}\right]$$

$$=(-1)^n\frac{2A\omega}{al}\cdot\frac{1}{\omega^2/a^2-n^2\pi^2/l^2}.$$

这样，

$$w(x,\ t)=\frac{2A\omega}{al}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\omega^2/a^2-n^2\pi^2/l^2}\sin\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l},$$

$$u(x,t)=A\ \frac{\sin(\omega x/a)}{\sin(\omega l/a)}\sin\omega t$$

$$+\frac{2A\omega}{al}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\omega^2/a^2-n^2\pi^2/l^2}\sin\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

习　　题

1. “顾名思义，分离变数法只能求出分离变数形式的解。如果一个定解问题的解不是分离变数形式的，用分离变数法不可能求得这个解。”试对上述说法加以评论。

2. 演奏琵琶是把弦的某一点向旁拨开一个小距离然后放手任其自由振动。设弦长为 l，被拨开的点在弦长 $1/n_0$（n_0 为正整数）处，拨开距离为 h. 试求解弦的振动。不要套用现成答案，请按照分离变数法的步骤一步一步求解。[注意：在解答中，不存在 n_0 次谐音以及 n_0 整倍数次谐音。因此，在不同位置拨弦（n_0 不同），发出的声音的音色也就不同。]

3. 两端固定弦的长为 l. 用细棒敲击弦上 $x=x_0$ 点，亦即在 $x=x_0$ 施加冲力，设其冲量为 I. 求解弦的振动。[注意：上题 n 次谐音的幅度 $\propto 1/n^2$，本题 n 次谐音幅度 $\propto 1/n$. 相比之下，细棒敲击弦发出的声音包含较多高次谐音，比较刺耳。因此，演奏杨琴必须使用锤敲击弦而决不可用细棒。]

§36. 齐次的泛定方程

本节给出分离变数(傅里叶级数)法的例题。

上节两端固定弦的边界条件是第一类齐次边界条件，下面第一个例子是第二类齐次边界条件。

例 1 磁致伸缩换能器、鱼群探测换能器等器件的核心是两端自由的均匀杆，它作纵振动。研究两端自由棒的自由纵振动，即定解问题

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=0, \tag{36.1}$$

$$\begin{cases} u_x|_{x=0}=0, \\ u_x|_{x=l}=0, \end{cases} \tag{36.2}$$

$$\begin{cases} u|_{t=0}=\varphi(x), \\ u_t|_{t=0}=\psi(x) \end{cases} \quad (0<x<l). \tag{36.3}$$

解 参照边界条件 (36.2)，试把 $u(x, t)$展开为傅里叶余弦级数，

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)\cos\frac{n\pi x}{l}. \tag{36.4}$$

为了决定 $T_n(t)$是什么函数，把(36.4)代入泛定方程(36.1)，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[T''(t)+\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T_n(t)\right]\cos\frac{n\pi x}{l}=0.$$

一个傅里叶级数等于零，意味着各个系数为零，这就给出决定 $T_n(t)$的常微分方程

$$T_n''+\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T_n=0.$$

这个方程的解是

$$T_n(t)=\begin{cases}A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+B_n\sin\frac{n\pi at}{l} & (n\neq 0),\\ A_0+B_0t & (n=0).\end{cases}$$

这样，解 $u(x,t)$ 的傅里叶余弦级数是

$$u(x,t)=A_0+B_0t+\left(A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+B_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\cos\frac{n\pi x}{l}. \tag{36.5}$$

至于系数 A_n 和 B_n 则由初始条件(36.3)来确定。为此，以(36.5)代入(36.3)，

$$\begin{cases}A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{n\pi x}{l}=\varphi(x),\\ B_0+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{n\pi a}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}=\psi(x)\end{cases}\quad(0<x<l).$$

把右边的 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 展开为傅里叶余弦级数，然后比较两边的系数，得

$$\begin{cases}A_0=\frac{1}{l}\int_0^l\varphi(\xi)d\xi,\\ B_0=\frac{1}{l}\int_0^l\psi(\xi)d\xi;\end{cases}\qquad\begin{cases}A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\cos\frac{n\pi\xi}{l}d\xi,\\ B_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l\psi(\xi)\cos\frac{n\pi\xi}{l}d\xi.\end{cases} \tag{36.6}$$

下一个例子是一端为第一类齐次边界条件而另一端为第二类齐次边界条件。

例 2 单簧管是直径均匀的细管，一端封闭而另一端开放，试求管内空气柱的本征振动，即求解

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=0, \tag{36.7}$$

$$\begin{cases}u|_{x=0}=0,\\ u_x|_{x=l}=0.\end{cases} \tag{36.8}$$

解 根据边界条件(36.8),既不能说把 $u(x,t)$ 展开为傅里叶正弦级数,也不能说把 $u(x,t)$ 展开为傅里叶余弦级数。让我们还是按照分离变数法一步步求解。

以分离变数形式的试探解

$$u(x,t)=X(x)T(t) \tag{36.9}$$

代入泛定方程(36.7)和边界条件(36.8),得

$$XT''-a^2X''T=0, \tag{36.10}$$

$$X(0)T(t)=0,\quad X'(l)T(t)=0. \tag{36.11}$$

条件(36.11)也就是

$$X(0)=0,\quad X'(l)=0. \tag{36.12}$$

再看方程(36.10),用 a^2XT 遍除各项即得

$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{X''}{X}.$$

两边分别是时间 t 和坐标 x 的函数,不可能相等,除非两边实际上是同一个常数。把这个常数记作 $-\lambda$,

$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{X''}{X}=-\lambda.$$

这可分离为关于 T 的常微分方程和关于 X 的常微分方程, 后者附带有条件(36.12),

$$T''+\lambda a^2T=0; \tag{36.13}$$

$$\begin{cases}X''+\lambda X=0, & (36.14)\\ X(0)=0,\quad X'(l)=0. & (36.12)\end{cases}$$

先看关于 X 的方程 (36.14) 和条件 (36.12)。如果 $\lambda<0$ 或 $=0$, 只能得到无意义的解 $X(x)\equiv 0$。如果 $\lambda>0$, 则方程(36.14)的解是

$$X(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}\,x+C_2\sin\sqrt{\lambda}\,x.$$

积分常数 C_1 和 C_2 由条件(35.12)确定,即

$$\begin{cases}C_1=0,\\ C_2\cos\sqrt{\lambda}\,l=0.\end{cases}$$

由此仍然解出没有意义的解 $C_1=0, C_2=0$，从而 $X(x)\equiv0$，除非是 $\cos\sqrt{\lambda}\,l=0$. 在 $\cos\sqrt{\lambda}\,l=0$ 的条件下，C_2 是任意常数。条件 $\cos\sqrt{\lambda}\,l=0$ 即 $\sqrt{\lambda}\,l=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi$（$k$ 为零或正整数），亦即

$$\lambda=\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}{l^2}=\frac{(2k+1)^2\pi^2}{4l^2}\quad(k=0,1,2,3,\cdots).\qquad(36.15)$$

(36.15)给出本征值，相应的本征函数是

$$X(x)=C_2\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}\quad(k=0,1,2,\cdots).\qquad(36.16)$$

再看关于 T 的方程(36.13)。根据(36.15)，这应改写成

$$T''+a^2\frac{(2k+1)^2\pi^2}{4l^2}T=0.$$

这个方程的解是

$$T(t)=A\cos\frac{(2k+1)\pi at}{2l}+B\sin\frac{(2k+1)\pi at}{2l}.\qquad(36.17)$$

把(36.16)和(36.17)代回(36.9)，得到本征振动

$$u_k(x,t)=\left(A_k\cos\frac{(2k+1)\pi at}{2l}+B_k\sin\frac{(2k+1)\pi at}{2l}\right)\times\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}.\qquad(36.18)$$

这是说，单簧管发出的声音只有奇次谐音而没有偶次谐音，从而构成它特有的音色。

本例的本征函数(36.16)即 $\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}$ 既不同于第一类齐次边界条件的 $\sin\frac{n\pi x}{l}$，又不同于第二类齐次边界条件的 $\cos\frac{n\pi x}{l}$。

其实，按照§26的精神，边界条件 $u_x|_{x=l}=0$ 表明，应当把单簧管从区间$(0, l)$偶延拓到区间$(l, 2l)$上。延拓后，条件是 $u|_{x=0}=0$，$u_x|_{x=l}=0$，$u|_{x=2l}=0$。第一个和第三个条件决定了本征函数是 $\sin\frac{n\pi x}{2l}$，其中 n 是整数。第二个条件则限制了整数 n 只能是奇数，这是因为 $\left(\sin\frac{n\pi x}{2l}\right)'\Big|_{x=l}=\frac{n\pi}{2l}\cos\frac{n\pi}{2}$，而如果 n 是偶数则 $\cos\frac{n\pi}{2}$ 并不等于零。这样，本征函数应是 $\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}$ 即(36.16)。

§35和本节以上两例都是振动问题。下一个例子是关于输运问题的。

例3 研究细杆导热问题。杆的初始温度是均匀的 u_0，保持杆的一端的温度为不变的 u_0，至于另一端则有强度为恒定的 q_0 的热流进入。

解 杆上温度 $u(x, t)$ 满足下列泛定方程和定解条件

$$u_t-a^2u_{xx}=0 \quad (a=k/c\rho), \tag{36.19}$$

$$\begin{cases}u|_{x=0}=u_0,\\ u_x|_{x=l}=q_0/k,\end{cases} \tag{36.20}$$

$$u|_{t=0}=u_0 \quad (0<x<l). \tag{36.21}$$

边界条件不是齐次的，首先要处理这个问题。取一个既满足边界条件(36.20)又满足泛定方程(36.19)的函数 $v(x, t)$，

$$v(x, t)=u_0+\frac{q_0}{k}x, \tag{36.22}$$

令所求的 $u(x, t)$ 为这个 v 与某个待求的 $w(x, t)$ 的叠加，即

$$u(x, t)=v(x, t)+w(x, t). \tag{36.23}$$

把(36.23)代入 u 的定解问题(36.19)—(36.21)，就把它转化为

$w(x,t)$的定解问题

$$w_t-a^2w_{xx}=-(v_t-a^2v_{xx})=0, \tag{36.24}$$

$$\begin{cases}w|_{x=0}=u_0-v|_{x=0}=0,\\ w_x|_{x=l}=q_0/k-v_x|_{x=l}=0,\end{cases} \tag{36.25}$$

$$w|_{t=0}=u_0-v|_{t=0}=-\frac{q_0}{k}x \quad (0<x<l). \tag{36.26}$$

这个定解问题的边界条件已是齐次的。

以分离变数形式的试探解

$$w(x,t)=X(x)T(t) \tag{36.27}$$

代人泛定方程(36.24)和边界条件(36.25)可得关于$X(x)$和关于$T(t)$的常微分方程以及关于$X(x)$的条件：

$$T'+a^2\lambda T=0; \tag{36.28}$$

$$\begin{cases}X''+\lambda X=0, & (36.29)\\ X(0)=0,\ X'(l)=0. & (36.30)\end{cases}$$

(36.29)和(36.30)构成一个本征值问题，这个本征值问题已在例2解出，本征值是

$$\lambda=\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}{l^2} \quad (n=0,1,2,3,\cdots), \tag{36.31}$$

本征函数是

$$X(x)=C\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l} \quad (n=0,1,2,\cdots). \tag{36.32}$$

根据(36.31)，关于T的方程(36.28)应改写成

$$T'+a^2\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}{l^2}T=0.$$

这个方程的解是

$$T(t)=Ce^{-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2a^2t}{l^2}}. \tag{36.33}$$

这样，$w(x,t)$的解一般应是

$$w(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n e^{-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2a^2t}{l^2}}\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}. \qquad (36.34)$$

系数 C_n 应由初始条件 (36.26) 确定。因此，以 (36.34) 代入 (36.26)，

$$\sum_{n=0}^{\infty}C_n\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}=-\frac{q_0}{k}x \quad (0<x<l). \qquad (36.35)$$

(36.25)左边是以 $\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}$为基本函数族的级数，这提示我们应把右边的$(-q_0x/k)$也以$\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}$为基本函数族展开为级数（上例已指出，这其实就是在区间$(0,2l)$上展开为傅里叶正弦级数），然后比较两边的系数，得

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l-\frac{q_0}{k}\xi\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\xi}{l}d\xi$$

$$=-\frac{2q_0l}{k\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}\left[\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\xi}{l}\right.$$

$$\left.-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\xi}{l}\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\xi}{l}\right]_0^l=(-1)^{n+1}\frac{2q_0l}{k\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}.$$

于是，得到答案

$$u(x,t)=u_0+\frac{q_0}{k}x$$

$$+\frac{2q_0 l}{k\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}e^{-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2a^2}{l^2}t}\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}. \tag{36.36}$$

应当着重指出：如果考虑早先的时刻即考虑 $t<0$，则

$$e^{-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2a^2t}{l^2}}$$

随 n 的增大而急剧增大，从而级数解(36.36)发散，成为无意义。这是可以理解的。因为杆上温度分布总是趋于某种平衡状态，而且只要边界条件相同，不管初始温度分布是怎样的，总是趋于同一平衡状态，所以从某个时刻的温度分布可以推算以后时刻的温度分布，却不能反推早先时刻的温度分布。其实，其他输运过程，例如扩散，也是如此。这是输运过程不同于振动过程的地方。

另一方面，对于以后的时刻，$t>0$，则

$$e^{-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2a^2t}{l^2}}$$

随 n 的增大而急剧减小，从而级数解(36.36)收敛得很快。t 越大，级数收敛越快。在 $t>0.18l^2/a^2$ 时，可以只保留 $n=0$ 的项而略去 $n>0$ 的项，其误差不超过 1%，

$$u(x,t)=u_0+\frac{q_0}{k}x-\frac{8q_0 l}{k\pi^2}e^{-\frac{\pi^2a^2}{4l^2}t}\sin\frac{\pi x}{2l}.$$

下一个例子是关于稳定场的。

例 4 散热片的横截面为矩形(图 63)。它的一边 $y=b$ 处于较高温度 U，其他三边 $y=0$，$x=0$ 和 $x=a$ 则处于冷却介质中因而保持较低的温度 u_0。求解这横截面上的稳定温度分布 $u(x,y)$，即定解问题

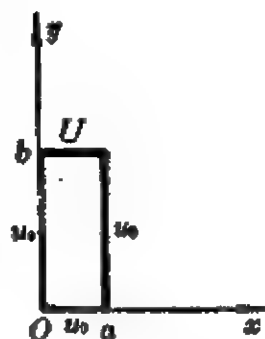


图 63

$$u_{xx}+u_{yy}=0; \tag{36.37}$$

$$u|_{x=0}=u_0,\ u|_{x=a}=u_0\quad(0<y<b); \tag{36.38}$$

$$u|_{y=0}=u_0,\ u|_{y=b}=U\quad(0<x<a). \tag{36.39}$$

解 本例的泛定方程是拉普拉斯方程。我们不能要求把拉普拉斯方程的边界条件全化为齐次的，因为拉普拉斯方程在齐次边界条件下的解只能是——零。

但是，尽可能把一些边界条件化为齐次，毕竟会带来一些方便。例如，把 u 当作 v 和 w 的叠加，即

$$u(x,y)=v(x,y)+w(x,y),$$

并令 v 和 w 分别满足

$$\begin{aligned}&v_{xx}+v_{yy}=0;\\&v|_{x=0}=u_0,\ v|_{x=a}=u_0;\\&v|_{y=0}=0,\ v|_{y=b}=0;\end{aligned}\qquad\Bigg|\qquad\begin{aligned}&w_{xx}+w_{yy}=0;\\&w|_{x=0}=0,\ w|_{x=a}=0;\\&w|_{y=0}=u_0,\ w|_{y=b}=U.\end{aligned}$$

很容易验证，把 v 和 w 的泛定方程叠加起来确是 u 的泛定方程，把 v 和 w 的边界条件叠加起来确是 u 的边界条件。于是，问题转化为求解 v 和 w，而 v 和 w 各有两个齐次边界条件足以构成本征值问题，不难分别解出。

其实，本例还有一个特殊的简便方法，就是令

$$u(x,y)=u_0+v(x,y), \tag{36.40}$$

这只不过是把温标移动一下，把原来的 u_0 作为新温标的零点。以(36.40)代入(36.37)—(36.39)，得

$$v_{xx}+v_{yy}=0; \tag{36.41}$$

$$v|_{x=0}=0,\ v|_{x=a}=0; \tag{36.42}$$

$$v|_{y=0}=0,\ v|_{y=b}=U-u_0. \tag{36.43}$$

以分离变数形式的试探解

$$v(x,y)=X(x)Y(y)$$

代入泛定方程(36.41)和齐次边界条件(36.42)，可得 X 和 Y 的常

微分方程以及X的边界条件：

$$\begin{cases}X''+\lambda X=0,\\X(0)=0,\quad X(a)=0;\end{cases}\tag{36.44}$$

$$Y''-\lambda Y=0.\tag{36.45}$$

(36.44)构成本征值问题。不难解得本征值

$$\lambda=\frac{n^2\pi^2}{a^2}\quad(n=1,2,3,\cdots),\tag{36.46}$$

本征函数

$$X(x)=C\sin\frac{n\pi x}{a}.$$

根据(36.46)，关于Y的方程(36.45)应改写成

$$Y''-\frac{n^2\pi^2}{a^2}Y=0.$$

这个方程的解是

$$Y(y)=Ae^{\frac{n\pi y}{a}}+Be^{-\frac{n\pi y}{a}}.$$

这样，$v(x,y)$的解一般应是

$$v(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_ne^{\frac{n\pi y}{a}}+B_ne^{-\frac{n\pi y}{a}}\right)\sin\frac{n\pi x}{a}.\tag{36.47}$$

系数A_n和B_n应由边界条件(36.43)确定。因此，以(36.47)代入(36.43)，

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(A_n+B_n)\sin\frac{n\pi x}{a}=0,\\\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_ne^{\frac{n\pi b}{a}}+B_ne^{-\frac{n\pi b}{a}}\right)\sin\frac{n\pi x}{a}=U-u_0.\end{cases}$$

把右边展开为傅里叶正弦级数（关于常数$U-u_0$的傅里叶正弦级数可参考§25例1），然后比较两边系数，即得

$$\begin{cases}A_n+B_n=0,\\A_ne^{\frac{n\pi b}{a}}+B_ne^{-\frac{n\pi b}{a}}=\begin{cases}0 & (n\text{ 为偶数}),\\\dfrac{4}{n\pi}(U-u_0) & (n\text{ 为奇数}).\end{cases}\end{cases}$$

由此解出

$$A_n=-B_n=\begin{cases}0 & (n\text{ 为偶数}),\\ 4(U-u_0)/n\pi(e^{n\pi b/a}-e^{-n\pi b/a}) & (n\text{ 为奇数}).\end{cases}$$

于是，得到答案

$$u(x,y)=u_0+\frac{4(U-u_0)}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)}$$

$$\times\frac{\operatorname{sh}\frac{(2k+1)\pi y}{a}}{\operatorname{sh}\frac{(2k+1)\pi b}{a}}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{a}.$$

下一个例子是杆的横振动。由于泛定方程中出现四阶导数，计算要麻烦一些，但求解步骤基本上还是一样的。

例 5 木琴、音叉、压电陶瓷扬声器等的声学元件可看作是横振动的棒。

求解两端自由的棒的横振动的各种模式即本征振动。这就是求解

$$u_{tt}-a^2u_{xxxx}=0\quad(a^2=YI/\rho),\tag{36.48}$$

$$\begin{cases}u_{xx}|_{x=0}=0,\ \ u_{xxx}|_{x=0}=0,\\ u_{xx}|_{x=l}=0,\ \ u_{xxx}|_{x=l}=0.\end{cases}\tag{36.49}$$

解 以分离变数形式的试探解

$$u(x,t)=X(x)T(t)\tag{36.50}$$

代入泛定方程(36.48)和边界条件(36.49)，可得X和T的常微分方程以及X的边界条件：

$$\begin{cases}X''''-\lambda^2X=0, & (36.51)\\ X''(0)=0,\ \ X'''(0)=0,\ \ X''(l)=0,\ \ X'''(l)=0. & (36.52)\end{cases}$$

$$T''+\lambda^2a^2T=0.\tag{36.53}$$

方程(36.51)和条件(36.52)构成本征值问题。事实上，方程(36.51)的解是

$$X(x)=A\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}\,x+B\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}\,x+C\cos\sqrt{\lambda}\,x+D\sin\sqrt{\lambda}\,x. \tag{36.54}$$

把(36.54)代入条件(36.52)，得

$$\begin{cases} A \qquad\qquad -C \qquad\qquad =0, \\ \qquad B \qquad\qquad -D \qquad =0, \\ A\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}\,l+B\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}\,l-C\cos\sqrt{\lambda}\,l-D\sin\sqrt{\lambda}\,l=0, \\ A\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}\,l+B\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}\,l+C\sin\sqrt{\lambda}\,l-D\cos\sqrt{\lambda}\,l=0. \end{cases} \tag{36.55}$$

一般地说，从代数方程组(36.55)只能解出 $A=B=C=D=0$，从而 $X(x)\equiv 0$，这是没有意义的。但如系数行列式为零，可以解出非零解。条件“系数行列式为零”决定了 λ 的值，即本征值。但是，这个行列式是四阶的，计算不便。这里采用变通办法。从(36.55)的前两式知 $C=A, B=D$，把这代入后两式，即得

$$\begin{cases} A(\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}\,l-\cos\sqrt{\lambda}\,l)+B(\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}\,l-\sin\sqrt{\lambda}\,l)=0, \\ A(\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}\,l+\sin\sqrt{\lambda}\,l)+B(\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}\,l-\cos\sqrt{\lambda}\,l)=0. \end{cases}$$

从这代数方程组只能解出 $A=B=0$，除非系数行列式

$$\begin{vmatrix} \operatorname{ch}\sqrt{\lambda}\,l-\cos\sqrt{\lambda}\,l & \operatorname{sh}\sqrt{\lambda}\,l-\sin\sqrt{\lambda}\,l \\ \operatorname{sh}\sqrt{\lambda}\,l+\sin\sqrt{\lambda}\,l & \operatorname{ch}\sqrt{\lambda}\,l-\cos\sqrt{\lambda}\,l \end{vmatrix}=0,$$

即

$$\operatorname{ch}\mu\cos\mu=1 \quad (\mu=\sqrt{\lambda}\,l).$$

这就是决定本征值的超越方程。经数值计算得到前几个 μ 是

$$\mu_1=1.5056\pi,\quad \mu_2=2.4997\pi,\quad \mu_n\approx\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \quad (n>2).$$

因此，本征值是

$$\lambda_n=\mu_n^2/l^2 \quad (n=1,2,3,\cdots), \tag{36.56}$$

相应的本征函数是

$$X_n(x)=A_n\left(\text{ch}\frac{\mu_n x}{l}+\cos\frac{\mu_n x}{l}\right)+B_n\left(\text{sh}\frac{\mu_n x}{l}+\sin\frac{\mu_n x}{l}\right),\tag{36.57}$$

其中

$$\frac{A_n}{B_n}=\frac{\cos\mu_n-\text{ch}\mu_n}{\sin\mu_n+\text{sh}\mu_n}=\frac{\sin\mu_n-\text{sh}\mu_n}{-\cos\mu_n+\text{ch}\mu_n}.$$

根据(36.56)，关于T的方程(36.53)改写成

$$T''+\frac{\mu_n^4a^2}{l^4}T=0.$$

这个方程的解是

$$T(t)=G\cos\frac{\mu_n^2at}{l^2}+H\sin\frac{\mu_n^2at}{l^2}.$$

这样，两端自由的杆的横振动的各种模式为

$$u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\left(\text{ch}\frac{\mu_n x}{l}+\cos\frac{\mu_n x}{l}\right)+B_n\left(\text{sh}\frac{\mu_n x}{l}+\sin\frac{\mu_n x}{l}\right)\right]$$

$$\times\left[G_n\cos\frac{\mu_n^2at}{l^2}+H_n\sin\frac{\mu_n^2at}{l^2}\right].$$

基音的圆频率为μ_1^2a/l^2即$(1.5056\pi)^2a/l^2$；高次音的圆频率为μ_n^2a/l^2，并不是基音的圆频率的整倍数。

木琴就是利用两端自由的杆的横振动。杆在两点被固定，这两点正是基频振动的节点，这很少可能恰好又是高次音振动的节点。敲击木琴，本来可以产生基音和高次音，但这些高次音很快就衰减掉(因为固定点不是节点)，只剩下几乎完全是基音的纯音。

以上都是用的直角坐标系，下一个例子由于边界是圆形的，不能用直角坐标系，必须用平面极坐标系。

例6　带电的云跟大地之间的静电场近似是匀强静电场，其

电场强度 E_0 是竖直的。水平架设的输电线处在这个静电场之中(图 64)。输电线是导体圆柱，柱面由于静电感应出现感应电荷，圆柱邻近的静电场也就不再是匀强的了。不过，离圆柱“无限远”处的静电场仍保持为匀强的。现在研究导体圆柱怎样改变了匀强静电场。

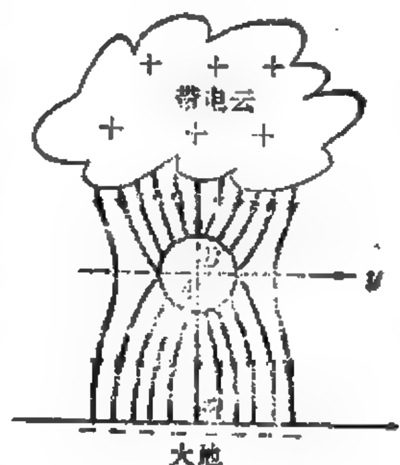


图 64a

首先需要把这个物理问题表为定解问题。取圆柱的轴为 z 轴。如果圆柱“无限长”，那么，这个静电场的电场强度、电势显然跟 z 无关，我们只需在 xy 平面上加以研究就够了。图 64 画的正是 xy 平面上的静电场，圆柱面在 xy 平面的剖口是圆 $x^2+y^2=a^2$，其中 a 是圆柱的半径。

柱外的空间中没有电荷，所以电势 u 满足二维的拉普拉斯方程

$$u_{xx}+u_{yy}=0 \text{ (在柱外)。}$$

导体中的电荷既然不再移动，这说明导体中各处电势相同。又因为电势只具有相对的意义，完全可以把导体的电势当作零，从而写出边界条件

$$u|_{x^2+y^2=a^2}=0.$$

按照分离变数法，以 $u(x, y)=X(x)Y(y)$ 代入拉普拉斯方程固然不难把它分解为两个常微分方程，但代入上述边界条件却只能得到

$$X(x)Y(\sqrt{a^2-x^2})=0,$$

不能分解为 $X(x)$ 或 $Y(y)$ 的边界条件。事实上，既然边界是圆，直角坐标系显然是不适当的，必须采用平面极坐标系。

拉普拉斯方程在极坐标系中的表达式见附录六或§5习题3的答案。“柱外空间中的电势u满足拉普拉斯方程”就表为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0 \quad (\rho>a), \tag{36.58}$$

式中ρ是极径，φ是极角。“导体电势为零”就表为齐次的边界条件

$$u|_{\rho=a}=0. \tag{36.59}$$

在“无限远”处的静电场仍然保持为匀强的E_0. 由于选取了x轴平行于E_0,所以在无限远处,$E_y=0, E_x=E_0$,即$-\partial u/\partial x=E_0$,亦即$u=-E_0x=-E_0\rho\cos\varphi$. 因而还有一个非齐次的边界条件

$$u|_{\rho\to\infty}\sim -E_0\rho\cos\varphi. \tag{36.60}$$

问题就在于求解定解问题(36.58)—(36.60)。

解 以分离变数形式的试探解

$$u(\rho,\varphi)=R(\rho)\Phi(\varphi) \tag{36.61}$$

代入拉普拉斯方程(36.58),可把它分解为关于Φ和关于R的常微分方程

$$\Phi''+\lambda\Phi''=0, \tag{36.62}$$

$$\rho^2\frac{d^2R}{d\rho^2}+\rho\frac{dR}{d\rho}-\lambda R=0. \tag{36.63}$$

先看关于Φ的方程(36.62)。这里其实还有一个没有写出来的条件。事实上，如果不改变极径ρ而给极角φ加上2π，则实质上还是代表同一地点，而静电场中的电势u在一定地点应当具有一定的数值，这是说，$u(\rho,\varphi+2\pi)=u(\rho,\varphi)$，即

$$R(\rho)\Phi(\varphi+2\pi)=R(\rho)\Phi(\varphi),$$

亦即

$$\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi). \tag{36.64}$$

这叫作自然的周期条件。

方程 (36.62) 和条件 (36.64) 构成本征值问题。不难解得本征值

$$\lambda=m^2 \quad (m=0,1,2,3,\cdots), \tag{36.65}$$

本征函数

$$\Phi(\varphi)=A\cos m\varphi+B\sin m\varphi. \tag{36.66}$$

根据(36.65), 关于 R 的方程(36.63)应改写成

$$\rho^2\frac{d^2R}{d\rho^2}+\rho\frac{dR}{d\rho}-m^2R=0. \tag{36.67}$$

这是所谓欧勒方程(参看附录九)。对于 $m=0$, 它的解是

$$R=C+D\ln\rho \quad (m=0). \tag{36.68}$$

对于 $m>0$, (36.67)的解是

$$R=C\rho^m+D\frac{1}{\rho^m}. \tag{36.68'}$$

把解出的 $R(\rho)$ 和 $\Phi(\varphi)$ 代回(36.61), 得到极坐标系中的拉普拉斯方程本征解

$$u_0(\rho,\varphi)=C_0+D_0\ln\rho,$$

$$u_m(\rho,\varphi)=(A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi)\left(C_m\rho^m+D_m\frac{1}{\rho^m}\right).$$

拉普拉斯方程是线性的, 它的一般解应是所有本征解的叠加, 即

$$u(\rho,\varphi)=C_0+D_0\ln\rho$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}(A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi)\left(C_m\rho^m+D_m\frac{1}{\rho^m}\right). \tag{36.69}$$

还需要选定(36.69)中的各个系数使边界条件 (36.59) 和(36.60)得以满足。

先研究齐次的边界条件(36.59)。以(36.69)代人, 得

$$C_0+D_0\ln a+\sum_{m=1}^{\infty}(A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi)\left(C_ma^m+D_m\frac{1}{a^m}\right)=0.$$

一个傅里叶级数等于零，意味着所有傅里叶系数为零，即

$$C_0+D_0\ln a=0,\quad C_m a^m+D_m\frac{1}{a^m}=0.$$

由此，

$$C_0=-D_0\ln a,\quad D_m=-C_m a^{2m}.$$

于是，(36.69)简化为

$$u(\rho,\varphi)=D_0\ln\frac{\rho}{a}$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}(A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi)\left(\rho^m-a^{2m}\frac{1}{\rho^m}\right),\qquad(36.70)$$

式中的系数 C_m 已并入 A_m 和 B_m 之中。

再研究非齐次的边界条件(36.60)。对于很大的 ρ，(36.70)中的 $\ln(\rho/a)$ 和 ρ^{-m} 项远远小于 ρ^m 项因而应略去。因此，以(36.70)代入(36.60)的结果是

$$\lim_{\rho\to\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\rho^m(A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi)=-E_0\rho\cos\varphi.$$

左边对于 φ 而言是傅里叶级数，这就提示我们把右边也对于 φ 展开为傅里叶级数。但是，右边已经是傅里叶级数，不过它只有一个单项就是了。比较两边的傅里叶系数，知

$$\begin{cases}A_1=-E_0,\quad A_m=0\,(m\neq 0);\\ B_m=0.\end{cases}$$

最后，把求得的系数代回(36.70)。这样，本来是匀强的静电场中放置导体圆柱以后的电势分布是

$$u(\rho,\varphi)=D_0\ln\frac{\rho}{a}-E_0\rho\cos\varphi+E_0\frac{a^2}{\rho}\cos\varphi.\qquad(36.71)$$

简单谈谈所得解答(36.71)的物理含意。当中一项，即 $-E_0\rho\cos\varphi$ 正是原来的匀强静电场中的电势分布。最后一项，即

$E_0(a^2/\rho)\cos\varphi$ 对于大的 ρ 可以忽略，所以它代表在圆柱邻近对匀强电场的修正，这自然是柱面感应电荷的影响。此外，还有 $D_0\ln(\rho/a)$ 项，它的系数 D_0 又是任意常数，这表明解答 (36.71) 包含着某个不确定的因素。从物理上检查，这个不确定因素就在于问题提出时根本没有说明导体柱原来所带的电量，可见 $D_0\ln(\rho/a)$ 正是圆柱原来所带电量的影响。下面着重讨论圆柱原来并不带电因而 $D_0=0$ 的情况。

在图 64a 的 A 点和 B 点的电场强度是

$$E=-\frac{\partial u}{\partial\rho}\bigg|_{\substack{\rho=a\\ \varphi=0,\pi}}=\left(E_0\cos\varphi+E_0\frac{a^2}{\rho^2}\cos\varphi\right)\bigg|_{\substack{\rho=a\\ \varphi=0,\pi}}=\pm 2E_0,$$

是原来的匀强电场的两倍！所以在这两处特别容易击穿。而且不管圆柱的半径多么小，这个结论总是对的！

在图 64a 的 y 轴上的电势是

$$u\bigg|_{\varphi=\pm\pi/2}=\left(-E_0\rho\cos\varphi+E_0\frac{a^2}{\rho}\cos\varphi\right)\bigg|_{\varphi=\pm\pi/2}=0,$$

跟导体圆柱的电势相同。图 64a 的 y 轴实际上代表三维空间里的 yz 平面，因此 yz 平面的电势跟导体圆柱的电势相同。既然导体圆柱跟 yz 平面电势相同，如果让导体圆柱的两侧沿 yz 平面伸出两翼(图 64b)，静电场并不改变，电势分布仍然是(36.71)。

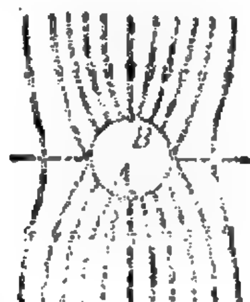


图 64b

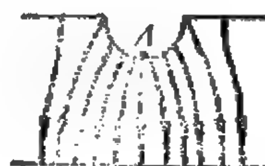


图 64c

要是只看带翼圆柱体的下方(图 64b 的下半幅，亦即图 64c)，那么这可以说是平行板电容器两极板之间的静电场，只是上极板

带有半圆柱形突起。如果远离突起的电场强度是 E_0，则突起最高处的电场强度是 $2E_0$. 由此看来，加工高压电容器的极板时，如果刨刀有个小缺口（不管多么小！），在极板上刨出小的半圆柱突起，则突起最高处的电场强度总是 E_0 的二倍，这就使电容器所能承受的电压减小一半。因此高压电容器的极板必须刨得非常平滑。

下一个例子是"没有初始条件的问题"。

例 7 长为 l 的理想传输线，一端接于电动势为 $v_0\sin\omega t$ 的交流电源，另一端是开路。求解线上的稳恒电振荡。

解 经历交流电的许多周期以后，初始条件所引起的自由振荡衰减到可以认为已消失，这时的电振荡完全是由交流电源引起的，这才叫作稳恒振荡。因此，这里求解的是没有初始条件的问题

$$v_{tt}-a^2v_{xx}=0 \quad (a=\sqrt{1/LC}), \tag{36.72}$$

$$\begin{cases} v|_{x=0}=v_0e^{i\omega t}, & (36.73)\\ j|_{x=l}=0. & (36.74)\end{cases}$$

为了计算的方便，在边界条件(36.72)中，$v_0\sin\omega t$ 即 $v_0\mathrm{Im}e^{i\omega t}$ 写成了 $v_0e^{i\omega t}$，这就必须约定，在算出的最后结果中也应取它的虚部。

传输线上的稳恒振动既然完全是由交流电源引起，当然可以认为振荡的周期跟交流电源相同。这是说，线上的电压 $v(x,t)$ 可以表为

$$v(x,t)=X(x)e^{i\omega t}. \tag{36.75}$$

以(36.75)代入(36.72)得到常微分方程 $X''+(\omega^2/a^2)X=0$，即

$$X''+\omega^2LCX=0.$$

这个方程的解是

$$X(x)=Ae^{i\omega\sqrt{LC}x}+Be^{-i\omega\sqrt{LC}x}.$$

因而

$$v(x,t)=Ae^{i\omega(t+\sqrt{LC}x)}+Be^{i\omega(t-\sqrt{LC}x)}。\qquad (36.76)$$

(36.76)右边第二项是从交流电源的一端发出的波，第一项则是反射波。系数 A 和 B 由边界条件(36.73)和(36.74)确定。

但是，边界条件(36.74)中出现的不是电压 v 而是电流 j，所以还需要电流 j 的表示式。把(36.76)代入 (31.12)即 $j_x=-Cv_t$ 和 $j_t=-\frac{1}{L}v_x$，不难得到

$$j(x,t)=-\sqrt{\frac{C}{L}}Ae^{i\omega(t+\sqrt{LC}x)}+\sqrt{\frac{C}{L}}Be^{i\omega(t-\sqrt{LC}x)}。\qquad (36.77)$$

现在，把(37.76)和(37.77)分别代入边界条件(36.73)和(36.74)，得

$$\begin{cases}A+B=v_0,\\ Ae^{i\omega\sqrt{LC}l}-Be^{-i\omega\sqrt{LC}l}=0.\end{cases}$$

由此解出

$$A=\frac{v_0}{1+e^{i2\omega\sqrt{LC}l}},\qquad B=\frac{v_0}{1+e^{-i2\omega\sqrt{LC}l}}。\qquad (36.78)$$

这样，传输线上的稳恒振荡为(36.76)和(36.77)给出，其中系数 A 和 B 则由(36.78)给出。

在输入端（交流电源端）的电压 $v|_{x=0}$ 同电流 $j|_{x=0}$ 之比叫作传输线的输入阻抗 $Z_{输入}$。按照(36.76)和(36.77)

$$Z_{输入}=v|_{x=0}:j|_{x=0}=\sqrt{\frac{L}{C}}\frac{A+B}{A-B}=-\sqrt{\frac{L}{C}}i\,\mathrm{ctg}\,(\omega\sqrt{LC}\,l)。$$

一个有趣的情况是 $l=\frac{1}{4}$波长。我们知道，

$$波长=波速/频率=a\Big/\frac{\omega}{2\pi}=2\pi/\omega\sqrt{LC},$$

所以“$l=\frac{1}{4}$波长”就是说 $l=\pi/2\omega\sqrt{LC}$。在这情况下，

$$Z_{输入}=-\sqrt{\frac{L}{C}}i\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}=0.$$

这样，长度为1/4波长的传输线接在交流电源上，另一端开路，从交流电源一方看过来，这段传输线竟然相当于一个短路元件。

习　　题

1. 长为 l 的弦，两端固定，弦中张力为 T. 在距一端为 x_0 的一点以力 F_0 把弦拉开，然后突然撤除这力。求解弦的振动。

2. 求解细杆导热问题，杆长 l，两端保持为零度，初始温度分布

$$u|_{t=0}=bx(l-x)/l^2.$$

3. 两端固定弦，长为 l. ①用宽为 2δ 的平面锤敲击弦的 $x=x_0$ 点。②用宽为 2δ 的余弦式凸面锤敲击弦的 $x=x_0$. 求解弦的振动。

4. 长为 l 的均匀杆，两端受压从而长度缩为 $l(1-2\varepsilon)$. 放手后自由振动，求解杆的这一振动。

5. 长为 l 的杆，一端固定，另一端受力 F_0 而伸长。求解杆在放手后的振动。

6. 长为 l 的理想传输线，远端开路。先把传输线充电到电位差 v_0，然后把近端短路。求解线上电压 $v(x,t)$.

7. 长为 l 的杆，上端固定在电梯天花板，杆身竖直，下端自由。电梯下降，当速度为 v_0 时突然停止。求解杆的振动。

8. 在铀块中，除了中子的扩散运动以外，还进行着中子的增殖过程，每秒钟在单位体积中产生的中子数正比于该处的中子浓度 u，从而可表为 βu（β 是表示增殖快慢的常数）。研究厚度为 l 的层状铀块。求临界厚度。（铀块厚度超过临界厚度，则中子浓度将随着时间而增长以致铀块爆炸。原子弹里就是这么回事。）

9. 求解薄膜的恒定表面浓度扩散问题。薄膜厚度为 l，杂质从两面进入薄膜。由于薄膜周围气氛中含有充分的杂质，薄膜表面上的杂质浓度得以保持为恒定的 N_0. 对于较大的 t，把所得答案简化。

10. 把上题改为限定源扩散。这是说，薄膜两面的表层已含有一定的杂质，比方说，每单位表面积下杂质总量 Φ_0，但此外不再有杂质进入薄膜。

11. 求解细杆导热问题。杆长 l，初始温度均匀为 u_0，两端分别保持温度

u_1和u_2。

12. 求解细杆导热问题，初始温度为零，一端$x=l$保持零度，另一端$x=0$的温度为At度（A是常数，t代表时间）。

13. 求解均匀杆的纵振动，杆长l，一端固定，另一端受纵向力

$$F(t)=F_0\sin\omega t$$

作用，初始位移和速度分别是$\varphi(x)$和$\psi(x)$。

14. 把弹簧上端$x=0$加以固定，在静止弹簧的下端$x=l$轻轻地挂上质量为m的物体，求解弹簧的纵振动。弹簧本身的重量可忽略不计。

15. 长为l的柱形管，一端封闭，另一端开放。管外空气中含有某种气体，其浓度为u_0，向管内扩散。求解该气体在管内的浓度$u(x,t)$。

16. 在矩形区域$0<x<a$，$0<y<b$上求解拉普拉斯方程$\Delta u=0$使满足边界条件$u|_{x=0}=Ay(b-y)$，$u|_{x=a}=0$，$u|_{y=0}=B\sin\frac{\pi x}{a}$，$u|_{y=b}=0$。

17. 均匀的薄板占据区域$0<x<a$，$0<y<\infty$。边界上的温度

$$u|_{x=0}=0,\ u|_{x=a}=0,\ u|_{y=0}=u_0,\ \lim_{y\to\infty}u=0.$$

求解板的稳定温度分布。

18. 在带状区域$0<x<a$，$0<y<\infty$上求解$\Delta u=0$使

$$u|_{x=0}=0,\ u|_{x=a}=0,\ u|_{y=0}=A\left(1-\frac{x}{a}\right),\ \lim_{y\to\infty}u=0.$$

19. 矩形膜，边长为l_1和l_2，边缘固定。求它的本征振动模式。

20. 长为l的均匀杆两端被支承，求解它的横振动。

21. 细圆环，半径为R，初始温度分布已知为$f(\varphi)$，φ是以环心为极点的极角。环的表面是绝热的。求解环内温度变化情况。

22. 在圆形域内求解$\Delta u=0$使满足边界条件①$u|_{\rho=a}=A\cos\varphi$，

$$②u|_{\rho=a}=A+B\sin\varphi.$$

23. 半圆形薄板，板面绝热，边界直径上温度保持零度，圆周上保持u_0。求稳定状态下的板上温度分布。

24. 把例6的导体圆柱换为介质圆柱，介质的介电常数为ε，求解柱内外的电场。[提示：柱内电势必须有限。在柱面上，电势连续，电位移的法向分量连续。]

25. 半径为a，表面熏黑了的均匀长圆柱，在温度为零度的空气中受着阳光照射。阳光垂直于柱轴，热流强度为q。试求柱内稳定温度分布。[提示：

泛定方程为$\Delta u=0$，边界条件为$(ku_\rho+Hu)|_{\rho=a}=f(\varphi)$，$f(\varphi)$是热流强度的法向分量。如取极轴垂直于阳光，则

$$f(\varphi)=\begin{cases}q\sin\varphi & (0<\varphi<\pi),\\ 0 & (\pi<\varphi<2\pi).\end{cases}$$

26. 在以原点为心，以R_1和R_2为半径的两个同心圆所围成的环域上求解$\Delta u=0$使满足边界条件$u|_{\rho=R_1}=f_1(\varphi)$，$u|_{\rho=R_2}=f_2(\varphi)$。

27. 求解绕圆柱的水流问题。在远离圆柱因而未受圆柱干扰处的水流是均匀的，流速为v_0。圆柱半径为a。

28. 长为l的理想传输线，一端接于电动势为$v_0\sin\omega t$的交流电源，另一端短路。求解线上的稳恒电振荡并计算输入阻抗。

29. 长为l的非理想传输线，一端接于交流电源$v_0\sin\omega t$，另一端通过阻抗元件R_0、L_0和C_0而相接。求解线上的稳恒电振荡。在怎样的条件下不存在反射波(这叫作匹配)？

30. 长为l的均匀杆，一端固定，另一端在纵向力$F(t)=F_0\sin\omega t$长期作用下。求解杆的稳恒振动。

§37. 非齐次的泛定方程

上两节研究的定解问题中的泛定方程都是齐次的。本节研究非齐次的泛定方程。

不妨认为边界条件是齐次的。这是因为如果边界条件不是齐次的，总可以按§35(三)的方法化为齐次的。

其次，还可以认为初始条件的数值为零。以两端固定弦的受迫振动为例，如果初始条件的数值不是零，则

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t)\quad(f=F/\rho);$$

$$u|_{x=0}=0,\quad u|_{x=l}=0;$$

$$u|_{t=0}=\varphi(x),\quad u_t|_{t=0}=\psi(x).$$

由于泛定方程和定解条件都是线性的，完全可以把u当作u^{I}和u^{II}的叠加，即

$$u(x,t)=u^{\mathrm{I}}(x,t)+u^{\mathrm{II}}(x,t)$$

并令 u^{I} 和 u^{II} 分别满足

$$\begin{aligned}&u^{\mathrm{I}}_{tt}-a^2u^{\mathrm{I}}_{xx}=0;\\&u^{\mathrm{I}}|_{x=0}=0,\ \ u^{\mathrm{I}}|_{x=l}=0;\\&u^{\mathrm{I}}|_{t=0}=\varphi(x),\ \ u^{\mathrm{I}}_t|_{t=0}=\psi(x).\end{aligned}\quad\left|\quad\begin{aligned}&u^{\mathrm{II}}_{tt}-a^2u^{\mathrm{II}}_{xx}=f(x,t);\\&u^{\mathrm{II}}|_{x=0}=0,\ \ u^{\mathrm{II}}|_{x=l}=0;\\&u^{\mathrm{II}}|_{t=0}=0,\ \ u^{\mathrm{II}}_t|_{t=0}=0.\end{aligned}\right.$$

很容易验证，把 u^{I} 和 u^{II} 的泛定方程叠加起来确是 u 的泛定方程，把 u^{I} 和 u^{II} 的定解条件叠加起来确是 u 的定解条件。于是，问题转化为 u^{I} 和 u^{II} 的定解问题。u^{I} 的泛定方程是齐次的，u^{I} 是初始位移和初始速度所引起的自由振动，可用上两节方法求解，我们只需着重研究 u^{II} 的求解。u^{II} 是外加力作用下的振动，它的泛定方程是非齐次的，初始条件的数值则是零。

（一）冲量定理法

研究非齐次的泛定方程，如上面所指出，不妨认为边界条件是齐次的，初始条件的数值为零。例如，研究两端固定弦的受迫振动，

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t);\tag{37.1}$$

$$u|_{x=0}=0,\ \ u|_{x=l}=0;\tag{37.2}$$

$$u|_{t=0}=0,\ \ u_t|_{t=0}=0.\tag{37.3}$$

下面运用简单的物理的推理，把非齐次泛定方程转化为齐次泛定方程。

非齐次泛定方程(37.1)右边的 $f(x,t)$ 表明，作用在每单位长弦上的外加力 $F(x,t)=\rho f(x,t)$. 这力是持续作用着的，从时刻零一直延续到时刻 t（时刻 t 以后的力不影响弦在时刻 t 的振动，所以不考虑时刻 t 以后的力）。按照 (29.4)，这个持续作用的力 $F(x,t)$ 可以看作许许多多前后相继的"瞬时"力。作用在时间区间 $(\tau,\tau+d\tau)$ 上而冲量为 $F(x,\tau)d\tau$ 的"瞬时"力可记作

$$F(x,\tau)\delta(t-\tau)d\tau.$$

这样，

$$\rho f(x,t)=\int_0^t \rho f(x,\tau)\delta(t-\tau)d\tau. \tag{37.4}$$

定解问题(37.1)—(37.3)是线性的，适用叠加原理。既然外加力是一系列瞬时力的叠加如(37.4)，则(37.1)—(37.3)的解也应是瞬时力所引起的振动 $v(x,t;\tau)d\tau$ 的叠加[记号 $v(x,t;\tau)$ 表示 v 是 x 和 t 的函数，而这函数又跟参数 τ 有关]，

$$u(x,t)=\int_0^t v(x,t;\tau)d\tau, \tag{37.5}$$

其中 $v(x,t;\tau)d\tau$ 既是瞬时力 $\rho f(x,\tau)\delta(t-\tau)d\tau$ 所引起的振动，应从下列泛定方程和定解条件解出：

$$v_{tt}-a^2v_{xx}=f(x,\tau)\delta(t-\tau); \tag{37.6}$$

$$v|_{x=0}=0,\quad v|_{x=l}=0; \tag{37.7}$$

$$v|_{t=0}=0,\quad v_t|_{t=0}=0. \tag{37.8}$$

这样，问题归结为求解瞬时力 $\rho f(x,\tau)\delta(t-\tau)d\tau$ 所引起的振动。一旦解出定解问题(37.6)—(37.8)，把求得的 v 代入(37.5)，问题就完全解决。

从数学上看，把(37.6)—(37.8)各式对 τ 积分，即得

$$\left(\int_0^\infty v d\tau\right)_{tt}-a^2\left(\int_0^\infty v d\tau\right)_{xx}=\int_0^\infty f(x,\tau)\delta(t-\tau)d\tau=f(x,t);$$

$$\left(\int_0^\infty v d\tau\right)\Big|_{x=0}=0,\qquad \left(\int_0^\infty v d\tau\right)\Big|_{x=l}=0;$$

$$\left(\int_0^\infty v d\tau\right)\Big|_{t=0}=0,\qquad \left(\int_0^\infty v d\tau\right)_t\Big|_{t=0}=0.$$

令这些跟(37.1)—(37.3)比较，立刻看出 $u=\int_0^\infty v d\tau$. 但是，当 $t<\tau$ 时，瞬时力 $\rho f(x,\tau)\delta(t-\tau)d\tau$ 尚未起作用，v 显然为零，所以 $u=\int_0^\infty v d\tau=\int_0^t v d\tau$. 这就从数学上证明(37.5)。

由此又可看到，初始条件的数值必须为零如(37.3)，才可用这个方法。

研究定解问题(37.6)—(37.8)。直到时刻 $\tau-0$，瞬时力

$$\rho f(x,\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

尚未起作用，从初始条件(37.8)得 $v|_{t=\tau-0}=0$，$v_t|_{t=\tau-0}=0$. 定解问题(37.6)—(37.8)就改写为

$$v_{tt}-a^2v_{xx}=f(x,\tau)\delta(t-\tau); \tag{37.6}$$

$$v|_{x=0}=0,\ \ v|_{x=l}=0; \tag{37.7}$$

$$v|_{t=\tau-0}=0,\ \ v_t|_{t=\tau-0}=0. \tag{37.8'}$$

接着考察从 $\tau-0$ 到 $\tau+0$ 的时间，瞬时力 $\rho f(x,\tau)\delta(t-\tau)d\tau$ 就在这时起作用。把(37.6)对时间积分，

$$\int_{\tau-0}^{\tau+0}\frac{\partial v_t}{\partial t}dt-a^2\int_{\tau-0}^{\tau+0}v_{xx}dt=\int_{\tau-0}^{\tau+0}f(x,\tau)\delta(t-\tau)dt,$$

即

$$v_t|_{\tau+0}-v_t|_{\tau-0}-0=f(x,\tau),$$

亦即

$$v_t|_{\tau+0}=f(x,\tau). \tag{37.9}$$

(37.9)的物理意义是很明显的，弦在瞬时力或者说脉冲力作用下获得速度。

从时刻 $\tau+0$ 起，瞬时力 $\rho f(x,\tau)\delta(t-\tau)d\tau$ 不再起作用，泛定方程成为齐次的。但这是以 $\tau+0$ 作为初始时刻，所以初始条件应根据(37.9)加以改写。定解问题(37.6)—(37.8)现在成为

$$v_{tt}-a^2v_{xx}=0; \tag{37.10}$$

$$v|_{x=0}=0,\ \ v|_{x=l}=0; \tag{37.11}$$

$$v|_{t=\tau+0}=0,\ \ v_t|_{t=\tau+0}=f(x,\tau). \tag{37.12}$$

这个定解问题的泛定方程是齐次的，可按上两节方法求解。只是要注意，这里是以时刻 $\tau+0$(或者简单些说 τ)作为初始时候，所以上两节的 t 在这里应换为 $t-\tau$.

总起来说，为了求解非齐次数理方程的定解问题 (37.1)—(37.3)(注意边界条件是齐次的，初始条件的数值为零)，把持续作用的力 $\rho f(x,t)$ 看作一系列前后相继的脉冲力

$$\rho f(x,\tau)\delta(t-\tau)d\tau,$$

脉冲力 $\rho f(x,\tau)\,\delta(t-\tau)d\tau$ 所引起的振动 $v(x,t;\tau)d\tau$ 可表为定解问题(37.6)—(37.8)，也就是从时刻 $\tau+0$ 起的自由振动，其泛定方程是齐次的。解出各个 v 之后，把它叠加起来，也就是代入(37.5)，问题就告解决。这叫作冲量定理法。

例1 求解定解问题

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=A\cos\frac{\pi x}{l}\sin\omega t;$$

$$u_x|_{x=0}=0,\quad u_x|_{x=l}=0;$$

$$u|_{t=0}=0,\quad u_t|_{t=0}=0.$$

解 应用冲量定理法，先求解

$$v_{tt}-a^2v_{xx}=0;$$

$$v_x|_{x=0}=0,\quad v_x|_{x=l}=0;$$

$$v|_{t=\tau+0}=0,\quad v_t|_{t=\tau+0}=A\cos\frac{\pi x}{l}\sin\omega\tau.$$

参照边界条件，试把解 v 展开为傅里叶余弦级数

$$v(x,t;\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t;\tau)\cos\frac{n\pi x}{l}.$$

把这余弦级数代入泛定方程，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[T_n''+\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T\right]\cos\frac{n\pi x}{l}=0.$$

由此分离出 T_n 的常微分方程

$$T_n''+\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T=0.$$

这个常微分方程的解是

$$T_n(t;\tau)=A_n(\tau)\cos\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}+B_n(\tau)\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}.$$

这样，解 v 的傅里叶余弦级数是

$$v(x,t;\tau)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n(\tau)\cos\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}+B_n(\tau)\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}\right]\cos\frac{n\pi x}{l}.$$

至于系数 $A_n(\tau)$和 $B_n(\tau)$则由初始条件确定。为此，把上式代入初始条件，

$$\begin{cases}\sum_{n=0}^{\infty}A_n(\tau)\cos\frac{n\pi x}{l}=0,\\ \sum_{n=1}^{\infty}B_n(\tau)\frac{n\pi a}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}=A\cos\frac{\pi x}{l}\sin\omega\tau.\end{cases}$$

右边的 $A\cos\frac{\pi x}{l}\sin\omega\tau$ 也是傅里叶余弦级数，它只有一个单项即 $n=1$ 的项。比较两边系数，得

$$A_n(\tau)=0,\quad B_1(\tau)=A\frac{l}{\pi a}\sin\omega\tau,\quad B_n(\tau)=0\quad(n\neq1).$$

到此，已求出 $v(x,t;\tau)$，

$$v(x,t;\tau)=A\frac{l}{\pi a}\sin\omega\tau\sin\frac{\pi a(t-\tau)}{l}\cos\frac{\pi x}{l}.$$

按照(37.5)，得出答案

$$u(x,t)=\int_0^t v(x,t;\tau)d\tau=\frac{Al}{\pi a}\cos\frac{\pi x}{l}\int_0^t\sin\omega\tau\sin\frac{\pi a(t-\tau)}{l}d\tau$$
$$=\frac{Al}{\pi a}\frac{1}{\omega^2-\pi^2a^2/l^2}\left(\omega\sin\frac{\pi a}{l}t-\frac{\pi a}{l}\sin\omega t\right)\cos\frac{\pi x}{l}.$$

输运问题，如泛定方程是非齐次的，完全可以仿照冲量定理加以处理。比如，研究定解问题

$$u_t-a^2u_{xx}=f(x,t);\tag{37.13}$$
$$u_x|_{x=0}=0,\quad u_x|_{x=l}=0;\tag{37.14}$$
$$u|_{t=0}=0.\tag{37.15}$$

泛定方程右边的 $f(x, t)$ 表明，在每单位长度上的热源强度为 $c\rho f(x, t)$。这热源从时刻零一直延续到时刻 t（时刻 t 以后的热源不影响时刻 t 的温度分布，所以不考虑时刻 t 以后的热源）。按照（29.4），持续的热源可看作许许多多前后相继的"瞬时"热源 $c\rho f(x,\tau)\delta(t-\tau)d\tau$ 的叠加。根据叠加原理，(37.13)—(37.15) 的解也应是瞬时热源的影响的叠加，

$$u(x, t)=\int_0^t v(x, t;\tau)d\tau, \tag{37.16}$$

其中 $v(x, t;\tau)d\tau$ 是瞬时热源 $c\rho f(x, \tau)\delta(t-\tau)d\tau$ 所造成的温度分布，即

$$v_t-a^2v_{xx}=f(x,\tau)\delta(t-\tau); \tag{37.17}$$

$$v_x|_{x=0}=0, \quad v_x|_{x=l}=0; \tag{37.18}$$

$$v|_{t=0}=0. \tag{37.19}$$

这样，问题归结为求解瞬时热源 $c\rho f(x,\tau)\delta(t-\tau)d\tau$ 所造成的温度分布。一旦解出定解问题(37.17)—(37.19)，把求得的 v 代入(37.16)，问题就完全解决。

直到时刻 $\tau-0$，瞬时热源尚未起作用，从初始条件 $v|_{t=0}=0$ 得 $v|_{t=\tau-0}=0$. 定解问题(37.17)—(37.19)成为

$$v_t-a^2v_{xx}=f(x,\tau)\delta(t-\tau); \tag{37.17}$$

$$v_x|_{x=0}=0, \quad v_x|_{x=l}=0; \tag{37.18}$$

$$v|_{t=\tau-0}=0. \tag{37.19'}$$

考察从 $\tau-0$ 到 $\tau+0$ 的时间．瞬时热源 $c\rho f(x, \tau)\delta(t-\tau)d\tau$ 就在这时起作用。把(37.17)对时间积分，

$$\int_{\tau-0}^{\tau+0}\frac{\partial v}{\partial t}dt-a^2\int_{\tau-0}^{\tau+0}v_{xx}dt=\int_{\tau-0}^{\tau+0}f(x,\tau)\delta(t-\tau)dt,$$

即得

$$v|_{t=\tau+0}=f(x,\tau). \tag{37.20}$$

(37.20) 的物理意义是明显的，在瞬时热源或者说脉冲热源作用下，温度分布改变为 $f(x,\tau)$.

从时刻 $\tau+0$ 起，瞬时热源 $c\rho f(x,\tau)\delta(t-\tau)d\tau$ 不再起作用，泛定方程成为齐次的。但这是以 $\tau+0$ 作为初始时刻，所以初始条件应根据(37.20)加以改写。定解问题 (37.17)—(37.19) 现在成为

$$v_t-a^2v_{xx}=0; \tag{37.21}$$

$$v_x|_{x=0}=0,\quad v_x|_{x=l}=0; \tag{37.22}$$

$$v|_{t=\tau+0}=f(x,\tau). \tag{37.23}$$

这个定解问题的泛定方程是齐次的，可按上两节方法求解，只是要注意，上两节的 t 这里应换为 $t-\tau$.

例2 求解定解问题

$$u_t-a^2u_{xx}=A\sin\omega t;$$

$$u_x|_{x=0}=0,\quad u_x|_{x=l}=0;$$

$$u|_{t=0}=0.$$

解 仿照冲量定理法，先求解

$$v_t-a^2v_{xx}=0;$$

$$v_x|_{x=0}=0,\quad v_x|_{x=l}=0;$$

$$v|_{t=\tau+0}=A\sin\omega\tau.$$

参照边界条件，试把解 v 展开为傅里叶余弦级数

$$v(x,t;\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t;\tau)\cos\frac{n\pi x}{l}.$$

把这余弦级数代入泛定方程，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[T_n'+\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T\right]\cos\frac{n\pi x}{l}=0.$$

由此分离出 T 的常微分方程

$$T_n' + \frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T = 0.$$

这个常微分方程的解是

$$T_n(t;\tau) = C_n(\tau)e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}(t-\tau)}.$$

这样，解 v 的傅里叶余弦级数是

$$v(x, t; \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\tau)e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}(t-\tau)} \cos\frac{n\pi x}{l}.$$

至于系数 $C_n(\tau)$ 则由初始条件确定。为此，把上式代入初始条件，

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(\tau)\cos\frac{n\pi x}{l} = A\sin\omega\tau.$$

右边的 $A\sin\omega\tau$ 也是傅里叶余弦级数，它只有一个单项即 $n=0$ 的项。比较两边系数，得

$$C_0(\tau) = A\sin\omega\tau,\ \ C_n(\tau) = 0\ \ (n \neq 0).$$

到此，已求出 $v(x, t; \tau)$

$$v(x, t; \tau) = A\sin\omega\tau$$

按照(37.16)，得出答案

$$u(x, t) = \int_0^t v(x, t; \tau)d\tau = A\int_0^t \sin\omega\tau d\tau$$

$$= \frac{A}{\omega}(1 - \cos\omega t).$$

（二）格林函数法

以上是把持续在时间中的外力或外源看作许许多多前后相继的瞬时力或瞬时源。我们还可以把这观点再推进一步，又把连续分布在空间中的外力或外源看作鳞次栉比排列着的许许多多点上的作用力或点源。这是说，

$$f(x, t) = \int_{\tau=0}^{t}\int_{\xi=0}^{l} f(\xi, \tau)\delta(x-\xi)\delta(t-\tau)d\xi d\tau. \qquad (37.24)$$

拿两端固定弦的受迫振动问题来说，作用在点 ξ 和时刻 τ 的瞬时力 $\rho\delta(x-\xi)\delta(t-\tau)d\xi d\tau$ 所引起的振动 $G(x,t;\xi,\tau)d\xi d\tau$ 的定解问题是

$$G_{tt}-a^2G_{xx}=\delta(x-\xi)\delta(t-\tau); \tag{37.25}$$

$$G|_{x=0}=0,\ \ G|_{x=l}=0; \tag{37.26}$$

$$G|_{t=0}=0,\ \ G_t|_{t=0}=0。 \tag{37.27}$$

这个定解问题可以转化为

$$G_{tt}-a^2G_{xx}=0;$$

$$G|_{x=0}=0,\ \ G|_{x=l}=0;$$

$$G|_{t=\tau+0}=0,\ \ G_t|_{t=\tau+0}=\delta(x-\xi)$$

而解出。作用在一个点上的瞬时力所引起的振动，亦即定解问题(37.25)—(37.27) 的解 G，叫作两端固定弦受迫振动的格林函数。一旦解出格林函数，根据叠加原理，参照(37.24)，就可求得任意外力 $F(x,t)=\rho f(x,t)$ 作用下的受迫振动

$$u(x,t)=\int_{\tau=0}^{t}\int_{\xi=0}^{l}f(\xi,\tau)G(x,t;\xi,\tau)d\xi d\tau。 \tag{37.28}$$

拿两端绝热杆的热传导问题来说，作用在点 ξ 和时刻 τ 的瞬时热源 $c\rho\delta(x-\xi)\delta(t-\tau)d\xi d\tau$ 所引起的温度分布 $G(x,t;\xi,\tau)d\xi d\tau$ 的定解问题是

$$G_t-a^2G_{xx}=\delta(x-\xi)\delta(t-\tau); \tag{37.29}$$

$$G_x|_{x=0}=0,\ \ G_x|_{x=l}=0; \tag{37.30}$$

$$G|_{t=0}=0。 \tag{37.31}$$

这个定解问题可以转化为

$$G_t-a^2G_{xx}=0;$$

$$G_x|_{x=0}=0,\ \ G_x|_{x=l}=0;$$

$$G|_{t=\tau+0}=\delta(x-\xi)$$

而解出。瞬时点热源所引起的温度分布，亦即定解问题(37.29)—

(37.31)的解 G，叫作这类热传导问题的格林函数。一旦解出格林函数，根据叠加原理，参照(37.24)，就可求得任意热源 $F(x,t)=c\rho f(x,t)$ 所引起的温度分布

$$u(x,t)=\int_{\tau=0}^{t}\int_{\xi=0}^{l}f(\xi,\tau)G(x,t;\xi,\tau)d\xi d\tau. \qquad (37.32)$$

例 3　用格林函数法重解例 1，即

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=A\cos\frac{\pi x}{l}\sin\omega t;$$

$$u_x|_{x=0}=0,\quad u_x|_{x=l}=0;$$

$$u|_{t=0}=0,\quad u_t|_{t=0}=0.$$

解　先求格林函数 $G(x,t;\xi,\tau)$.

$$G_{tt}-a^2G_{xx}=\delta(x-\xi)\delta(t-\tau);$$

$$G_x|_{x=0}=0,\quad G_x|_{x=l}=0;$$

$$G|_{t=0}=0,\quad G_t|_{t=0}=0.$$

这个定解问题可转化为

$$G_{tt}-a^2G_{xx}=0;$$

$$G_x|_{x=0}=0,\quad G_x|_{x=l}=0;$$

$$G|_{t=\tau+0}=0,\ G_t|_{t=\tau+0}=\delta(x-\xi).$$

我们已经熟悉这个泛定方程和边界条件的解的一般形式，它是

$$G(x,t;\xi,\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n(\xi,\tau)\cos\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}\right.$$

$$\left.+B_n(\xi,\tau)\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}\right]\cos\frac{n\pi x}{l}.$$

系数 $A_n(\xi,\tau)$ 和 $B_n(\xi,\tau)$ 由初始条件确定。为此，把上式代入初始条件，

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}A_n(\xi,\tau)\cos\frac{n\pi x}{l}=0,\\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}B_n(\xi,\tau)\frac{n\pi a}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}=\delta(x-\xi).\end{cases}$$

把右边的 $\delta(x-\xi)$ 也展开为傅里叶余弦级数，

$$\delta(x-\xi)=\frac{2}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\delta_n}\cos\frac{n\pi\xi}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}.$$

于是，比较两边系数，得

$$A_n(\xi,\tau)=0,\quad B_n(\xi,\tau)=\frac{2}{n\pi a}\cos\frac{n\pi\xi}{l}\,(n\neq 0).$$

到此，已求出格林函数

$$G(x,t;\xi,\tau)$$
$$=\frac{1}{l}(t-\tau)+\frac{2}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}\cos\frac{n\pi\xi}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}.$$

按照(37.28)，得出答案

$$u(x,t)=\int_{\tau=0}^{t}\int_{\xi=0}^{l}f(\xi,\tau)G(x,t;\xi,\tau)d\xi d\tau$$

$$=\frac{1}{l}\int_{\tau=0}^{t}\int_{\xi=0}^{l}(t-\tau)A\cos\frac{\pi\xi}{l}\sin\omega\tau d\xi d\tau+\frac{2A}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi x}{l}$$

$$\times\int_{\tau=0}^{t}\int_{\xi=0}^{l}\cos\frac{\pi\xi}{l}\sin\omega\tau\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}\cos\frac{n\pi\xi}{l}d\xi d\tau$$

$$=\frac{2A}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi x}{l}\int_{\xi=0}^{l}\cos\frac{\pi\xi}{l}\cos\frac{n\pi\xi}{l}d\xi$$

$$\times\int_{\tau=0}^{t}\sin\omega\tau\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}d\tau.$$

对 ξ 的积分等于零，除非 $n=1$. 对于 $n=1$，这个积分等于 $l/2$. 于是，

$$u(x,t)=\frac{Al}{\pi a}\cos\frac{\pi x}{l}\int_{\tau=0}^{t}\sin\omega\tau\sin\frac{\pi a(t-\tau)}{l}d\tau$$
$$=\frac{Al}{\pi a}\frac{1}{\omega^2-\pi^2a^2/l^2}\left(\omega\sin\frac{\pi a t}{l}-\frac{\pi a}{l}\sin\omega t\right)\cos\frac{\pi x}{l}.$$

例 4 用格林函数法重解例 2，即

$$u_t - a^2 u_{xx} = A\sin\omega t;$$
$$u_x|_{x=0} = 0,\ \ u_x|_{x=l} = 0;$$
$$u|_{t=0} = 0.$$

解 先求格林函数 $G(x,t;\xi,\tau)$,

$$G_t - a^2 G_{xx} = \delta(x-\xi)\delta(t-\tau);$$
$$G_x|_{x=0} = 0,\ \ G_x|_{x=l} = 0;$$
$$G|_{t=0} = 0.$$

这个定解问题可转化为

$$G_t - a^2 G_{xx} = 0;$$
$$G_x|_{x=0} = 0,\ \ G_x|_{x=l} = 0;$$
$$G|_{t=\tau+0} = \delta(x-\xi).$$

我们已经熟悉这个泛定方程和边界条件的解的一般形式,它是

$$G(x,t;\xi,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\xi,\tau) e^{-\frac{n^2\pi^2a^2(t-\tau)}{l^2}} \cos\frac{n\pi x}{a}.$$

系数 $C_n(\xi,\tau)$ 由初始条件确定。为此,把上式代入初始条件,

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(\xi,\tau)\cos\frac{n\pi x}{l} = \delta(x-\xi).$$

把右边的 $\delta(x-\xi)$ 也展开为傅里叶余弦级数,

$$\delta(x-\xi) = \frac{2}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\delta_n}\cos\frac{n\pi\xi}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}.$$

于是,比较两边的系数,得

$$C_n(\xi,\tau) = \frac{2}{l\delta_n}\cos\frac{n\pi\xi}{l}.$$

到此,已求出格林函数

$$G(x,t;\xi,\tau) = \frac{2}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\delta_n} e^{-\frac{n^2\pi^2a^2(t-\tau)}{l^2}}\cos\frac{n\pi\xi}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}.$$

按照(37.32)，得出答案

$$u(x,t)=\int_{\tau=0}^{t}\int_{\xi=0}^{l}f(\xi,\tau)G(x,t;\xi,\tau)d\xi d\tau$$

$$=\frac{2A}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\delta_n}e^{-\frac{n^2\pi^2a^2t}{l^2}}\cos\frac{n\pi x}{l}\int_{\tau=0}^{t}e^{\frac{n^2\pi^2a^2\tau}{l^2}}\sin\omega\tau d\tau\int_{\xi=0}^{l}\cos\frac{n\pi\xi}{l}d\xi。$$

对 ξ 的积分等于零，除非 $n=0$. 对于 $n=0$，这个积分等于 l. 于是，

$$u(x,t)=A\int_0^t\sin\omega\tau d\tau=\frac{A}{\omega}(1-\cos\omega t).$$

（三）傅里叶级数法

跟齐次泛定方程的定解问题一样，非齐次泛定方程的定解问题也可用傅里叶级数法求解，就是说，把所求的解展开为傅里叶级数

$$u(x,t)=\sum_n T_n(t)X_n(x).$$

为了从泛定方程分离出 $T_n(t)$ 的常微分方程，这个级数展开的基本函数 $X_n(x)$ 应当是相应的齐次泛定方程（不是所求解的非齐次方程）在所给边界条件下的本征函数。

例 5 用傅里叶级数法重解例 1，即

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=A\cos\frac{\pi x}{l}\sin\omega t;$$

$$u_x|_{x=0}=0,\quad u_x|_{x=l}=0;$$

$$u|_{t=0}=0,\quad u_t|_{t=0}=0.$$

解 级数展开的基本函数应是相应的齐次泛定方程 $u_{tt}-a^2u_{xx}=0$ 在所给边界条件 $u_x|_{x=0}=0$ 和 $u_x|_{x=l}=0$ 下的本征函数。我们已经熟悉这些本征函数，它们是 $\cos\frac{n\pi x}{l}$ $(n=0,1,2,\cdots)$。这样，

试把所求的解展开为傅里叶余弦级数

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)\cos\frac{n\pi x}{l}.$$

把这个级数代入泛定方程，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[T_n''+\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T_n\right]\cos\frac{n\pi x}{l}=A\cos\frac{\pi x}{l}\sin\omega t.$$

左边是傅里叶余弦级数，这提示我们把右边也展开为傅里叶余弦级数。其实，右边已经是傅里叶余弦级数，它只有一个单项即 $n=1$ 的项。于是，比较两边的系数，分离出 $T_n(t)$ 的常微分方程

$$T_1''+\frac{\pi^2a^2}{l^2}T_1=A\sin\omega t,\qquad T_n''+\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T_n=0\ \ (n\neq 1).$$

又把 $u(x,t)$ 的傅里叶余弦级数代入初始条件，得 $T_n(t)$ 的初始条件

$$T_n(0)=0,\ \ T_n'(0)=0.$$

$T_n(t)$ 的常微分方程在初始条件 $T_n(0)=0, T_n'(0)=0$ 下的解是(参看§27 习题 6 的答案)

$$T_1(t)=\frac{Al}{\pi a}\frac{1}{\omega^2-\pi^2a^2/l^2}\left(\omega\sin\frac{\pi at}{l}-\frac{\pi a}{l}\sin\omega t\right),$$

$$T_n(t)=0\ \ (n\neq 1).$$

这样，所求的解是

$$u(x,t)=\frac{Al}{\pi a}\frac{1}{\omega^2-\pi^2a^2/l^2}\left(\omega\sin\frac{\pi at}{l}-\frac{\pi a}{l}\sin\omega t\right)\cos\frac{\pi x}{l}.$$

例 6 用傅里叶级数法重解例 2，即

$$u_t-a^2u_{xx}=A\sin\omega t;$$

$$u_x|_{x=0}=0,\ \ u_x|_{x=l}=0;$$

$$u|_{t=0}=0.$$

解 级数展开的基本函数应是相应的齐次泛定方程 $u_t-a^2u_{xx}$

$=0$ 在所给边界条件 $u_x|_{x=0}=0$ 和 $u_x|_{x=l}=0$ 下的本征函数。我们已经熟悉这些本征函数，它们是 $\cos\frac{n\pi x}{l}$ $(n=0,1,2,3\cdots)$。这样，试把所求的解展开为傅里叶余弦级数

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)\cos\frac{n\pi x}{l}.$$

把这个级数代入泛定方程，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[T_n'+\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T_n\right]\cos\frac{n\pi x}{l}=A\sin\omega t.$$

左边是傅里叶余弦级数，这提示我们把右边也展开为傅里叶余弦级数。其实，右边已经是傅里叶余弦级数，它只有一个单项即 $n=0$ 的项。于是，比较两边系数，分离出 $T_n(t)$ 的常微分方程

$$T_0'=A\sin\omega t,\ \ T_n'+\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T_n=0\ \ (n\neq0).$$

又把 $u(x,t)$ 的傅里叶余弦级数代入初始条件，得 $T_n(t)$ 的初始条件

$$T_n(0)=0.$$

$T_n(t)$ 的常微分方程在初始条件 $T_n(0)=0$ 下的解是

$$T_0(t)=\frac{A}{\omega}(1-\cos\omega t),\ \ T_n(0)=0\ \ (n\neq0).$$

这样，所求解是

$$u(x,t)=\frac{A}{\omega}(1-\cos\omega t).$$

不同于冲量定理法和格林函数法，即使初始条件的数值不是零，傅里叶级数法仍可直接应用。

（四）泊松方程

泊松方程 $\Delta u=f(x,y,z)$ 可说是非齐次的拉普拉斯方程。泊

松方程（以及拉普拉斯方程）属于稳定场即不随时间而变的场，显然不适用冲量定理法。

格林函数法是可以用的，但格林函数不能借助冲量定理求出。

在无界空间中，没有边界条件，泊松方程的格林函数倒是很容易求出的。例如，三维泊松方程的格林函数 $G(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)$ 满足

$$\Delta_3 G=\delta(x-\xi)\delta(y-\eta)\delta(z-\zeta). \tag{37.33}$$

拿这方程跟(31.44)对照就知道，G 是在点(ξ,η,ζ)而电量为$-\varepsilon_0$的点电荷周围的电场中的电势。这电势是读者在电磁学中所熟悉的$-\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{r}$，即

$$G(x,y,z;\xi,\eta,\zeta)=-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}. \tag{37.34}$$

又如，二维泊松方程的格林函数满足

$$\Delta_2 G=\delta(x-\xi)\delta(y-\eta).$$

这是在点(ξ,η)而电量为$-\varepsilon_0$的点电荷周围的电场中的电势。不过，二维空间(xy平面)中的点电荷，其实是沿 z 方向的线电荷。这里，线电荷的线密度(单位线长的电量)为$-\varepsilon_0$. 线电荷周围电场中的电势是读者在电磁学中所熟悉的$-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\rho}$，即

$$G(x,y;\xi,\eta)=-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}. \tag{37.35}$$

在有界空间中，由于存在边界条件，求泊松方程的格林函数却要略为费点事。

例 7 $M_0(x_0,y_0,z_0)$是球内的一点(图 65)，试求泊松方程的格林函数 $G(x,y,z;x_0,y_0,z_0)$，

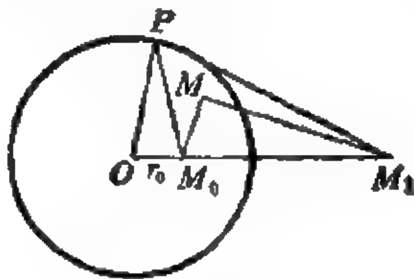


图 65

$$\Delta_3 G=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0),$$

要求满足边界条件：在球面上，G 为零。

解 要是不考虑边界条件，格林函数已由（37.34）给出，即 $G(x,y,z;x_0,y_0,z_0)=-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}$，式中 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}_0$ 分别是点 $M(x,y,z)$ 和 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的矢径，$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|$ 则是它们之间的距离。但是，这个无界空间的格林函数显然不满足本例的边界条件，因而需要修改。修改的办法是加上某个适当的调和函数（拉普拉斯方程的解）。

所求的格林函数相当于接地导体球内的电势，在球内的点 $\boldsymbol{r}_0$ 放置着电量为 $-\varepsilon_0$ 的点电荷。参看图 65，把 OM_0 向球外延长到某个 M_1 点。研究 M 点在球面上例如在 P 点的情况。$\triangle OPM_0$ 和 $\triangle OM_1P$ 具有公共角 $\angle POM_1$。如果 M_1 点按下式选定 $r_0:a=a:r_1$（a 是球的半径）则 $\triangle OPM_0$ 跟 $\triangle OM_1P$ 相似，从而

$$\left.\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}\right|_{\text{球面上}}:\left.\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}\right|_{\text{球面上}}=\frac{1}{r_0}:\frac{1}{a}.$$

因此，设想在点 M_1 放置符号相反而电量为 a/r_0 倍的点电荷，则这两个点电荷的电场中的电势在球面上是

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}+\frac{a}{r_0}\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}\\&=-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}\left(\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}-\frac{a}{r_0}\right)=0.\end{aligned}$$

正好满足本例的边界条件。

这个设想的点电荷叫作电像。点 M_0 处的点电荷和它的电像的电场的电势

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_0)=-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}+\frac{a}{r_0}\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}\tag{37.36}$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}$$

$$+\frac{a}{r_0}\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{(x-a^2x_0/r_0^2)^2+(y-a^2y_0/r_0^2)^2+(z-a^2z_0/r_0^2)^2}}.$$

例 8 $M_0(x_0, y_0)$ 是圆内的一点（仍参看图 65），试求泊松方程的格林函数 $G(x, y; x_0, y_0)$，

$$\Delta_2 G=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0),$$

要求满足边界条件：在圆周上，G 为零。

解 这个问题也可用电像法求解。

把圆心与点 $M_0(x_0, y_0)$ 联结并延长到 M_1，使 $\rho_1=a^2/\rho_0$，式中 ρ_1 和 ρ_0 分别是 M_0 和 M_1 距圆心的距离，a 则是圆的半径。这是说，点 M_1 的矢径 $r_1=\frac{a^2}{\rho_0^2}r_0$，式中 r_0 是点 M 的矢径。在点 M_1 放置点电荷，其符号跟点 M_0 处的点电荷相反，就叫作点 M_0 处的点电荷的电像。计及电像，电场的电势即为所求格林函数 G. 注意到二维空间的点电荷实为三维空间中的线电荷，

$$G(x, y; x_0, y_0)=-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|r-r_0|}+\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|r-r_1|}+\frac{1}{2\pi}\ln\frac{a}{\rho_0}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{a\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}{\rho_0\sqrt{(x-a^2x_0/\rho_0^2)^2+(y-a^2y_0/\rho_0^2)^2}}.$$

(37.37)

这个式子可以仿照(37.36)加以验证。电势的数值是相对的，可以普遍增减同一个常数，(37.37)右边第三项就是增添的常数项。

求得某种齐次边界条件下的泊松方程的格林函数之后，同一边界条件下的泊松方程 $\Delta u=f$ 的解就可用格林函数算出：

$$\begin{cases} u(x, y, z)=\iiint f(x_0, y_0, z_0)G(x, y, z; x_0, y_0, z_0)\,dx_0dy_0dz_0\ (\text{三维}), \\ u(x, y)=\iint f(x_0, y_0)G(x, y; x_0, y_0)\,dx_0dy_0\ (\text{二维}). \end{cases}$$

(37.38)

从(37.36)和(37.37)可以知道，(37.38)中的积分计算一般说来是很繁的。下面让我们介绍颇为实用的**特解法**。

求解泊松方程 $\Delta u=f$. 先不管边界条件，任取这泊松方程的一个特解 v，然后令 $u=v+w$. 这就把问题转化为求解 w，而 $\Delta w=\Delta u-\Delta v=\Delta u-f=0$，这不再是泊松方程而是拉普拉斯方程。在一定边界条件下求解拉普拉斯方程是 § 36 研究过的问题。

例 9 在圆域 $\rho<R$ 上求解泊松方程

$$\begin{cases}\Delta u=a+b(x^2-y^2),\\ u|_{\rho=R}=c.\end{cases}$$

解 先设法找一个特解。显然，$\Delta\left(a\frac{1}{2}x^2\right)=a$, $\Delta\left(a\frac{1}{2}y^2\right)=a$, 为对称起见，取 $a\frac{1}{4}(x^2+y^2)$. 又，$\Delta\left(b\frac{1}{12}x^4\right)=bx^2$, $\Delta\left(b\frac{1}{12}y^4\right)=by^2$. 这样，找到一个特解

$$v=\frac{a}{4}(x^2+y^2)+\frac{b}{12}(x^4-y^4)=\frac{a}{4}\rho^2+\frac{b}{12}(x^2+y^2)(x^2-y^2)$$

$$=\frac{a}{4}\rho^2+\frac{b}{12}\rho^4\cos 2\varphi.$$

令

$$u=v+w=\frac{a}{4}\rho^2+\frac{b}{12}\rho^4\cos 2\varphi+w,$$

就把问题转化为 w 的定解问题，

$$\begin{cases}\Delta w=0,\\ w|_{\rho=R}=c-\frac{a}{4}R^2-\frac{b}{12}R^4\cos 2\varphi.\end{cases}$$

在极坐标系中用分离变数法求解拉普拉斯方程的一般结果见(36.69)即

$$w(\rho,\varphi)=C_0+D_0\ln\rho+\sum_{m=1}^{\infty}(A_m\cos m\varphi$$

$$+B_m\sin m\varphi)\left(C_m\rho^m+D_m\frac{1}{\rho^m}\right).$$

w 在圆内应当处处有限。但上式的 $\ln\rho$ 和 $1/\rho^m$ 在圆心为无限大，所以应当排除，就是说，$D_0=0, D_m=0$. 于是，

$$w(\rho,\varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}(A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi)\rho^m.$$

把上式代入边界条件，

$$\sum_{m=0}^{\infty}(A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi)R^m=c-\frac{a}{4}R^2-\frac{b}{12}R^4\cos 2\varphi.$$

比较两边系数，得

$$A_0=c-\frac{a}{4}R^2,\ \ A_2=-\frac{b}{12}R^2,\ \ A_m=0\ \ (m\neq 0,2);\ \ B_m=0.$$

这样，所求解是

$$u=v+w=c+\frac{a}{4}(\rho^2-R^2)+\frac{b}{12}\rho^2(\rho^2-R^2)\cos 2\varphi.$$

习　　题

1. 两端固定的弦在线密度为 $\rho f(x,t)=\rho\Phi(x)\sin\omega t$ 的横向力作用下振动。求解其振动情况。研究共振的可能性，并求共振时的解。

2. 两端固定弦在点 x_0 受谐变力 $\rho f(t)=\rho f_0\sin\omega t$ 作用而振动，求解振动情况。[提示：外加力的线密度可表为 $\rho f(x,t)=\rho f_0\sin\omega t\,\delta(x-x_0)$.]

3. 均匀细导线，每单位长的电阻为 R，通以恒定的电流 I，导线表面跟周围温度为零度的介质进行热量交换，试解线上温度变化，设初始温度和两端温度都是零度。

4. 在圆域 $\rho<a$ 上求解 $\Delta u=-4$，边界条件是 $u|_{\rho=a}=0$.

5. 在圆域 $\rho<a$ 上求解 $\Delta u=-xy$，边界条件是 $u|_{\rho=a}=0$.

6. 在矩形域 $0<x<a,\ -b/2<y<+b/2$ 上求解 $\Delta u=-2$，且 u 在边界上的值为零。

7. 在矩形域 $0<x<a,\ -b/2<y<+b/2$ 上求解 $\Delta u=-x^2y$，且 u 在边界上的值为零。

第十一章　分离变数(傅里叶积分)法

上一章用分离变数法求解有界空间中的定解问题，得到的解是傅里叶级数形式的。本章用分离变数法求解无界空间中的定解问题。从有界空间转到无界空间，傅里叶级数转化为傅里叶积分。因此，本章叫作分离变数(傅里叶积分)法。

§38. 齐次的泛定方程

无界空间中的分离变数法基本上同于有界空间。但由于没有边界条件，也就不存在本征值问题，对分立的本征值求和应代之以对连续参数积分。

例1　达朗伯公式。在一维无界空间中求解

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=0,$$

$$u|_{t=0}=\varphi(x),\quad u_t|_{t=0}=\psi(x).$$

解　以分离变数形式的试探解

$$u(x,t)=X(x)T(t)$$

代入泛定方程，得

$$XT''-a^2X''T=0.$$

用 a^2XT 遍除各项即得

$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{X''}{X}.$$

两边分别是时间 t 和坐标 x 的函数，不可能相等，除非两边实际上是同一个常数。把这个常数记作 $-\lambda$，

$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{X''}{X}=-\lambda.$$

这可分离为关于T和关于X的方程，

$$T''+\lambda a^2T=0,$$

$$X''+\lambda X=0.$$

先看关于X的方程。逐一考察$\lambda<0$，$\lambda=0$和$\lambda>0$三种可能性。

① $\lambda<0$. 方程$X''+\lambda X=0$的解是

$$X(x)=C_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

于$x\to\pm\infty$，这个解$\to\infty$. 因此，$\lambda<0$的可能性应排除。

② $\lambda=0$. 方程$X''+\lambda X=0$的解是

$$X(x)=C_1x+C_2.$$

于$x\to\pm\infty$，这个解的绝对值$\to\infty$. 因此，$\lambda=0$的可能性也应排除。

③ $\lambda>0$. 把λ改记作ω^2，方程$X''+\lambda X=0$即$X''+\omega^2X=0$的解是

$$X(x)=C_1e^{i\omega x}+C_2e^{-i\omega x}\ (\omega>0),$$

即

$$X(x)=Ce^{i\omega x}\ (\omega\text{可正可负}).$$

由于没有边界条件，ω的值不再限制为某些分立的数值(本征值)，可取任意的实数值。

关于T的方程$T''+\lambda a^2T=0$即$T''+\omega^2a^2T=0$的解是

$$T(t)=Ae^{i\omega at}+Be^{-i\omega at}.$$

这样，分离变数形式的解是

$$u(x,t;\omega)=A(\omega)e^{i\omega(x+at)}+B(\omega)e^{i\omega(x-at)},$$

式中ω可取任意的实数值。一般解是线性叠加即积分

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}[A(\omega)e^{i\omega(x+at)}+B(\omega)e^{i\omega(x-at)}]d\omega.$$

为了确定$A(\omega)$和$B(\omega)$，把上式代入初始条件，得

$$\int_{-\infty}^{\infty}[A(\omega)+B(\omega)]e^{i\omega x}d\omega=\varphi(x),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}i\omega a[A(\omega)-B(\omega)]e^{i\omega x}d\omega=\psi(x).$$

左边是傅里叶积分，这提示我们把右边的 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 也展为傅里叶积分，然后把两边加以比较，知

$$\begin{cases} A(\omega)+B(\omega)=\overline{\varphi}(\omega), \\ A(\omega)-B(\omega)=\dfrac{1}{i\omega a}\overline{\psi}(\omega), \end{cases}$$

其中 $\overline{\varphi}(\omega)$ 和 $\overline{\psi}(\omega)$ 分别是 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的傅里叶变换式。由此解出

$$\begin{cases} A(\omega)=\dfrac{1}{2}\overline{\varphi}(\omega)+\dfrac{1}{2a}\dfrac{1}{i\omega}\overline{\psi}(\omega), \\ B(\omega)=\dfrac{1}{2}\overline{\varphi}(\omega)-\dfrac{1}{2a}\dfrac{1}{i\omega}\overline{\psi}(\omega). \end{cases}$$

这样，所求的解是

$$\begin{aligned} &u(x,t)\\ &=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}[\overline{\varphi}(\omega)e^{i\omega at}]e^{i\omega x}d\omega+\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{i\omega}\overline{\psi}(\omega)e^{i\omega at}\right]e^{i\omega x}d\omega \\ &\quad+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}[\overline{\varphi}(\omega)e^{-i\omega at}]e^{i\omega x}d\omega-\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{i\omega}\overline{\psi}(\omega)e^{-i\omega at}\right]e^{i\omega x}d\omega. \end{aligned}$$

根据傅里叶变换的延迟定理（见§28），上式右边第一项和第三项分别是 $\frac{1}{2}\varphi(x+at)$ 和 $\frac{1}{2}\varphi(x-at)$。于是，

$$\begin{aligned} u(x,t)=&\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)] \\ &+\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{i\omega}\overline{\psi}(\omega)e^{i\omega at}\right]e^{i\omega x}d\omega \\ &-\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{i\omega}\overline{\psi}(\omega)e^{-i\omega at}\right]e^{i\omega x}d\omega. \end{aligned}$$

按照(28.18)，$\frac{1}{i\omega}\bar{\psi}(\omega)$是下面这个不定积分

$$\Psi(x)=\int_{x_0}^{x}\psi(\xi)d\xi \text{ (}x_0\text{是积分常数)}$$

的傅里叶变换式 $\overline{\Psi}(\omega)$。因此，

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]$$

$$+\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty}[\overline{\Psi}(\omega)e^{i\omega at}]e^{i\omega x}d\omega$$
$$-\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty}[\overline{\Psi}(\omega)e^{-i\omega at}]e^{i\omega x}d\omega.$$

根据傅里叶变换的延迟定理，上式即

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}[\Psi(x+at)-\Psi(x-at)]$$

$$=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi.$$

这正是达朗伯公式(34.6)。

例2　求解一维无界空间中的扩散问题即

$$u_t-a^2u_{xx}=0,$$

$$u]_{t=0}=\varphi(x).$$

解　以分离变数形式的试探解

$$u(x,t)=X(x)T(t)$$

代入泛定方程，得

$$XT'-a^2X''T=0.$$

用 a^2XT 遍除各项即得

$$\frac{T'}{a^2T}=\frac{X''}{X}.$$

两边分别是时间 t 和坐标 x 的函数，不可能相等，除非两边实际上是同一个常数。把这个常数记作$-\omega^2$，

$$\frac{T'}{a^2T}=\frac{X''}{X}=-\omega^2.$$

这可分解为关于T和关于X的常微分方程

$$T'+\omega^2a^2T=0,$$

$$X''+\omega^2X=0.$$

从这两个方程解得

$$X=Ce^{i\omega x},\quad T=Ae^{-\omega^2a^2t}.$$

所以分离变数形式的解是

$$u(x,t;\omega)=A(\omega)e^{-\omega^2a^2t}e^{i\omega x},$$

式中ω可取任意的实数值。一般解是线性叠加即积分

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}A(\omega)e^{-\omega^2a^2t}e^{i\omega x}d\omega.$$

为了确定$A(\omega)$，把上式代入初始条件，得

$$\int_{-\infty}^{\infty}A(\omega)e^{i\omega x}d\omega=\varphi(x).$$

左边是傅里叶积分，这提示我们把右边的$\varphi(x)$也展为傅里叶积分，然后把两边加以比较，知$A(\omega)$正是$\varphi(x)$的傅里叶变换式，

$$A(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{-i\omega\xi}d\xi.$$

这样，所求的解是

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\omega^2a^2t}e^{i\omega(x-\xi)}d\omega\right]d\xi.$$

引用定积分公式$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha^2\omega^2}e^{\beta\omega}d\omega=\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}e^{\beta^2/4\alpha^2}$［参看附录七的（二）］，可把所求的解表为

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\left[\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\right]d\xi.$$

例3　限定源扩散。半导体扩散工艺的硼、磷扩散是慢扩散，杂质扩散深度远远小于硅片厚度。研究杂质穿过硅片的一面向里

扩散问题时，完全可以不管另一面的存在，把硅片看作无限厚，虽然实际上还不到一毫米厚。这就是说，把硅片的内部当作半无界空间。在限定源扩散中，是只让硅片表层已有的杂质向硅片内部扩散，但不让新的杂质穿过硅片表面进入硅片。这里，所求解的是半无界空间 $x>0$ 中的定解问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, \\ u_x|_{x=0} = 0, \\ u|_{t=0} = \Phi_0 \delta(x-0) \quad (x>0), \end{cases}$$

其中 Φ_0 是每单位面积硅片表层原有的杂质总量。

解 没有杂质穿过硅片表面即 $u_x|_{x=0}=0$ 是第二类齐次边界条件。读者已经熟悉，这种边界条件意味着偶延拓，即求解无界空间中的定解问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, \\ u|_{t=0} = \begin{cases} \Phi_0 \delta(x-0) & (x>0), \\ \Phi_0 \delta(x+0) & (x<0). \end{cases} \end{cases}$$

这个初始条件其实也就是 $u|_{t=0}=2\Phi_0\delta(x)$. 这样，问题成为

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, \\ u|_{t=0} = 2\Phi_0 \delta(x). \end{cases}$$

引用例 2 的结果，得到答案

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} 2\Phi_0 \delta(\xi) \left[\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \right] d\xi \\ &= \frac{\Phi_0}{2a\sqrt{t}} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2/(4a^2 t)}. \end{aligned}$$

高斯函数 $\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2/4a^2 t}$ 的数值有表格可查，参看附录八。

图 66 描画了杂质浓度 $u(x,t)$ 在硅片中的分布情况。曲线 1 对应于某个较早时刻，曲线 2, 3, 4 依次对应于越来越迟的时刻。杂质浓度趋于均匀的趋势很明显。每根曲线下的面积都等于 Φ_0，这

反映了杂质总量不变。每根曲线在跟纵轴相交处的切线都是水平的，即硅片表面的浓度梯度为零，这反映了没有新的杂质进入硅片。

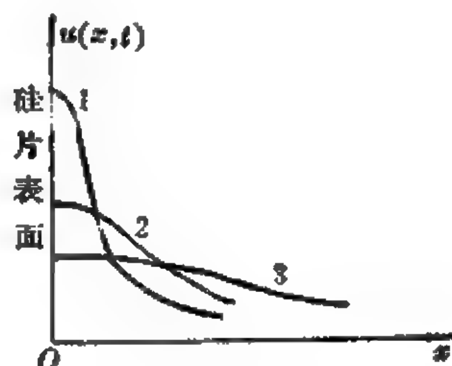


图 66

例 4　恒定表面浓度扩散。 在恒定表面浓度扩散中，包围硅片的气体中含有大量杂质原子，它们源源不断穿过硅片表面并向硅片内部扩散。由于气体中杂质原子供应充分，硅片表面杂质浓度得以保持某个常数 N_0. 这里，所求解的是半无界空间 $x>0$ 中的定解问题

$$u_t-a^2u_{xx}=0,$$

$$u|_{x=0}=N_0,$$

$$u|_{t=0}=0.$$

解　首先应把非齐次边界条件化为齐次的。为此，令

$$u(x,t)=N_0+w(x,t),$$

就把 u 的定解问题转化为 w 的定解问题

$$\begin{cases}w_t-a^2w_{xx}=0,\\ w|_{x=0}=u|_{x=0}-N_0=0,\\ w|_{t=0}=u|_{t=0}-N_0=-N_0.\end{cases}$$

这里是第一类齐次边界条件。读者已经熟悉，这种边界条件意味着奇延拓，即求解无界空间中的定解问题

$$w_t-a^2w_{xx}=0,$$

$$w|_{t=0}=\begin{cases}-N_0 & (x>0),\\ +N_0 & (x<0).\end{cases}$$

引用例 2 的结果，得到答案

$$w(x,t)=\int_{-\infty}^{0} N_0 \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi - \int_{0}^{\infty} N_0 \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi$$

在右边第一个积分中令 $z=(x-\xi)/2a\sqrt{t}$, $dz=-d\xi/2a\sqrt{t}$；在右边第二个积分中令 $z=(\xi-x)/2a\sqrt{t}$, $dz=d\xi/2a\sqrt{t}$. 于是,

$$w(x,t)=-\frac{N_0}{\sqrt{\pi}}\int_{\infty}^{x/2a\sqrt{t}} e^{-z^2}dz-\frac{N_0}{\sqrt{\pi}}\int_{-x/2a\sqrt{t}}^{\infty} e^{-z^2}dz$$

$$=-\frac{N_0}{\sqrt{\pi}}\int_{-x/2a\sqrt{t}}^{x/2a\sqrt{t}} e^{-z^2}dz.$$

由于被积函数是偶函数，所以

$$w(x,t)=-N_0\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{x/2a\sqrt{t}} e^{-z^2}dz.$$

通常把 $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-z^2}dz$ 叫作误差函数，记作 $\text{erf}\,x$，它的数值有表格可查，参看附录八。这样，

$$w(x,t)=-N_0\text{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right),$$

所求的解

$$u(x,t)=N_0+w(x,t)=N_0\left[1-\text{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right].$$

$1-\text{erf}\,x$ 叫作余误差函数 (error function complement)，记作 $\text{erfc}\,x$. 这样，

$$u(x,t)=N_0\text{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right).$$

图 67 描画了杂质浓度 $u(x,t)$ 在硅片中分布情况。曲线 1 对应于某个较早时刻，曲线 2 对应于较迟时刻，曲线 3 对应于又迟一些的时刻。杂质浓度趋于均匀的趋势很明显。如果扩散持续进行下去，浓度分布最终将为常

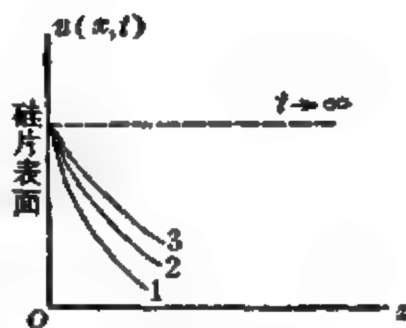


图 67

数 N_0，如图中虚线所示。

例 5 地球表面的温度经常作周期性变化(年变化、日变化)。由于热传导，地面以下的温度亦必随着作周期变化。自地球形成以来，几十亿年已经成为过去。天长日久，地球初始温度分布对这里讨论的问题来说，实际上已没有意义。因此，这是没有初始条件的问题。

为简单起见，把地面看成平面，地球深度当作无限，把地表温度的年变或日变当作谐变化 $A\cos\omega t$。问题是在半无界空间 $x>0$ 中求解

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0,$$
$$u|_{x=0} = Ae^{i\omega t}.$$

为了计算的方便，边界条件中的$A\cos\omega t$ 即 $A\mathrm{Re}e^{i\omega t}$ 写成了 $Ae^{i\omega t}$，这就必须约定，在算出的最后结果中也应取它的实部。

解 可以预计各处温度都作同一频率的周期变化。这是说，地面下的温度 $u(x, t)$可以表为

$$u(x, t) = X(x)e^{i\omega t}.$$

把上式代人泛定方程得到常微分方程

$$a^2X'' - i\omega X = 0.$$

这个常微分方程的解为

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{\frac{\omega}{a^2}}\sqrt{i}x} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{a^2}}\sqrt{i}x},$$

其中

$$\sqrt{i} = \sqrt{e^{i\pi/2}} = e^{i\pi/4} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}},$$

所以

$$X(x) = C_1 e^{x\sqrt{\omega/2a^2}}\ e^{ix\sqrt{\omega/2a^2}} + C_2 e^{-x\sqrt{\omega/2a^2}}\ e^{-ix\sqrt{\omega/2a^2}}.$$

于$x\to\infty$，上式右边第一项 $\to\infty$，可见这项应排除，换句话说，应取

$C_1=0$. 于是,

$$u(x,t)=C_2 e^{-x\sqrt{\omega/2a^2}}\ e^{-ix\sqrt{\omega/2a^2}+i\omega t}.$$

由边界条件 $u|_{x=0}=Ae^{i\omega t}$ 知 $C_2=A$. 这样,

$$u(x,t)=Ae^{-x\sqrt{\omega/2a^2}}\ e^{i(\omega t-x\sqrt{\omega/2a^2})}.$$

取实部,

$$u(x,t)=Ae^{-x\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}}\cos\left(\omega t-x\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}\right).$$

从这个答案可以看到: ①地面下温度变化幅度随深度 x 的增加而依指数律 $e^{-x\sqrt{\omega/2a^2}}$ 变小。②幅度变小的指数律跟周期有关。温度变化周期越短,幅度随深度变小得越快。根据实测的 k, c 和 ρ 推算, 深度每增加一米, 年变幅度几乎降为一半。日变幅度的变小还要快 19.1 ($=\sqrt{365}$)倍, 大约每深五厘米, 幅度就降为一半。③地面下温度变化周相 $\omega t-x\sqrt{\omega/2a^2}$ 随深度 x 的增加而滞后。例如,对年变化而言,深度每增加八米, 周相就差 180°。地面上夏天酷热的时候,八米深处却恰为那里最冷的时候。不过,八米深处的温度变化幅度只有地面的 $1/2^8$ 即 1/256。

例 6 泊松公式。求解三维无界空间中的波动问题

$$u_{tt}-a^2\Delta_3 u=0, \tag{38.1}$$

$$u|_{t=0}=\varphi(x,y,z),\ \ u_t|_{t=0}=\psi(x,y,z). \tag{38.2}$$

解 例 1 解出一维无界空间中的波动问题, 该例的分离变数法实质上就是对自变数 x 展开为傅里叶积分。本例是三维空间,因而应当对 x, y 和 z 三个自变数展开为三重傅里叶积分,

$$u(x,y,z,t)=\iiint_{-\infty}^{\infty} v(t;k_1,k_2,k_3)e^{i(k_1x+k_2y+k_3z)}dk_1dk_2dk_3. \tag{38.3}$$

引用三个坐标轴方向的单位矢量 $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$ 和 $\boldsymbol{i}_3$,以及矢量

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}_1x+\boldsymbol{i}_2y+\boldsymbol{i}_3z,\ \ \boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}_1k_1+\boldsymbol{i}_2k_2+\boldsymbol{i}_3k_3,$$

可把(38.3)简写为

$$u(\boldsymbol{r},t)=\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}T(t;\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}dk_1dk_2dk_3. \tag{38.4}$$

把(38.4)代入泛定方程(38.1)，得

$$\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}[T''+k^2a^2T]e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}dk_1dk_2dk_3=0\ \ (k^2=k_1^2+k_2^2+k_3^2),$$

由此分离出T的常微分方程

$$T''+k^2a^2T=0,$$

它的解是

$$T(t;\boldsymbol{k})=A(\boldsymbol{k})e^{ikat}+B(\boldsymbol{k})e^{-ikat}.$$

把这代回(38.4)，得到解的一般形式

$$u(\boldsymbol{r},t)=\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}[A(\boldsymbol{k})e^{ikat}+B(\boldsymbol{k})e^{-ikat}]e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}dk_1dk_2dk_3. \tag{38.5}$$

为了确定 $A(\boldsymbol{k})$和 $B(\boldsymbol{k})$，把(38.5)代入初始条件(38.2)，

$$\begin{cases}\displaystyle\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}[A(\boldsymbol{k})+B(\boldsymbol{k})]e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}dk_1dk_2dk_3=\varphi(\boldsymbol{r}),\\ \displaystyle\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}ika[A(\boldsymbol{k})-B(\boldsymbol{k})]e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}dk_1dk_2dk_3=\psi(\boldsymbol{r}).\end{cases}$$

左边的三重傅里叶积分提示把右边也展开为三重傅里叶积分然后加以比较。由此得到

$$\begin{cases}A(\boldsymbol{k})+B(\boldsymbol{k})=\Phi(\boldsymbol{k}),\\ A(\boldsymbol{k})-B(\boldsymbol{k})=\dfrac{1}{ika}\Psi(\boldsymbol{k}),\end{cases} \tag{38.6}$$

其中$\Phi(\boldsymbol{k})$和$\Psi(\boldsymbol{k})$分别是 $\varphi(\boldsymbol{r})$和 $\psi(\boldsymbol{r})$的三重傅里叶变换式，

$$\begin{cases}\Phi(\boldsymbol{k})=\dfrac{1}{(2\pi)^3}\displaystyle\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\boldsymbol{r}')e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'}dx'dy'dz',\\ \Psi(\boldsymbol{k})=\dfrac{1}{(2\pi)^3}\displaystyle\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(\boldsymbol{r}')e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'}dx'dy'dz'.\end{cases} \tag{38.7}$$

从(38.6)解出 $A(k)$和 $B(k)$,

$$\begin{cases} A(k)=\frac{1}{2}\Phi(k)+\frac{1}{2a}\frac{1}{ik}\Psi(k), \\ B(k)=\frac{1}{2}\Phi(k)-\frac{1}{2a}\frac{1}{ik}\Psi(k). \end{cases}$$

把这代回(38.5),得到解答

$$u(r,t)=\iiint_{-\infty}^{\infty}\Big[\Phi(k)\frac{1}{2}(e^{ikat}+e^{-ikat})$$

$$+\Psi(k)\frac{1}{2a}\frac{1}{ik}(e^{ikat}-e^{-ikat})\Big]e^{ik\cdot r}dk_1dk_2dk_3.$$

以(38.7)代人上式,

$$u(r,t)=\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{4\pi a}\varphi(r')$$

$$\times\left[\frac{a}{4\pi^2}\iiint_{-\infty}^{\infty}(e^{ikat}+e^{-ikat})e^{ik\cdot(r-r')}dk_1dk_2dk_3\right]dx'dy'dz'$$

$$+\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{4\pi a}\psi(r')$$

$$\times\left[\frac{1}{4\pi^2}\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{ik}(e^{ikat}-e^{-ikat})e^{ik\cdot(r-r')}dk_1dk_2dk_3\right]$$

$$\times dx'dy'dz'. \qquad (38.8)$$

参照附录七的定积分公式(三)和(四),

$$\frac{a}{4\pi^2}\iiint_{-\infty}^{\infty}(e^{ikat}+e^{-ikat})e^{ik\cdot(r-r')}dk_1dk_2dk_3$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{|r-r'|}[\delta(|r-r'|-at)-\delta(|r-r'|+at)]\right\},$$

$$\frac{1}{4\pi^2}\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{ik}(e^{ikat}-e^{-ikat})e^{ik\cdot(r-r')}dk_1dk_2dk_3$$

$$=\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}[\delta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-at)-\delta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|+at)],$$

于是(38.8)成为

$$u(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}[\delta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-at)$$

$$-\delta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|+at)]dx'dy'dz'$$

$$+\frac{1}{4\pi a}\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}[\delta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-at)$$

$$-\delta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|+at)]dx'dy'dz'. \qquad (38.9)$$

本例是从初始状况推算以后的状况（不是反推以前的状况），t 是正的，而 $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$ 又是正的，所以 $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|+at$ 不可能为零，从而(38.9)里的 $\delta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|+at)$ 项应该舍去，

$$u(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-at)dx'dy'dz'$$

$$+\frac{1}{4\pi a}\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-at)dx'dy'dz'.$$

由于被积式中出现 $\delta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-at)$，对 $\boldsymbol{r}'$ 的积分只需在球面 $S_{at}^{\boldsymbol{r}}$ 上进行，$S_{at}^{\boldsymbol{r}}$ 以点 $\boldsymbol{r}$（确切地说，矢径为 $\boldsymbol{r}$ 的点）为球心而半径为 at.

$$u(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint_{S_{at}^{\boldsymbol{r}}}\frac{\varphi(\boldsymbol{r}')}{at}dS'+\frac{1}{4\pi a}\iint_{S_{at}^{\boldsymbol{r}}}\frac{\psi(\boldsymbol{r}')}{at}dS', \qquad (38.10)$$

式中 dS' 是球面 $S_{at}^{\boldsymbol{r}}$ 的面积元。答案(38.10)叫作**泊松公式**。

三维无界空间中的波动，只要知道它的初始状况，用泊松公式可以推算它在以后任一时刻的状况。具体地说，为求时刻 t 在点 $\boldsymbol{r}$ 的 $u(\boldsymbol{r},t)$，应以点 $\boldsymbol{r}$ 为球心，以 at 为半径作球面 $S_{at}^{\boldsymbol{r}}$，然后拿初始扰动 $\varphi(\boldsymbol{r}')$ 和 $\psi(\boldsymbol{r}')$ 按(38.10)在球面 $S_{at}^{\boldsymbol{r}}$ 上积分。这是可以理解的，既然波动以速度 a 传播，只有跟点 $\boldsymbol{r}$ 相距 at 的那些点（即 $S_{at}^{\boldsymbol{r}}$ 上的

点)的初始扰动恰好在时刻 t 传到点 r.

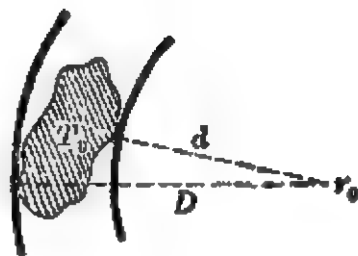


图 68

为明显起见，设初始扰动只限于区域 T_0. 取定一点 r,它与 T_0 最小距离是 d, 最大距离是 D. 当 $t<d/a$, S_{at}^r 跟 T_0 不相交，按泊松公式，$u(r,\ t)=0$, 这表示扰动的前锋尚未到达点 r. 当 $d/a<t<D/a$, S_{at}^r 跟 T_0 相交，$u(r,t)\neq 0$, 这表示扰动已到达点 r. 当 $t>D/a$, S_{at}^r 包围了 T_0 但跟 T_0 不相交，$u(r,t)=0$, 这表示扰动的阵尾已经过去。

例 7 求解二维无界空间中的波动问题

$$u_{tt}-a^2\Delta_2 u=0,$$

$$u|_{t=0}=\varphi(x,y),\ \ u_t|_{t=0}=\psi(x,y).$$

解 当然可以象例 6 那样用分离变数 (傅里叶积分) 法求解。不过，我们知道，所谓二维空间即 xy 平面的波动其实还是三维空间中的波动，只是这波动跟坐标 z 无关而已。这样说来，二维无界空间中的波动问题的解也由泊松公式 (38.10) 给出。但既然问题跟坐标 z 无关，当然不希望泊松公式中出现 z. 三维波动的泊松公式，消除了坐标 z,就成为二维波动的公式，这叫作降维法。

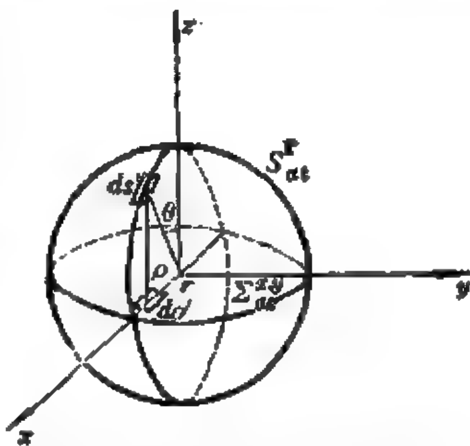


图 69

对于二维问题，球面 S_{at}^r 上的积分应代之以 xy 平面的圆 Σ_{at}^{xy} 上的积分。参看图 69, Σ_{at}^{xy} 上的面积元

$$d\sigma'=dS'\cos\theta=dS'\frac{\sqrt{a^2t^2-\rho^2}}{at}$$

$$=dS'\frac{\sqrt{a^2t^2-(x'-x)^2-(y'-y)^2}}{at},$$

即

$$dS'=d\sigma'\frac{at}{\sqrt{a^2t^2-(x'-x)^2-(y'-y)^2}}.$$

又，球面 S_{at}^{r} 的上下两半都投影于同一圆，所以

$$2dS'=2d\sigma'\frac{at}{\sqrt{a^2t^2-(x'-x)^2-(y'-y)^2}}.$$

于是，泊松公式在二维问题中成为

$$u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{\Sigma_{at}^{x,y}}\frac{\varphi(x',y')}{\sqrt{a^2t^2-(x'-x)^2-(y'-y)^2}}dx'dy'$$
$$+\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{\Sigma_{at}^{x,y}}\frac{\psi(x',y')}{\sqrt{a^2t^2-(x'-x)^2-(y'-y)^2}}dx'dy'.$$

(38.11)

注意二维波动有所谓后效。把图 68 当作二维的图来看只要 $t>d/a$，$\Sigma_{at}^{x,y}$ 跟 T_0 总是有重叠部分，$u(x,y,t)\neq 0$，永远谈不上阵尾过去。把二维波动看作是某种三维波动的横剖面就不难理解这种后效。

习　题

1. 求解无限长传输线上的电振荡传播问题。$G:C=R:L$ 的情况跟 $G:C\neq R:L$ 的情况有什么不同？

2. 研究半无限长细杆导热问题。杆端 $x=0$ 温度保持为零。初始温度分布为 $K(e^{-kx}-1)$。

3. 半无界杆，杆端 $x=0$ 有谐变热流 $B\sin\omega t$ 进入，求长时间以后的杆上温度分布 $u(x,t)$。

4. 应用泊松公式计算下述定解问题的解。$u_{tt}-a^2\Delta u=0$，初始速度为零，初始位移在某个单位球内为 1，在球外为零。

5. 应用泊松公式计算下述定解问题的解。$u_{tt}-a^2\Delta u=0$，初始速度为零，初始位移在球 $r=r_0$ 以内为$A\cos(\pi r/2r_0)$，在球外为零。

6. 二维波动，初始速度为零，初始位移在圆 $\rho=1$ 以内为 1，在圆外为零。试求 $u|_{\rho=0}$。

7. 求解三维无界空间中的输运问题 $u_t-a^2\Delta u=0, u|_{t=0}=\varphi(x,y,z)$。

8. 例 6 研究三维无界空间中的自由振动是从初始($t=0$)状况推算以后($t>0$)的状况。试重新求解例 6，从初始状况反推以前($t<0$)的状况。

§39. 非齐次的泛定方程

跟 §37 一样，可以认为初始条件的数值为零。

(一) 冲量定理法

§37 的冲量定理法，几乎无需作什么修改，就可应用于无界空间。

例 1 求解一维无界空间中的受迫振动

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t),\\ u|_{t=0}=0,\quad u_t|_{t=0}=0.\end{cases}$$

解 从时刻零一直延续到时刻 t 的$f(x,t)$可以看作许许多多前后相继的瞬时的$f(x,\tau)\delta(t-\tau)d\tau$的叠加，从而所求的解$u(x,t)$可以看作是瞬时的 $f(x,\tau)\delta(t-\tau)d\tau$ 所引起的振动 $v(x,t;\tau)d\tau$ 的叠加，即

$$u(x,t)=\int_0^t v(x,t;\tau)d\tau,$$

而 $v(x,t;\tau)$的定解问题是

$$\begin{cases}v_{tt}-a^2v_{xx}=f(x,\tau)\delta(t-\tau),\\ v|_{t=0}=0,\quad v_t|_{t=0}=0.\end{cases}$$

瞬时的 $f(x,\tau)\delta(t-\tau)d\tau$ 在时刻 $\tau+0$ 以后不再起作用。改用 $\tau+0$ 作为初始时刻，问题成为自由振动，但初始条件要相应地

修改。这样，

$$\begin{cases}v_{tt}-a^2v_{xx}=0,\\ v|_{t=\tau+0}=0,\quad v_t|_{t=\tau+0}=f(x,\tau).\end{cases}$$

这个定解问题的解由达朗伯公式(34.6)给出，只是(34.6)的 t 在这里应换为 $t-\tau$，

$$v(x,t;\tau)=\frac{1}{2a}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi,$$

从而所求的解

$$u(x,t)=\int_0^t v(x,t;\tau)d\tau=\int_{\tau=0}^{t}\int_{\xi=x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}\frac{1}{2a}f(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

请读者从物理上阐释对 ξ 的积分为什么是从 $x-a(t-\tau)$ 到 $x+a(t-\tau)$。

例2 求解一维无界空间的有源输运问题

$$\begin{cases}u_t-a^2u_{xx}=f(x,t),\\ u|_{t=0}=0.\end{cases}$$

解 从时刻零一直延续到时刻 t 的源 $f(x,t)$ 可以看作许许多多前后相继的瞬时源 $f(x,\tau)\delta(t-\tau)d\tau$ 的叠加，从而所求的解可以看作是瞬时源 $f(x,\tau)\delta(t-\tau)d\tau$ 所引起的输运 $v(x,t;\tau)d\tau$ 的叠加，即

$$u(x,t)=\int_0^t v(x,t;\tau)d\tau,$$

而 $v(x,t;\tau)$的定解问题是

$$\begin{cases}v_t-a^2v_{xx}=f(x,\tau)\delta(t-\tau),\\ v|_{t=0}=0.\end{cases}$$

瞬时源 $f(x,\tau)\delta(t-\tau)d\tau$ 在时刻 $\tau+0$ 以后不再起作用。改用 $\tau+0$ 作为初始时刻，问题成为自由输运，但初始条件要相应地修改。这样，

$$\begin{cases} v_t - a^2 v_{xx} = 0, \\ v|_{t=\tau+0} = f(x,\tau). \end{cases}$$

这个定解问题已在§38 例2解出，只是那里的 t 在这里应换为 $t-\tau$，

$$v(x,t;\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\tau)\left[\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right] d\xi,$$

从而所求的解

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^t v(x,t;\tau)\, d\tau \\ &= \int_{\tau=0}^{t} \int_{\xi=-\infty}^{\infty} f(\xi,\tau)\left[\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right] d\xi\, d\tau. \end{aligned}$$

例3 **推迟势。**求解三维无界空间中的受迫振动

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = f(\boldsymbol{r},t), \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{39.1}$$

解 应用冲量定理法，

$$u(\boldsymbol{r},t) = \int_0^t v(\boldsymbol{r},t;\tau)\, d\tau,$$

$v(\boldsymbol{r},t;\tau)$ 的定解问题是

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 \Delta v = f(\boldsymbol{r},\tau)\delta(t-\tau), \\ v|_{t=0} = 0, \quad v_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

这个问题可以转化为

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 \Delta v = 0, \\ v|_{t=\tau+0} = 0, \quad v_t|_{t=\tau+0} = f(\boldsymbol{r},\tau). \end{cases}$$

这个问题的解由泊松公式(38.10)给出，只是(38.10)的 t 在这里应换为 $t-\tau$，

$$v(\boldsymbol{r},t;\tau) = \frac{1}{4\pi a} \iint\limits_{S^{\boldsymbol{r}}_{a(t-\tau)}} \frac{f(\boldsymbol{r}',\tau)}{a(t-\tau)} dS',$$

从而所求的解

$$u(\boldsymbol{r},t)=\int_0^t v(\boldsymbol{r},t;\tau)d\tau=\frac{1}{4\pi a}\int_0^t \iint\limits_{S^r_{a(t-\tau)}} \frac{f(\boldsymbol{r}',\tau)}{a(t-\tau)}dS'd\tau.$$

把积分球面 $S^r_{a(t-\tau)}$ 的半径 $|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|$ 即 $a(t-\tau)$ 记作 R，

$$a(t-\tau)=R,\ 即\ \tau=t-\frac{R}{a},$$

则

$$u(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi a}\int_{at}^0 \iint\limits_{S^r_R} \frac{f\left(\boldsymbol{r}',\ t-\dfrac{R}{a}\right)}{R}dS'\left(-\frac{1}{a}dR\right)$$

$$=\frac{1}{4\pi a^2}\int_0^{at} \iint\limits_{S^r_R} \frac{f\left(\boldsymbol{r}',\ t-\dfrac{R}{a}\right)}{R}dS'dR$$

$$=\frac{1}{4\pi a^2}\iiint\limits_{T^r_{at}} \frac{f\left(\boldsymbol{r}',\ t-\dfrac{R}{a}\right)}{R}dV', \tag{39.2}$$

式中 T^r_{at} 是球面 S^r_{at} 所包围的球体，dV' 是体积元 $dS'dR$. 值得注意的是 f 的宗量 t 换成了 $t-R/a$. 这是可以理解的。既然扰动以速度 a 传播，从点 $\boldsymbol{r}'$ 发出的扰动，如果在时刻 t 对点 $\boldsymbol{r}$ 产生影响，必然是在时刻 $t-R/a$ (R 是点 $\boldsymbol{r}$ 与点 $\boldsymbol{r}'$ 的距离)从点 $\boldsymbol{r}'$ 发出的。为了强调这种时间差别，通常把 $f(\boldsymbol{r},t-R/a)$ 记作 $[f]$. 于是，(39.2)又写成

$$u(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi a^2}\iiint\limits_{T^r_{at}} \frac{[f]}{R}dV'. \tag{39.3}$$

这叫作推迟势。

如果把泛定方程改写成

$$\frac{1}{a^2}u_{tt}-\Delta u=\frac{1}{a^2}f(\boldsymbol{r},t), \tag{39.4}$$

则推迟势随着改写为

$$u(r,t)=\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{T_{at}^{r}}\frac{[f/a^2]}{R}dV'. \tag{39.5}$$

这可以跟静电场比较。如果空间中分布着静电荷，其体密度为$\varepsilon_0\rho(r)$，则静电势

$$u(r)=\frac{1}{4\pi}\iiint\frac{\rho(r')}{R}dV', \tag{39.6}$$

它所满足的方程是泊松方程

$$-\Delta u=\rho(r). \tag{39.7}$$

（二）格林函数法

§37的格林函数法，几乎无需作什么修改，就可应用于无界空间。

例4 用格林函数法重解例1，即

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t),\\ u|_{t=0}=0,\quad u_t|_{t=0}=0.\end{cases}$$

解 把空间中连续而时间中持续的 $f(x,t)$ 看作是作用在鳞次栉比排列着的许许多多点上，而且是作用在前后相继的许许多多瞬时，即

$$f(x,t)=\int_{\tau=0}^{t}\int_{\xi=-\infty}^{\infty}f(\xi,\tau)\delta(x-\xi)\delta(t-\tau)d\xi d\tau.$$

则所求的解

$$u(x,t)=\int_{\tau=0}^{t}\int_{\xi=-\infty}^{\infty}f(\xi,\tau)G(x,t;\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

而格林函数 G 的定解问题是

$$\begin{cases}G_{tt}-a^2G_{xx}=\delta(x-\xi)\delta(t-\tau),\\ G|_{t=0}=0,\quad G_t|_{t=0}=0.\end{cases}$$

G 的定解问题可以转化为

$$\begin{cases}G_{tt}-a^2G_{xx}=0,\\ G|_{t=\tau+0}=0,\quad G_t|_{t=\tau+0}=\delta(x-\xi).\end{cases}$$

这个定解问题的解由达朗伯公式(34.6)给出，只是 (34.6)的 t 在这里应换为 $t-\tau$,

$$G(x,t;\xi,\tau)=\frac{1}{2a}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}\delta(\xi_0-\xi)d\xi_0$$

$$=\begin{cases}0 & [\text{如 } \xi<x-a(t-\tau)\text{ 或 } x+a(t-\tau)<\xi],\\ \dfrac{1}{2a} & [\text{如 } x-a(t-\tau)<\xi<x+a(t-\tau)].\end{cases}$$

从而所求的解

$$u(x,t)=\int_{\tau=0}^{t}\int_{\xi=x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}\frac{1}{2a}f(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

例 5 用格林函数法重解例 2，即

$$\begin{cases}u_t-a^2u_{xx}=f(x,t),\\ u|_{t=0}=0.\end{cases}$$

解 把 $f(x,t)$ 看作是作用于 ξ 点和 τ 时刻的

$$f(\xi,\tau)\delta(x-\xi)\delta(t-\tau)d\xi d\tau$$

的叠加，即

$$f(x,t)=\int_{\tau=0}^{t}\int_{\xi=-\infty}^{\infty}f(\xi,\tau)\delta(x-\xi)\delta(t-\tau)d\xi d\tau,$$

则所求的解

$$u(x,t)=\int_{\tau=0}^{t}\int_{\xi=-\infty}^{\infty}f(\xi,\tau)G(x,t;\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

而格林函数 G 的定解问题是

$$\begin{cases}G_t-a^2G_{xx}=\delta(x-\xi)\delta(t-\tau),\\ G|_{t=0}=0.\end{cases}$$

G 的定解问题可以转化为

$$\begin{cases}G_t-a^2G_{xx}=0,\\ G|_{t=\tau}=\delta(x-\xi).\end{cases}$$

这个定解问题的解由§38例2给出，只是那里的 t 在这里应换为 $t-\tau$. 于是，得到无界空间输运问题的格林函数

$$G(x,t;\xi,\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x_0-\xi)\left[\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]dx_0$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-(x-\xi)^2/4a^2(t-\tau)}.$$

从而所求的解

$$u(x,t)=\int_{\tau=0}^{t}\int_{\xi=-\infty}^{\infty}f(\xi,\tau)\left[\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\xi d\tau.$$

图70描画了一系列给定时刻的格林函数 $G(x,t;\xi,\tau)$，图中所注的 θ 指 $a^2(t-\tau)$，实际上就代表着时间。这些都是高斯函数曲线，点热源所在处 $(x-\xi=0)$ 温度取峰值。对于较早的时刻（θ 较小），峰较高而两侧较陡。时间越迟，峰越低而两侧越平缓。值得惊异的是，不论距离点热源多远（不论 $|x-\xi|$ 多大），瞬时热源刚刚作用之后（t 刚刚超过 τ），温度就不为零（$G\neq0$）。这是说，热竟然“瞬时地”传到一切地点，传播速度竟然是无限大。但无限大

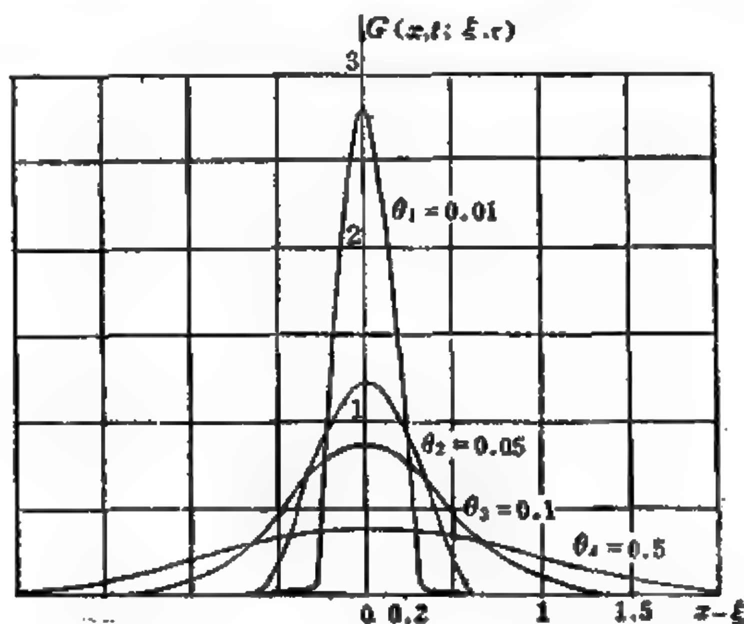


图 70

的传播速度是不可能的。问题出在哪里？原来，导出热传导方程所根据的热传导定律 $q=-k\nabla u$（或者，导出扩散方程所根据的扩散定律 $q=-D\nabla u$）是一种统计规律，完全没有考虑分子运动的惯性，而正是这惯性使传播速度不能无限大。不过，只要 $t-\tau$ 不是很小，统计规律已起作用，所求得的解在物理上还是成立的。

例 6 求解一维半无界空间 $x>0$ 的有源输运问题，第一类齐次边界条件，

$$\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}=f(x,t) \quad (x>0), \\ u|_{x=0}=0, \\ u|_{t=0}=0. \end{cases}$$

解 因为是第一类齐次边界条件，应该奇延拓到 $x<0$ 的半空间中去。于是，

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=\begin{cases} f(x,t) & (x>0), \\ -f(-x,t) & (x<0), \end{cases} \\ u|_{t=0}=0. \end{cases}$$

引用例 5 的结果，得

$$u(x,t)=\int_{\tau=0}^{t}\int_{\xi=-\infty}^{0}-f(-\xi,\tau)\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi d\tau$$
$$+\int_{\tau=0}^{t}\int_{\xi=0}^{\infty}f(\xi,\tau)\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi d\tau. \quad (39.8)$$

在(39.8)右边第一个积分中，令 $\xi=-x_0$，则这个积分

$$=\int_{\tau=0}^{t}\int_{x_0=\infty}^{0}-f(x_0,\tau)\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(x+x_0)^2}{4a^2(t-\tau)}}(-dx_0)d\tau.$$

定积分的值跟积分变数无关，所以又可把积分变数 x_0 全部改写为 ξ，则这第一个积分

$$=-\int_{\tau=0}^{t}\int_{\xi=0}^{\infty}f(\xi,\tau)\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi d\tau.$$

这样，(39.8)成为

$$u(x,t)=\int_{\tau=0}^{t}\int_{\xi=0}^{\infty} f(\xi,\tau)\left[\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\right.$$

$$\left.\times\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right)\right]d\xi d\tau. \qquad (39.9)$$

(39.9)的[ ]里可说就是第一类齐次边界条件下，一维半无界空间 $x>0$ 中的输运问题的格林函数 $G(x,t;\xi,\tau)$,

$$G(x,t;\xi,\tau)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right). \quad (39.10)$$

例7 求解一维半无界空间 $x>0$ 的有源输运问题，第二类齐次边界条件，

$$\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}=f(x,t) & (x>0),\\ u_x|_{x=0}=0, \\ u|_{t=0}=0. \end{cases}$$

解 因为是第二类齐次边界条件，应该偶延拓到 $x<0$ 的半空间中去。于是，

$$\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}=\begin{cases} f(x,t) & (x>0),\\ f(-x,t) & (x<0),\end{cases}\\ u|_{t=0}=0. \end{cases}$$

引用例5的结果，得

$$u(x,t)=\int_{\tau=0}^{t}\int_{\xi=-\infty}^{0} f(-\xi,\tau)\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi d\tau$$

$$+\int_{\tau=0}^{t}\int_{\xi=0}^{\infty} f(\xi,\tau)\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi d\tau. \qquad (39.11)$$

在(39.11)右边第一个积分中，令 $\xi=-x_0$，再把 x_0 改记作 ξ，则(39.11)成为

$$u(x,t)=\int_{\tau=0}^{t}\int_{\xi=0}^{\infty} f(\xi,\tau)\left[\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\right.$$

$$\left.\times\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right)\right]d\xi d\tau. \qquad (39.12)$$

(39.12)的[ ]里可说就是第二类齐次边界条件下，一维半无界空间 $x>0$ 中的输运问题的格林函数 $G(x,t;\xi,\tau)$，

$$G(x,t;\xi,\tau)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right). \quad (39.13)$$

（三）傅里叶积分法

跟齐次泛定方程的定解问题一样，非齐次泛定方程的定解问题也可用傅里叶积分法求解。

例8 用傅里叶积分法重解例1，即一维无界空间中的受迫振动

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t),\\ u|_{t=0}=0,\quad u_t|_{t=0}=0.\end{cases}$$

解 试把所求的解展开为傅里叶积分

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}T(t;\omega)e^{i\omega x}d\omega.$$

把它代入泛定方程和初始条件，

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}[T''+\omega^2a^2T]e^{i\omega x}d\omega=f(x,t),\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}T(0;\omega)e^{i\omega x}d\omega=0,\ \int_{-\infty}^{\infty}T'(0;\omega)e^{i\omega x}d\omega=0.\end{cases}$$

把右边的 $f(x,t)$ 也展开为傅里叶积分，然后比较两边，就分离出关于 $T(t;\omega)$ 的常微分方程和初始条件

$$\begin{cases}T''+\omega^2a^2T=\bar{f}(\omega,t),\\ T(0;\omega)=0,\quad T'(0;\omega)=0,\end{cases}$$

其中 $\bar{f}(\omega,t)$ 是 $f(x,t)$ 的傅里叶变换式。这个常微分方程在所给初始条件下的解是(参看§23 习题7的答案)

$$T(t;\omega)=\frac{1}{2ai\omega}\int_0^t\bar{f}(\omega,\tau)[e^{i\omega a(t-\tau)}-e^{-i\omega a(t-\tau)}]d\tau.$$

于是，所求的解

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{i\omega}\bar{f}(\omega,\tau)e^{i\omega a(t-\tau)}\right]e^{i\omega x}d\omega d\tau$$

$$-\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{i\omega}\bar{f}(\omega,\tau)e^{-i\omega a(t-\tau)}\right]e^{i\omega x}d\omega d\tau.$$

按照(28.18)，$\frac{1}{i\omega}\bar{f}(\omega,\tau)$是下面这个不定积分

$$F(x,\tau)=\int_{x_0}^{x}f(\xi,\tau)d\xi \quad (x_0\text{是积分常数})$$

的傅里叶变换式 $\bar{F}(\omega,\tau)$. 因此，

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}[\bar{F}(\omega,\tau)e^{i\omega a(t-\tau)}]e^{i\omega x}d\omega d\tau$$

$$-\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}[\bar{F}(\omega,\tau)e^{-i\omega a(t-\tau)}]e^{i\omega x}d\omega d\tau.$$

根据傅里叶变换的延迟定理，上式即

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t F(x+a(t-\tau),\tau)d\tau-\frac{1}{2a}\int_0^t F(x-a(t-\tau),\tau)d\tau$$

$$=\frac{1}{2a}\int_0^t[F(x+a(t-\tau),\tau)-F(x-a(t-\tau),\tau)]d\tau$$

$$=\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

例 9 用傅里叶积分法重解例 2，即一维无界空间的有源输运问题

$$\begin{cases}u_t-a^2u_{xx}=f(x,t),\\ u|_{t=0}=0.\end{cases}$$

解 试把所求的解展开为傅里叶积分

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}T(t;\omega)e^{i\omega x}d\omega.$$

把它代入泛定方程和初始条件，

$$\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}[T'+\omega^2a^2T]e^{i\omega x}d\omega=f(x,t),\\ \int_{-\infty}^{\infty}T(0;\omega)e^{i\omega x}d\omega=0.\end{cases}$$

把右边的 $f(x,t)$ 也展开为傅里叶积分，然后比较两边，就分离出关于 $T(t;\omega)$ 的常微分方程和初始条件

$$\begin{cases}T'+\omega^2a^2T=\bar{f}(\omega,t),\\T(0;\omega)=0.\end{cases}$$

其中 $\bar{f}(\omega,t)$ 是 $f(x,t)$ 的傅里叶变换式

$$\bar{f}(\omega,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi,t)e^{-i\omega\xi}d\xi.$$

$T(t;\omega)$ 的常微分方程在所给初始条件下的解是（参看§23习题8的答案）

$$T(t;\omega)=\int_0^t e^{-\omega^2a^2(t-\tau)}\bar{f}(\omega,\tau)d\tau.$$

于是所求的解

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\bar{f}(\omega,\tau)e^{-\omega^2a^2(t-\tau)}e^{i\omega x}d\omega d\tau\\&=\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi,\tau)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\omega^2a^2(t-\tau)}e^{i\omega(x-\xi)}d\,\omega d\xi d\tau.\end{aligned}$$

引用定积分公式 $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\omega^2\alpha^2}e^{\beta\omega}d\omega=\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}e^{\beta^2/4\alpha^2}$[参看附录七的(二)]，

$$u(x,t)=\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi,\tau)\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi d\tau.$$

例 10 用傅里叶积分法重解例3，即三维无界空间中的受迫振动

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2\Delta u=f(r,t),\\u|_{t=0}=0,\quad u_t|_{t=0}=0.\end{cases}$$

解 试把所求的解展开为三重傅里叶积分

$$u(r,t)=\iiint_{-\infty}^{\infty}T(t;k)e^{ik\cdot r}dk_1dk_2dk_3.$$

把它代入泛定方程和初始条件，

$$\begin{cases}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}[T''+k^2a^2T]e^{ik\cdot r}dk_1dk_2dk_3=f(r,t),\\ \iiint\limits_{-\infty}^{\infty}T(0;\omega)e^{ik\cdot r}dk_1dk_2dk_3=0,\quad \iiint\limits_{-\infty}^{\infty}T'(0;\omega)e^{ik\cdot r}dk_1dk_2dk_3=0.\end{cases}$$

把右边的 $f(r,t)$ 也展开为傅里叶积分，然后比较两边，就分离出关于 $T(t;k)$ 的常微分方程和初始条件

$$\begin{cases}T''+k^2a^2T=\bar{f}(k,t),\\ T(0;k)=0,\quad T'(0;k)=0.\end{cases}$$

其中 $\bar{f}(k,t)$ 是 $f(r,t)$ 的三重傅里叶变换式

$$\bar{f}(k,t)=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}f(r',t)e^{-ik\cdot r'}dx'dy'dz'.$$

$T(t;k)$ 的常微分方程在所给初始条件下的解是

$$T(t;k)=\frac{1}{2aik}\int_0^t\bar{f}(k,\tau)[e^{ika(t-\tau)}-e^{-ika(t-\tau)}]d\tau.$$

于是，所求的解

$$\begin{aligned}&u(r,t)\\ &=\int_0^t\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{16\pi^3aik}\bar{f}(k,\tau)[e^{ika(t-\tau)}-e^{-ika(t-\tau)}]e^{ik\cdot r}dk_1dk_2dk_3d\tau\\ &=\frac{1}{4\pi a^2}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\int_0^t f(r',\tau)\,\frac{a}{4\pi^2}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{ik}[e^{ika(t-\tau)}-e^{-ika(t-\tau)}]e^{ik\cdot(r-r')}\\ &\quad\times dk_1dk_2dk_3d\tau dx'dy'dz'.\end{aligned}$$

参照附录七的定积分公式(三)，得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4\pi^2}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{ik}[e^{ika(t-\tau)}-e^{-ika(t-\tau)}]e^{ik\cdot(r-r')}dk_1dk_2dk_3\\ &=\frac{1}{R}[\delta(a(t-\tau)-R)-\delta(a(t-\tau)+R)],\end{aligned}$$

式中 $R=|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|$. 根据(29.10)，上式又可写成

$$\frac{1}{4\pi^2}\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{ik}\left[e^{ika(t-\tau)}-e^{-ika(t-\tau)}\right]e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}dk_1dk_2dk_3$$

$$=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{R}\left[\delta\left(t-\tau-\frac{R}{a}\right)-\delta\left(t-\tau+\frac{R}{a}\right)\right].$$

这样，所求的解

$$u(\boldsymbol{r},t)$$

$$=\frac{1}{4\pi a^2}\iiint_{-\infty}^{\infty}\int_0^t f(\boldsymbol{r}',\tau)\frac{1}{R}\left[\delta\left(t-\tau-\frac{R}{a}\right)-\delta\left(t-\tau+\frac{R}{a}\right)\right]d\tau dx'dy'dz'.$$

因为我们是从初始状况推算以后的状况（不是反推以前的状况），所以 τ 的积分区间为 $(0,\ t)$，τ 不可能等于 $t+R/a$，从而 $\delta(t-\tau+R/a)$ 项应该舍去，

$$u(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi a^2}\iiint_{-\infty}^{\infty}\int_0^t\frac{f(\boldsymbol{r}',\tau)}{R}\delta\left(t-\tau-\frac{R}{a}\right)d\tau dx'dy'dz'$$

$$=\frac{1}{4\pi a^2}\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{f\left(\boldsymbol{r}',t-\dfrac{R}{a}\right)}{R}dx'dy'dz'.$$

上式的 $f(\boldsymbol{r}',t-R/a)$ 的宗量 $t-R/a$ 必须 $\geqslant 0$，所以上式其实并不需要在无界空间中积分，而只需在 $R\leqslant at$ 的球体 T_{at}^{r} 积分，

$$u(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi a^2}\iiint_{T_{at}^{r}}\frac{f\left(\boldsymbol{r}',\ t-\dfrac{R}{a}\right)}{R}dx'dy'dz'.$$

这正是推迟势(39.2)。

（四）泊松方程

在无界空间中，没有边界条件，泊松方程的求解基本上是一个单纯的积分问题。事实上，三维无界空间的泊松方程的格林函数是(37.34)，

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')=-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|},\tag{39.14}$$

所以，三维泊松方程

$$\Delta_3 u=f(\boldsymbol{r})$$

的解就是积分

$$u(\boldsymbol{r})=\iiint_{-\infty}^{\infty}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')f(\boldsymbol{r}')dx'dy'dz'=-\frac{1}{4\pi}\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dx'dy'dz'.\tag{39.15}$$

二维无界空间的泊松方程的格林函数是(37.35)，

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')=-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|},$$

所以，二维泊松方程

$$\Delta_2 u=f(\boldsymbol{r})\tag{39.16}$$

的解就是积分

$$u(\boldsymbol{r})=\iint_{-\infty}^{\infty}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')f(\boldsymbol{r}')dx'dy'=-\frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}f(\boldsymbol{r}')\ln\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dx'dy'.\tag{39.17}$$

(39.15)和(39.17)是读者在电磁学中熟悉的。

习　题

1. 求解一维半无界空间的输运问题 $u_t-a^2u_{xx}=0,\ u|_{x=0}=At,\ u|_{t=0}=0$.

2. 在一维半无界空间中求解 $u_t-a^2u_{xx}=0,\ u|_{x=0}=f(t),\ u|_{t=0}=\varphi(x)$.

3. 在一维半无界空间中求解 $u_t-a^2u_{xx}=0,\ u_x|_{x=0}=q(t),\ u|_{t=0}=0$.

4. 用拉普拉斯变换求解例 8 里的常微分方程 $T''+\omega^2a^2T=\bar{f}(t)$，$T(0)=0,\ T'(0)=0$.

5. 用拉普拉斯变换求解例 9 里的常微分方程 $T'+\omega^2a^2T=\bar{f}(t)$，$T(0)=0$.

6. 例 10 研究三维无界空间中的受迫振动是从初始 ($t=0$) 状况推算以后($t>0$)的状况。试重新求解例 10，从初始($t=0$) 状况反推以前($t<0$)的状况.

第十二章　二阶常微分方程级数解法　本征值问题

§40. 特殊函数常微分方程

上两章的分离变数法几乎全部使用直角坐标，只有§36例6使用了平面极坐标。事实上，一成不变地使用直角坐标或平面极坐标是不行的，我们必须参照问题中的边界的形状选用适当的坐标系。现在考察一下两种常用的坐标系——球坐标系和柱坐标系。

(一) 拉普拉斯方程

用球坐标系，拉普拉斯方程 $\Delta u=0$ 的表示式(参看附录六)是

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0. \quad (40.1)$$

首先，试把表示距离的变数 r 跟表示方向的变数 θ 和 φ 分离，以

$$u(r,\theta,\varphi)=R(r)Y(\theta,\varphi)$$

代入(40.1)，得

$$\frac{Y}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{R}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{R}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}=0.$$

用 r^2/RY 遍乘各项并适当移项，即得

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)=-\frac{1}{Y}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{Y}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}.$$

左边是 r 的函数，跟 θ 和 φ 无关；右边是 θ 和 φ 的函数，跟 r 无关。两边相等显然是不可能的，除非两边实际上是同一个常数。为了照顾后面关于勒让德方程和自然边界条件的本征值问题（§41），

通常把这个常数记作 $l(l+1)$，

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)=-\frac{1}{Y\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{Y\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}=l(l+1).$$

这就分解为两个方程：

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)-l(l+1)R=0, \qquad (40.2)$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+l(l+1)Y=0. \qquad (40.3)$$

常微分方程(40.2)即 $r^2\frac{d^2R}{dr^2}+r\frac{dR}{dr}-l(l+1)R=0$ 是所谓欧勒型常微分方程(参看附录九)，它的解是

$$R(r)=Cr^l+D\frac{1}{r^{l+1}}. \qquad (40.4)$$

偏微分方程(40.3)叫作球函数方程。

进一步分离变数，以

$$Y(\theta,\varphi)=\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

代入球函数方程(40.3)，得

$$\frac{\Phi}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\frac{\Theta}{\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+l(l+1)\Theta\Phi=0.$$

用 $\sin^2\theta/\Theta\Phi$ 遍乘各项并适当移项，即得

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+l(l+1)\sin^2\theta=-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}.$$

左边是 θ 的函数，跟 φ 无关；右边是 φ 的函数，跟 θ 无关。两边相等显然是不可能的，除非两边实际上是同一个常数。把这个常数记作 λ，

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+l(l+1)\sin^2\theta=-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=\lambda.$$

这就分解为两个常微分方程：

$$\Phi''+\lambda\Phi=0, \qquad (40.5)$$

$$\sin\theta\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+[l(l+1)\sin^2\theta-\lambda]\Theta=0. \qquad (40.6)$$

常微分方程(40.5)其实还有一个没有写出来的“自然的周期条件”(参看§36例6)$\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)$. 常微分方程(40.5)和自然的周期条件构成本征值问题。本征值是

$$\lambda=m^2 \quad (m=0,1,2,3,\cdots\cdots), \qquad (40.7)$$

本征函数是

$$\Phi(\varphi)=A\cos m\varphi+B\sin m\varphi. \qquad (40.8)$$

再看常微分方程(40.6)。根据(40.7),应把(40.6)改写为

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta=0. \qquad (40.9)$$

通常用

$$\theta=\arccos x, \quad 即 \quad x=\cos\theta$$

把自变数从 θ 换为 x(x 只是 $\cos\theta$ 的记号,并不是直角坐标),就把方程(40.9)化为①

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d\Theta}{dx}\right]+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]\Theta=0, \qquad (40.10)$$

亦即

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2}-2x\frac{d\Theta}{dx}+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]\Theta=0. \qquad (40.11)$$

这叫作 l 阶缔合勒让德方程。

如果球坐标的极轴是对称轴,则 u 跟 φ 无关,从而 $\Phi(\varphi)$ 跟 φ 无关,从(40.8)看,这是说 $m=0$. 而在 $m=0$ 的情况下,方程(40.11)成为

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2}-2x\frac{d\Theta}{dx}+l(l+1)\Theta=0. \qquad (40.12)$$

---

① $\frac{dx}{d\theta}=-\sin\theta$, 所以 $\frac{d\Theta}{d\theta}=\frac{d\Theta}{dx}\frac{dx}{d\theta}=-\sin\theta\frac{d\Theta}{dx}$, 而 $\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)=\frac{1}{\sin\theta}\frac{dx}{d\theta}\frac{d}{dx}\left(-\sin^2\theta\frac{d\Theta}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d\Theta}{dx}\right]$. 以此代入(40.9)即得(40.10)

这叫作 l 阶勒让德方程。

关于勒让德方程和缔合勒让德方程的求解见 § 41 和 § 45.

用柱坐标系，拉普拉斯方程 $\Delta u=0$ 的表示式(参看附录六) 是

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0. \tag{40.13}$$

试以分离变数形式的

$$u(\rho,\varphi,z)=R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$$

代入(40.13)，得

$$\Phi Z\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{Z\Phi}{\rho}\frac{dR}{d\rho}+\frac{RZ}{\rho^2}\Phi''+R\Phi Z''=0.$$

用 $\rho^2/R\Phi Z$ 遍乘各项并适当移项，即得

$$\frac{\rho^2}{R}\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{\rho}{R}\frac{dR}{d\rho}+\rho^2\frac{Z''}{Z}=-\frac{\Phi''}{\Phi}.$$

左边是 ρ 和 z 的函数，跟 φ 无关；右边是 φ 的函数，跟 ρ 和 z 无关。两边相等显然是不可能的，除非两边实际上是同一个常数。把这个常数记作 λ，

$$\frac{\rho^2}{R}\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{\rho}{R}\frac{dR}{d\rho}+\rho^2\frac{Z''}{Z}=-\frac{\Phi''}{\Phi}=\lambda.$$

这就分解为两个方程：

$$\Phi''+\lambda\Phi=0, \tag{40.14}$$

$$\frac{\rho^2}{R}\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{\rho}{R}\frac{dR}{d\rho}+\rho^2\frac{Z''}{Z}=\lambda. \tag{40.15}$$

常微分方程 (40.14) 和没有写出来的自然的周期条件构成本征值问题。本征值和本征函数是

$$\lambda=m^2\quad(m=0,1,2,3,\cdots\cdots), \tag{40.16}$$

$$\Phi(\varphi)=A\cos m\varphi+B\sin m\varphi. \tag{40.17}$$

再看方程(40.15). 根据(40.16)，应把(40.15)改写为

$$\frac{\rho^2}{R}\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{\rho}{R}\frac{dR}{d\rho}+\rho^2\frac{Z''}{Z}=m^2.$$

用 $1/\rho^2$ 遍乘各项并适当移项，即得

$$\frac{1}{R}\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{1}{R}\frac{dR}{d\rho}-\frac{m^2}{\rho^2}=-\frac{Z''}{Z}.$$

左边是 ρ 的函数，跟 z 无关；右边是 z 的函数，跟 ρ 无关。两边相等显然是不可能的，除非两边实际上是同一个常数。把这个常数记作 $-\mu$，

$$\frac{1}{R}\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{1}{R}\frac{dR}{d\rho}-\frac{m^2}{\rho^2}=-\frac{Z''}{Z}=-\mu.$$

这就分解为两个常微分方程：

$$Z''-\mu Z=0, \tag{40.18}$$

$$\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho}+\left(\mu-\frac{m^2}{\rho^2}\right)R=0. \tag{40.19}$$

如果常数 $\mu=0$，方程(40.18)和(40.19)的解是

$$Z=C+Dz, \quad R=E\rho^m+F\frac{1}{\rho^m}.$$

下面着重讨论 $\mu\neq0$ 的情况。

常系数常微分方程(40.18)的解是

(如 $\mu>0$)	(如 $\mu<0$，记 $-\mu$ 为 h^2)	
$Z(z)=Ce^{\sqrt{\mu}z}+De^{-\sqrt{\mu}z}.$	$Z(z)=C\cos hz+D\sin hz.$	(40.20)

至于 $\mu>0$，$=0$ 还是 <0，要根据具体的边界条件考虑。比方说，如果要求 $Z(z)$ 在两端 $z=0$ 和 $z=h$ 满足齐次边界条件，那么，这就构成读者所熟悉的本征值问题，$\mu\geqslant0$ 应该排除。

再看常微分方程(40.19)。通常用

$x=\sqrt{\mu}\,\rho$	$x=h\rho$

把自变数从 ρ 换为 x(x 只是 $\sqrt{\mu}\,\rho$ 或 $h\rho$ 的记号，并不是直角坐

标），就把方程化为①

$$\frac{d^2R}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dR}{dx}+\left(1-\frac{m^2}{x^2}\right)R=0,\quad\Bigg|\quad\frac{d^2R}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dR}{dx}-\left(1+\frac{m^2}{x^2}\right)R=0,\tag{40.21}$$

亦即

$$x^2\frac{d^2R}{dx^2}+x\frac{dR}{dx}+(x^2-m^2)R=0.\quad\Bigg|\quad x^2\frac{d^2R}{dx^2}+x\frac{dR}{dx}-(x^2+m^2)R=0.\tag{40.21}$$

(40.21) 左边的方程叫作**贝塞耳方程**。右边的方程叫作**虚宗量贝塞耳方程**。事实上，如果把贝塞耳方程的宗量 x 改成虚数 ix，贝塞耳方程就成了虚宗量贝塞耳方程。关于贝塞耳方程和虚宗量贝塞耳方程的求解见 § 42。虚宗量贝塞耳方程的解叫作虚宗量贝塞耳函数，它没有实的零点。因此，如果要求 $R(\rho)$ 在端点 $\rho=a$ 满足齐次边界条件，就排除了 $\mu<0$ 的可能。

（二）波动方程

考察三维波动方程

$$u_{tt}-a^2\Delta_3u=0.\tag{40.22}$$

试把时间变数 t 和空间变数 r 分离，以

$$u(r,t)=T(t)v(r)$$

代入(40.22)，得

$$T''v-a^2T\Delta_3v=0.$$

用 Tv 遍除各项并适当移项，即得

$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{\Delta v}{v}.$$

左边是时间 t 的函数，跟 r 无关；右边是 r 的函数，跟时间 t 无关。

---

① 以 $x=\sqrt{\mu}\,\rho$ 为例，$\frac{dx}{d\rho}=\sqrt{\mu}$，所以 $\frac{dR}{d\rho}=\frac{dR}{dx}\frac{dx}{d\rho}=\sqrt{\mu}\frac{dR}{dx}$，而 $\frac{d^2R}{d\rho^2}=\frac{d}{d\rho}\left(\frac{dR}{d\rho}\right)=\frac{d}{d\rho}\left(\sqrt{\mu}\frac{dR}{dx}\right)=\frac{dx}{d\rho}\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\mu}\frac{dR}{dx}\right)=\mu\frac{d^2R}{dx^2}$。以此代入(40.19)即得(40.21)。

两边相等显然是不可能的，除非两边实际上是同一个常数。把这个常数记作$-k^2$，

$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{\Delta v}{v}=-k^2.$$

这就分解为两个方程：

$$T''+k^2a^2T=0, \tag{40.23}$$

$$\Delta_3 v+k^2 v=0. \tag{40.24}$$

常微分方程(40.23)的解是读者熟悉的

$$T(t)=C\cos kat+D\sin kat,\text{或}\ Ce^{ikat}+De^{-ikat}. \tag{40.25}$$

偏微分方程（40.24）叫作亥姆霍兹方程，或仍叫作“波动方程”。亥姆霍兹方程下面还要讨论。

（三）输运方程

考察三维输运方程

$$u_t-a^2\Delta_3 u=0. \tag{40.26}$$

试把时间变数t和空间变数r分离，以

$$u(r,t)=T(t)v(r)$$

代入(40.26)，得

$$T'v-a^2T\Delta_3 v=0.$$

用Tv遍除各项并适当移项，即得

$$\frac{T'}{a^2T}=\frac{\Delta v}{v}.$$

左边是时间t的函数，跟r无关；右边是r的函数，跟时间t无关。两边相等显然是不可能的，除非两边实际上是同一个常数。把这个常数记作$-k^2$，

$$\frac{T'}{a^2T}=\frac{\Delta v}{v}=-k^2.$$

这就分解为两个方程：

$$T'+k^2a^2T=0, \tag{40.27}$$

$$\Delta v+k^2v=0. \tag{40.28}$$

如果常数 $k=0$，(40.27)和(40.28) 分别退化为 $T'=0$ 和拉普拉斯方程 $\Delta v=0$. 下面着重讨论 $k\neq0$ 的情况。

常微分方程(40.27)的解是读者熟悉的

$$T(t)=Ce^{-k^2a^2t}. \tag{40.29}$$

偏微分方程(40.28)是**亥姆霍兹方程**，或"波动方程"。下面就讨论亥姆霍兹方程。

（四）亥姆霍兹方程

考察亥姆霍兹方程(40.24)即(40.28).

用球坐标系，亥姆霍兹方程的表示式是

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2v}{\partial\varphi^2}+k^2v=0. \tag{40.30}$$

首先，试把表示距离的变数 r 跟表示方向的变数 θ 和 φ 分离，以

$$u(r,\theta,\varphi)=R(r)Y(\theta,\varphi)$$

代入(40.30)，得

$$\frac{Y}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{R}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{R}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2Y}{\partial\varphi^2}+k^2RY=0.$$

用 r^2/RY 遍乘各项并适当移项，即得

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+k^2r^2=-\frac{1}{Y}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{Y\sin^2\theta}\frac{\partial^2Y}{\partial\varphi^2}.$$

左边是 r 的函数，跟 θ 和 φ 无关；右边是 θ 和 φ 的函数，跟 r 无关。两边相等显然是不可能的，除非两边实际上是同一个常数。通常把这个常数记作 $l(l+1)$，

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+k^2r^2=-\frac{1}{Y\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{Y\sin^2\theta}\frac{\partial^2Y}{\partial\varphi^2}$$
$$=l(l+1).$$

这就分解为两个方程

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+l(l+1)Y=0, \quad (40.31)$$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+[k^2r^2-l(l+1)]R=0. \quad (40.32)$$

方程(40.31)就是球函数方程(40.3)，把它进一步分离变数将得到(40.8)和缔合勒让德方程(40.11)。

常微分方程(40.32)亦即

$$r^2\frac{d^2R}{dr}+2r\frac{dR}{dr}+[k^2r^2-l(l+1)]R=0$$

叫作 l 阶球贝塞耳方程。这是因为如果把自变数 r 和函数 $R(r)$ 分别换作 x 和 $y(x)$，

$$x=kr, \qquad\qquad R(r)=\sqrt{\frac{1}{x}}y(x),$$

则方程(40.32)成为

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+\left[x^2-\left(l+\frac{1}{2}\right)^2\right]y=0, \quad (40.33)$$

而(40.33)是 $l+\frac{1}{2}$ 阶的贝塞耳方程。

用柱坐标系，亥姆霍兹方程的表示式是

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+k^2u=0. \quad (40.34)$$

试以分离变量形式的

$$u(\rho,\varphi,z)=R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$$

代入(40.34)，一步一步分离变数，得到类似于拉普拉斯方程的结果：

$$\Phi''+\lambda\Phi=0, \quad (40.35)$$

$$Z''-\mu Z=0, \quad (40.36)$$

$$\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho}+\left(k^2+\mu-\frac{\lambda}{\rho^2}\right)R=0. \qquad (40.37)$$

方程(40.35)和没有写出的自然的周期条件构成本征值问题，这是读者已经熟悉的。本征值和本征函数是

$$\lambda=m^2 \quad (m=0,1,2,\cdots\cdots), \qquad (40.38)$$

$$\Phi(\varphi)=A\cos m\varphi+B\sin m\varphi. \qquad (40.39)$$

方程(40.36)同于(40.18)，它的解前已给出。如果问题的边界条件全是齐次的，那就排除了 $\mu\geqslant 0$. 把 $-\mu$ 记作 h^2，则

$$Z(z)=C\cosh hz+D\sinh hz. \qquad (40.40)$$

按照(40.38)，方程(40.37)应改写为

$$\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho}+\left(k^2-h^2-\frac{m^2}{\rho^2}\right)R=0. \qquad (40.41)$$

作自变数的代换，

$$x=\sqrt{k^2-h^2}\,\rho, \qquad (40.42)$$

则方程(40.41)成为

$$\frac{d^2R}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dR}{dx}+\left(1-\frac{m^2}{x^2}\right)R=0, \qquad (40.43)$$

这是 m 阶贝塞耳方程。

现将以上分离变数结果列成表格如下。

方　程	球坐标系	柱坐标系	
拉普拉斯方程	$R(r)=r^l,\ \frac{1}{r^{l+1}}$ $\Theta(\theta)$缔合勒让德方程 $\Phi(\varphi)=\cos m\varphi,\ \sin m\varphi$	$\Phi(\varphi)=\cos m\varphi,\ \sin m\varphi$ $Z(z)=e^{\sqrt{\mu}z},\ e^{-\sqrt{\mu}z}$ $R(\rho)$贝塞耳方程	 $Z(z)=\cosh hz,\ \sinh hz$ $R(\rho)$ 虚宗量贝塞耳方程
波动方程	$T(t)=\cos kat,\ \sin kat;$	$\Delta v(r)+k^2v(r)=0$	
输运方程	$T(t)=e^{-k^2a^2t};$	$\Delta v(r)+k^2v(r)=0$	
亥姆霍兹方程 $\Delta v+k^2v=0$	$R(r)$球贝塞耳方程 $\Theta(\theta)$缔合勒让德方程 $\Phi(\varphi)=\cos m\varphi,\ \sin m\varphi$	$\Phi(\varphi)=\cos m\varphi,\ \sin m\varphi$ $Z(z)=\cosh hz,\ \sinh hz$ $R(\rho)$贝塞耳方程	

表中未列入常数 $\mu=0$ 的情况和常数 $k=0$ 的情况，读者可自行补充。

在第十二章和第十三章的基础上，可以把这张表格写得更具体些，见附录二十一。

（五）矢量的波动方程

电磁波方程

$$\boldsymbol{E}_{tt}-c^2\Delta\boldsymbol{E}=0,\qquad \boldsymbol{H}_{tt}-c^2\Delta\boldsymbol{H}=0$$

是矢量的波动方程。试把时间变数 t 和空间变数 $\boldsymbol{r}$ 分离，以

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})T(t),\qquad \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})T(t)$$

代入就把矢量的波动方程分解为

$$T''+c^2k^2T=0, \tag{40.44}$$

$$\Delta\boldsymbol{E}+k^2\boldsymbol{E}=0,\ \ \Delta\boldsymbol{H}+k^2\boldsymbol{H}=0. \tag{40.45}$$

常微分方程(40.44)是读者熟悉的，它的解是

$$T(t)=A\cos ckt+B\sin ckt.$$

偏微分方程 (40.45) 是**矢量的亥姆霍兹方程**。它实际上是三个分量方程式。

在直角坐标系中，(40.45)简单地就是

$$\begin{cases}\Delta E_x+k^2E_x=0,\ \ \Delta E_y+k^2E_y=0,\ \ \Delta E_z+k^2E_z=0;\\ \Delta H_x+k^2H_x=0,\ \ \Delta H_y+k^2H_y=0,\ \ \Delta H_z+k^2H_z=0.\end{cases} \tag{40.46}$$

这些方程中的每一个都容易分离变数。

在柱坐标系中，(40.45)就是[参看附录六的(11)式]

$$\begin{cases}\Delta E_\rho-\dfrac{1}{\rho^2}E_\rho-\dfrac{2}{\rho^2}\dfrac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi}+k^2E_\rho=0,\\ \Delta E_\varphi-\dfrac{1}{\rho^2}E_\varphi+\dfrac{2}{\rho^2}\dfrac{\partial E_\rho}{\partial\varphi}+k^2E_\varphi=0,\\ \Delta E_z+k^2E_z=0.\end{cases} \tag{40.47}$$

在前两个方程中，每一个方程既含有 E_ρ 又含有 E_φ. 两个分量牵扯在一起，问题就复杂了。幸好第三个方程 $\Delta E_z+k^2E_z=0$ 是单个

分量的亥姆霍兹方程。研究电磁波在波导(空心金属管道)中的传播问题时，通常取管轴为 z 轴，设法把 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 用 E_z 和 H_z 表示出来，问题就归结为求解 E_z 和 H_z 的亥姆霍兹方程。把 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 用 E_z 和 H_z 表示出来，确是可能的。事实上，如果电磁波沿着管轴以谐波形式传播，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}(\rho,\varphi,z,t)=\boldsymbol{\mathscr{E}}(\rho,\varphi)e^{i(hz-kct)},\\ \boldsymbol{H}(\rho,\varphi,z,t)=\boldsymbol{\mathscr{H}}(\rho,\varphi)e^{i(hz-kct)}.\end{cases}\tag{40.48}$$

以(40.48)代入麦克斯韦方程 $\dot{\boldsymbol{E}}=\frac{1}{\varepsilon_0}\nabla\times\boldsymbol{H}$ 和 $\dot{\boldsymbol{H}}=-\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{E}$，得

$$\begin{cases}-ikc\,\mathscr{E}_\rho=\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\mathscr{H}_z}{\partial\varphi}-ih\mathscr{H}_\varphi\right), & (40.49)\\ -ikc\,\mathscr{E}_\varphi=\frac{1}{\varepsilon_0}\left(ih\mathscr{H}_\rho-\frac{\partial\mathscr{H}_z}{\partial\rho}\right), & (40.50)\\ -ikc\,\mathscr{E}_z=\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{\partial\mathscr{H}_\varphi}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\mathscr{H}_\varphi-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\mathscr{H}_\rho}{\partial\varphi}\right);\end{cases}$$

$$\begin{cases}ikc\mathscr{H}_\rho=\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\mathscr{E}_z}{\partial\varphi}-ih\,\mathscr{E}_\varphi\right), & (40.51)\\ ikc\mathscr{H}_\varphi=\frac{1}{\mu_0}\left(ih\,\mathscr{E}_\rho-\frac{\partial\mathscr{E}_z}{\partial\rho}\right), & (40.52)\\ ikc\mathscr{H}_z=\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial\mathscr{E}_\varphi}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\mathscr{E}_\varphi-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\mathscr{E}_\rho}{\partial\varphi}\right).\end{cases}$$

从(40.49)和(40.52)可“解出” $\mathscr{E}_\rho$ 和 $\mathscr{H}_\varphi$，从(40.50)和(40.51)可“解出” $\mathscr{E}_\varphi$ 和 $\mathscr{H}_\rho$，所谓“解出”是说用 $\mathscr{E}_z$ 和 $\mathscr{H}_z$ 表出：

$$\begin{cases}\mathscr{E}_\rho=\frac{i}{k^2-h^2}\left(h\frac{\partial\mathscr{E}_z}{\partial\rho}+k\frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{\partial\mathscr{H}_z}{\partial\varphi}\right),\\ \mathscr{E}_\varphi=\frac{i}{k^2-h^2}\left(h\frac{1}{\rho}\frac{\partial\mathscr{E}_z}{\partial\varphi}-k\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{\partial\mathscr{H}_z}{\partial\rho}\right),\end{cases}$$

$$\begin{cases}\mathscr{H}_\rho=\frac{i}{k^2-h^2}\left(h\frac{\partial\mathscr{H}_z}{\partial\rho}-k\frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\frac{\partial\mathscr{E}_z}{\partial\varphi}\right),\\ \mathscr{H}_\varphi=\frac{i}{k^2-h^2}\left(h\frac{1}{\rho}\frac{\partial\mathscr{H}_z}{\partial\varphi}+k\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\frac{\partial\mathscr{E}_z}{\partial\rho}\right).\end{cases}\tag{40.53}$$

这就把$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{H}$用$\mathscr{E}_z$和$\mathscr{H}_z$表示出来。E_z和H_z满足标量亥姆霍兹方程$\Delta_3 E_z+k^2E_z=0, \Delta_3 H_z+k^2H_z=0$. 以

$$E_z(\rho,\varphi,z,t)=\mathscr{E}_z(\rho,\varphi)e^{i(hz-kct)},$$
$$H_z(\rho,\varphi,z,t)=\mathscr{H}_z(\rho,\varphi)e^{i(hz-kct)}$$

代入，可得

$$\begin{cases}\Delta_2\mathscr{E}_z+(k^2-h^2)\mathscr{E}_z=0,\\ \Delta_2\mathscr{H}_z+(k^2-h^2)\mathscr{H}_z=0.\end{cases} \tag{40.54}$$

全部问题归结为求解亥姆霍兹方程(40.54)。

在球坐标系中，(40.45)就是[参看附录六的(12)式]

$$\begin{cases}\Delta E_r-\dfrac{2}{r^2}E_r-\dfrac{2}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}(E_\theta\sin\theta)-\dfrac{2}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi}+k^2E_r=0,\\ \Delta E_\theta-\dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}E_\theta+\dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial E_r}{\partial\theta}-\dfrac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi}+k^2E_\theta=0,\\ \Delta E_\varphi-\dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}E_\varphi+\dfrac{2}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial E_r}{\partial\varphi}+\dfrac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial E_\theta}{\partial\varphi}+k^2E_\varphi=0.\end{cases}$$

这比柱坐标系里的式子还要复杂。

习 题

1. 试用平面极坐标系把二维波动方程分离变数。

2. 试用平面极坐标系把二维输运方程分离变数。

3. 氢原子定态问题的量子力学薛定谔方程是

$$-\frac{h^2}{8\pi^2\mu}\Delta u-\frac{Ze^2}{r}u=Eu,$$

其中h,μ,Z,e,E都是常数。试用球坐标系把这个方程分离变数。

4. 研究电磁波在矩形波导中的传播，取波导的管轴为z轴，并设电磁波以谐波形式传播，通常令

$$E_z(x,y,z,t)=\mathscr{E}_z(x,y)e^{i(hz-kct)},\quad H_z(x,y,z,t)=\mathscr{H}_z(x,y)e^{i(hz-kct)},$$

其中h应为实数(请读者考虑为什么)。以上式代入(40.46)得

$$\Delta_2\mathscr{E}_z+(k^2-h^2)\mathscr{E}_z=0,\quad \Delta_2\mathscr{H}_z+(k^2-h^2)\mathscr{H}_z=0.$$

波导的x边和y边宽度分别是a和b。试在边界条件

$$①\ \mathscr{E}_z\big|_{x=0}=\mathscr{E}_z\big|_{x=a}=\mathscr{E}_z\big|_{y=0}=\mathscr{E}_z\big|_{y=b}=0$$

或
$$②\ \frac{\partial \mathscr{H}_z}{\partial x}\bigg|_{x=0}=\frac{\partial \mathscr{H}_z}{\partial x}\bigg|_{x=a}=\frac{\partial \mathscr{H}_z}{\partial y}\bigg|_{y=0}=\frac{\partial \mathscr{H}_z}{\partial y}\bigg|_{y=b}$$

下求解 $\mathscr{E}_z$ 和 $\mathscr{H}_z$。在何种条件下得不到谐波形式的解？

§41．常点邻域上的级数解法

用球坐标系和柱坐标系对拉普拉斯方程、波动方程、输运方程进行分离变数，就出现缔合勒让德方程、勒让德方程、贝塞耳方程、球贝塞耳方程等特殊函数方程。用其他坐标系对其他数学物理偏微分方程进行分离变数，还会出现各种各样的特殊函数方程。这些大多是二阶常微分方程。这向我们提出求解二阶常微分方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \tag{41.1}$$

的任务。

这些二阶常微分方程，如能用"高等数学"课程所讲授的方法解出，当然很好。可是，像上面列举的几个二阶常微分方程并不能用"高等数学"课程所讲的方法解出。

级数解法，就是说，把二阶常微分方程的解表为系数待定的幂级数，代入方程以逐个确定系数，这是一个比较普遍的方法，对方程并无特殊的要求。

但是，既然是级数，就有是否收敛以及收敛范围的问题。用级数解法，要选定某个点 x_0 作为展开中心，得到的解就是以 x_0 为中心的幂级数。我们还必须确定这个幂级数的收敛圆，级数解只在收敛圆内部有意义。如果需要方程的解在这个收敛圆以外的点上的数值，那就必须把级数解向该点作解析延拓，或者干脆另选一个中心重新用级数解法去解。

级数解法的计算较为繁长，要求耐心和细心。

如果方程 (40.1) 的系数 $p(x)$ 和 $q(x)$ 在所选的点 x_0 是解析

的，则点 x_0 叫作方程(41.1)的常点。本节介绍常点邻域上的级数解法。

估计所求的解在常点 x_0 是解析的，就是说，解可表为以 x_0 为中心的泰勒级数

$$y(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_k(x-x_0)^k+\cdots, \tag{41.2}$$

其中系数 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_k,\cdots$ 尚有待确定。

对(41.2)逐项求导，得

$$y'(x)=1a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+\cdots+(k+1)a_{k+1}(x-x_0)^k+\cdots, \tag{41.3}$$

$$y''(x)=2\cdot 1a_2+3\cdot 2a_3(x-x_0)+4\cdot 3a_4(x-x_0)^2+\cdots+(k+2)(k+1)a_{k+2}(x-x_0)^k+\cdots, \tag{41.4}$$

把(41.2)—(41.4)代入方程(41.1)的左边(当然，$p(x)$和$q(x)$也必须以 x_0 为中心展为泰勒级数)，合并同幂项。既然(41.1)的右边是零，可见各个幂次合并后的系数应分别为零。

先说常数项。(41.4)指出 y'' 的常数项是含 a_2 的项；(41.3)指出 y' 的常数项是含 a_1 的项，乘以 $p(x)$的泰勒级数，常数项仍然是含 a_1 的项；(41.2)指出 y 的常数项是 a_0，乘以 $q(x)$的泰勒级数，常数项仍是含 a_0 的项。令合并后的常数项为零，得到含有 a_2，a_1 和 a_0 的方程，它使得 a_2 可用 a_1 和 a_0 表出。

再说一次幂$(x-x_0)$的项。(41.4)指出 y'' 的一次项是含 a_3 的项；(41.3)指出 y' 的低于一次的项是含 a_1 和 a_2 的项，乘以 $p(x)$ 的泰勒级数，则一次项含有 a_1 和 a_2；(41.2)指出 y 的低于一次的项是含 a_0 和 a_1 的项，乘以 $q(x)$的泰勒级数，则一次项含有 a_0 和 a_1。令合并后的一次项为零，得到含有 a_3,a_2,a_1 和 a_0的方程，它使得 a_3 可用 a_2,a_1 和 a_0 表出。既然 a_2 已用 a_1 和 a_0 表出，a_3 终于也

用a_1和a_0表出。

同理，令合并后的二次项为零，使得a_4可用a_1和a_0表出。

照此类推，所有的a_k都可以用a_1和a_0表出，而a_1和a_0是任意的。事实上，a_1和a_0正是二阶常微分方程的通解中必然出现的两个积分常数。

既然(41.2)的所有a_n都可求出，这就证实了我们原来的估计。

例 1 在$x_0=0$的邻域上求解常微分方程

$$y''+\omega^2 y=0 \quad (\omega\text{是常数}).$$

解 方程的系数$p(x)\equiv 0, q(x)=\omega^2$. 在指定的展开中心$x_0=0$，单值函数$p(x_0)=0$和$q(x_0)=\omega^2$是有限的，它们必然在$x_0=0$为解析的。因此，点$x_0=0$是方程的常点。可设

$$y(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_kx^k+\cdots.$$

从而

$$y'(x)=1a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+(k+1)a_{k+1}x^k+\cdots,$$

$$y''(x)=2\cdot1a_2+3\cdot2a_3x+4\cdot3a_4x^3+\cdots+(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k+\cdots.$$

把以上级数代入微分方程。至于$p(x)=0$和$q(x)=\omega^2$都是只有常数项的泰勒级数，无需再作展开。现在把各个幂次的项分别集合如下表。

	常数项	x项	x^2项	x^3项	…	x^k项	…
$y''=$	$2\cdot1a_2$	$3\cdot2a_3$	$4\cdot3a_4$	$5\cdot4a_5$	…	$(k+2)(k+1)a_{k+2}$	
$\omega^2y=$	ω^2a_0	ω^2a_1	ω^2a_2	ω^2a_3	…	ω^2a_k	

令上表各个幂次合并后的系数分别为零，得一系列方程

$$2\cdot1a_2+\omega^2a_0=0, \qquad 3\cdot2a_3+\omega^2a_1=0,$$

$$4\cdot3a_4+\omega^2a_2=0, \qquad 5\cdot4a_5+\omega^2a_3=0,$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

$$(k+2)(k+1)a_{k+2}+\omega^2a_k=0.$$

最后一个式子是一般的。所有这些式子指出从 x^k 项的系数 a_k 可以推算出 x^{k+2} 项的系数 a_{k+2}，因而叫作系数的**递推公式**。

按照递推公式具体进行系数的递推。

$$a_2=-\frac{\omega^2}{2!}a_0,\qquad a_3=-\frac{\omega^2}{3!}a_1,$$

$$a_4=-\frac{\omega^2}{4\cdot 3}a_2=+\frac{\omega^4}{4!}a_0,\qquad a_5=-\frac{\omega^2}{5\cdot 4}a_3=+\frac{\omega^4}{5!}a_1,$$

$$\cdots\cdots\qquad\qquad\cdots\cdots$$

$$a_{2k}=(-1)^k\frac{\omega^{2k}}{(2k)!}a_0.\qquad a_{2k+1}=(-1)^k\frac{\omega^{2k}}{(2k+1)!}a_1.$$

这样，我们得到方程的解

$$y(x)=a_0\left[1-\frac{1}{2!}(\omega x)^2+\frac{1}{4!}(\omega x)^4-\cdots+(-1)^k\frac{1}{(2k)!}(\omega x)^{2k}+\cdots\right]$$
$$+\frac{a_1}{\omega}\left[(\omega x)-\frac{1}{3!}(\omega x)^3+\frac{1}{5!}(\omega x)^5-\cdots+(-1)^k\frac{1}{(2k+1)!}(\omega x)^{2k+1}+\cdots\right].$$

还需要确定这个级数的收敛半径。其实，上面的两个[　]正是 $\cos\omega x$ 和 $\sin\omega x$ 的泰勒级数[参看(12.8)和(12.9)]，其收敛半径为无限大。就是说，只要 x 有限，这两个[　]里的级数都收敛。于是，

$$y(x)=a_0\cos\omega x+\frac{a_1}{\omega}\sin\omega x.$$

既然 a_1 是任意常数，a_1/ω 当然还是任意常数，完全可以干脆写成

$$y(x)=a_0\cos\omega x+a_1\sin\omega x.$$

这个常微分方程和它的解是读者早已熟悉的。这里用级数方

法来解只是为了便于读者领会级数解法的步骤。

例2 在 $x_0=0$ 的邻域上求解 l 阶勒让德方程

$$(1-x^2)y''-2xy'+l(l+1)y=0.$$

解 把方程表为(41.1)的形式，系数 $p(x)=-2x/(1-x^2)$，$q(x)=l(l+1)/(1-x^2)$。在指定的展开中心 $x_0=0$，单值函数 $p(x_0)=0$ 和 $q(x_0)=l(l+1)$ 是有限的，它们必然在 $x_0=0$ 为解析的。因此，$x_0=0$ 是方程的常点。以

$$y(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_kx^k+\cdots,$$

$$y'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\cdots+(k+1)a_{k+1}x^k+\cdots,$$

$$y''(x)=2\cdot 1a_2+3\cdot 2a_3x+4\cdot 3a_4x^2+5\cdot 4a_5x^3+\cdots+(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k+\cdots$$

代入微分方程。为了计算的简便，方程就用题所给的形式而不化为(41.1)的形式。方程里的 $(1-x^2)$ 是只有常数项和二次项的泰勒级数，$-2x$ 是只有一次项的泰勒级数，无需再作展开。现在把各个幂次的项分别集合如下表。

	常数项	x项	x^2项	$\cdots$	x^k项	$\cdots$
$y''=$	$2\cdot 1a_2$	$3\cdot 2a_3$	$4\cdot 3a_4$	$\cdots$	$(k+2)(k+1)a_{k+2}$	$\cdots$
$-x^2y''=$			$-2\cdot 1a_2$	$\cdots$	$-k(k-1)a_k$	$\cdots$
$-2xy'=$		$-2\cdot 1a_1$	$-2\cdot 2a_2$	$\cdots$	$-2ka_k$	$\cdots$
$l(l+1)y=$	$l(l+1)a_0$	$l(l+1)a_1$	$l(l+1)a_2$	$\cdots$	$l(l+1)a_k$	$\cdots$

令上表各个幂次合并后的系数分别为零，得一系列方程

$$2\cdot 1a_2+l(l+1)a_0=0,\qquad 3\cdot 2a_3+(l^2+l-2)a_1=0,$$

$$4\cdot 3a_4+(l^2+l-6)a_2=0,\qquad 5\cdot 4a_5+(l^2+l-12)a_3=0,$$

$$\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots$$

$$(k+2)(k+1)a_{k+2}+(l^2+l-k^2-k)a_k=0.$$

一般的系数递推公式是

$$a_{k+2}=\frac{k^2+k-l(l+1)}{(k+2)(k+1)}a_k=\frac{(k-l)(k+l+1)}{(k+2)(k+1)}a_k. \tag{41.5}$$

按照递推公式具体进行系数的递推，

$$a_2=\frac{(-l)(l+1)}{2!}a_0,$$

$$a_4=\frac{(2-l)(l+3)}{4\cdot 3}a_2=\frac{(2-l)(-l)\cdot(l+1)(l+3)}{4!}a_0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_3=\frac{(1-l)(l+2)}{3!}a_1,$$

$$a_5=\frac{(3-l)(l+4)}{5!}a_3=\frac{(3-l)(1-l)\cdot(l+2)(l+4)}{5!}a_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{2k}=\frac{(2k-2-l)(2k-4-l)\cdots(2-l)(-l)\cdot(l+1)(l+3)\cdots(l+2k-1)}{(2k)!}a_0,$$

$$a_{2k+1}=\frac{(2k-1-l)(2k-3-l)\cdots(1-l)\cdot(l+2)(l+4)\cdots(l+2k)}{(2k+1)!}a_1.$$

这样，我们得到 l 阶勒让德方程的解

$$y(x)=a_0y_0(x)+a_1y_1(x), \tag{41.6}$$

$$y_0(x)=1+\frac{(-l)(l+1)}{2!}x^2+\frac{(2-l)(-l)(l+1)(l+3)}{4!}x^4+\cdots+\frac{(2k-2-l)(2k-4-l)\cdots(-l)(l+1)(l+3)\cdots(l+2k-1)}{(2k)!}x^{2k}+\cdots, \tag{41.7}$$

$$y_1(x)=x+\frac{(1-l)(l+2)}{3!}x^3+\frac{(3-l)(1-l)(l+2)(l+4)}{5!}x^5+\cdots+\frac{(2k-1-l)(2k-3-l)\cdots(1-l)(l+2)(l+4)\cdots(l+2k)}{(2k+1)!}x^{2k+1}+\cdots. \tag{41.8}$$

如果方程中的常数 l 是某个偶数，比方说是 $2k$，则 $y_0(x)$ 只到 x^{2k} 项为止，以后各项的系数都含有因子 $(2k-l)$ 因而为零。于是，

$y_0(x)$不再是无穷级数而是 $2k$ 次多项式，并且式中只有偶次幂项。至于 $y_1(x)$仍是无穷级数。

如果方程中的常数 l 是某个奇数，比方说是$2k+1$，则 $y_1(x)$只到 x^{2k+1} 项为止，以后各项的系数都含有因子 $(2k+1-l)$ 因而为零。于是，$y_1(x)$不再是无穷级数而是 $2k+1$ 次多项式，并且式中只有奇次幂项。至于 $y_0(x)$仍是无穷级数。

还需要确定级数(41.7)和(41.8)的收敛半径。按照(11.3)，幂级数的收敛半径 $R=\lim\limits_{k\to\infty}|a_k/a_{k+1}|$。应用于级数(41.7)和(41.8)，这就是

$$R=\lim_{n\to\infty}|a_n/a_{n+2}|.$$

利用递推公式(41.5)，

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+2)(n+1)}{(n-l)(n+l+1)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left(1-\frac{l}{n}\right)\left(1+\frac{l+1}{n}\right)}\right|=1.$$

这样，级数解(41.7)和(41.8)收敛于$|x|<1$而发散于$|x|>1$。勒让德方程的 x 是在§40中引入的，它代表 $\cos\theta$，其绝对值不可能大于一，因而级数解(41.7)和(41.8)发散于$|x|>1$并不成为问题。不过，在 $\theta=0$ 的方向(球坐标的极轴方向)，$x=\cos\theta=+1$；在 $\theta=\pi$ 的方向(球坐标的极轴的反方向)，$x=\cos\theta=-1$。级数解(41.7)和(41.8)在 $x=\pm1$ 是否收敛倒是应当考虑的。附录十证明(41.7)和(41.8)在 $x=\pm1$ 发散，而且勒让德方程的任一个解都不可能在 $x=+1$ 和 $x=-1$ 有限。

现在，把这个例题总结一下。l 阶勒让德方程的通解(41.6)是级数解(41.7)和(41.8)的线性组合。级数(41.7)和(41.8)收敛于$|x|<1$(即 $0<\theta<\pi$)，这很好；它们发散于$|x|>1$，这并不成为问题，因为$|x|=|\cos\theta|$不可能大于一；它们又发散于 $x=\pm1$(即

$\theta=0$ 和 $\theta=\pi$)，这倒是个严重的问题。

有不少定解问题要求 u 在一切方向保持有限，相应就要求勒让德方程的解在一切方向 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 即在 x 的闭区间[-1，$+1$]上保持有限。级数解(41.7)和(41.8)不可能满足这要求。对于勒让德方程而言，"解在区间[-1，$+1$]的两端 $x=\pm1$ 保持有限"竟然是一个严重的限制，通常把这个限制叫作**自然的边界条件**。在我们面前摆着这样的任务：寻求勒让德方程的满足自然的边界条件的解。

"要从客观存在的事实出发，从分析这些事实中找出方针、政策、办法来"(《在延安文艺座谈会上的讲话》)。按客观存在的事实来说，有不少定解问题的解并不在 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 两个方向成为无限大。勒让德方程的满足自然边界条件的解客观上是存在的，这在数学上应当有所反映。可是，数学上解出的级数却在 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 发散。这是一个矛盾。但是，"对立的两极都向自己的对立面转化"(《反杜林论》第88页)。包含无限多项的无穷级数一旦转化为包含有限个项的多项式，就根本不存在发散问题了。转化是有条件的，这里的条件是 l 为整数。

前已指出，如 l 为偶数，则(41.7)的 $y_0(x)$ 是只含偶次幂的 l 次多项式，它就是勒让德方程的满足自然边界条件的解。以后(§44)，我们将用适当的常数乘它，并称之为 l **阶勒让德多项式**。至于 $y_1(x)$ 仍然是无穷级数并在 $x=\pm1$ 发散，因而应舍弃。

前又指出，如 l 为奇数，则(41.8)的 $y_1(x)$ 是只含奇次幂的 l 次多项式，它就是勒让德方程的满足自然边界条件的解。以后(§44)，我们将用适当的常数乘它，并称之为 l **阶勒让德多项式**。至于 $y_2(x)$ 仍然是无穷级数并在 $x=\pm1$ 发散，因而应舍弃。

总之，勒让德方程和自然边界条件构成**本征值问题**，它决定了分离变数过程中所引入的常数必须取下列数值

$$l(l+1) \quad (l\text{为整数}), \tag{41.9}$$

这就是本征值，相应的本征函数是 l 阶勒让德多项式。

习　题

1．在 $x_0=0$ 的邻域上求解 $y''-xy=0$.

2．在 $x_0=0$ 的邻域上求解厄密方程

$$y''-2xy'+(\lambda-1)y=0.$$

λ 取什么数值可使级数解退化为多项式？这些多项式乘以适当常数使最高幂项成为 $(2x)^n$ 形式，就叫作厄密多项式，记作 $H_n(x)$．写出前几个 $H_n(x)$.

3．在 $x_0=0$ 的邻域上求解 $(1-x^2)y''-6xy'+6y=0$ 即

$$(1-x^2)y''-2(2+1)xy'+[3(3+1)-2(2+1)]y=0.$$

在例 2 的级数解(41.7)和(41.8)之中以 $l=3$ 代入，并求它的二阶导数，然后跟本题的答案比较一下。

4．在 $x_0=0$ 的邻域上求解雅可俾方程

$$(1-x^2)y''+[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]y'+\lambda(\alpha+\beta+\lambda+1)y=0.$$

§42．正则奇点邻域上的级数解法

求解二阶常微分方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0. \tag{42.1}$$

如果选定的点 x_0 是 $p(x)$ 或 $q(x)$ 的奇点，则点 x_0 叫作方程(42.1)的奇点。$p(x)$ 和 $q(x)$ 不再能都展开为以 x_0 为中心的泰勒级数，一般地说应展开为罗朗级数

$$p(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}p_k(x-x_0)^k, \qquad q(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}q_k(x-x_0)^k. \tag{42.2}$$

在这种情况下，上节方法不再适用，不再能够把所求的解表为(41.2)那种泰勒级数。

让我们尝试把(41.2)推广为

$$y(x)=\sum_{k=s}^{\infty}a_k(x-x_0)^k$$

$$=a_s(x-x_0)^s+a_{s+1}(x-x_0)^{s+1}+a_{s+2}(x-x_0)^{s+2}+\cdots$$

$$+a_{s+k}(x-x_0)^{s+k}+\cdots, \tag{42.3}$$

其中 s 和系数 $a_s, a_{s+1}, a_{s+2}, \cdots, a_{s+k}, \cdots$ 是尚待确定的常数。(第一个系数 a_s 总可以认为 $\neq 0$, 这是因为如果 $a_s=0$, 那么后一项就成了第一项)。这个尝试如果成功,点 x_0 就叫作方程的**正则奇点**。那么,这个尝试成功的条件是什么呢?

从(42.2)和(42.3)得到

$$\begin{cases} y''=s(s-1)a_s(x-x_0)^{s-2} \\ \qquad +(s+1)sa_{s+1}(x-x_0)^{s-1}+\cdots, \\ p(x)y'=sp_{-m}a_s(x-x_0)^{s-m-1}+[sp_{-m+1}a_s \\ \qquad +(s+1)p_{-m}a_{s+1}](x-x_0)^{s-m}+\cdots, \\ q(x)y=q_{-n}a_s(x-x_0)^{s-n} \\ \qquad +(q_{-n+1}a_s+q_{-n}a_{s+1})(x-x_0)^{s-n+1}+\cdots. \end{cases} \tag{42.4}$$

把以上三式代入方程(42.1)的左边,合并同幂项,各个幂次合并后的系数应分别为零。最低幂项合并后的系数为零,这给出 s 的代数方程,由此确定 s. 确定 s 之后,按升幂顺序依次令各个幂次合并后的系数为零,就可依次递推出各个系数 a_k.

现在特别写出(42.4)三个式子各自的最低幂项之和

$$[s(s-1)(x-x_0)^{s-2}+sp_{-m}(x-x_0)^{s-m-1}+q_{-n}(x-x_0)^{s-n}]a_s. \tag{42.5}$$

只要 $m>1$ 或 $n>2$ 两者有其一,则(42.5)的[ ]中以第二或第三项或两者为最低幂项。令最低幂项系数和为零,只能得到 $sp_{-m}=0$ 或 $q_{-n}=0$ 或 $sp_{-m}+q_{-n}=0$, 这些是 s 的一次或零次代数方程,只能解出一个 s 的值或根本解不出 s 的值。这是说,解不出(42.3)形式的两个解,尝试不成功,点 x_0 不是正则奇点。

再来讨论 $m\leqslant 1$ 而且 $n\leqslant 2$ 的情况。这时，(42.5)的[ ]中第一项是最低幂项，另外两项最低只能跟它同幂次而不会低于它。令最低幂项系数和为零，得到 s 的二次代数方程

$$s(s-1)+sp_{-1}+q_{-2}=0. \tag{42.6}$$

从(42.6)可解出两个 s. 对每一个 s，进行系数 a_k 的递推，得出一个(42.3)形式的解，共计两个(42.3)形式的解。尝试成功，点 x_0 是正则奇点。确定 s 的二次代数方程(42.6)叫作**判定方程**。

这样，奇点 x_0 是方程(42.1)的正则奇点的条件是 $m\leqslant 1$ 而且 $n\leqslant 2$，即 $p(x)$以 x_0 为不高于一阶的极点而且 $q(x)$以 x_0 为不高于二阶的极点。

例1 在 $x_0=0$ 的邻域上求解

$$x^2y''+xy'-m^2y=0 \quad (m^2\text{ 是常数})。$$

[这个方程即(36.67)。]

解 把方程表为(42.1)的形式，系数 $p(x)=1/x$，$q(x)=-m^2/x^2$. 指定的展开中心 $x_0=0$ 是 $p(x)$的一阶极点，又是 $q(x)$的二阶极点。因此，x_0是方程的正则奇点。以

$$y(x)=a_sx^s+a_{s+1}x^{s+1}+a_{s+2}x^{s+2}+\cdots+a_{s+k}x^{s+k}+\cdots,$$

$$y'(x)=sa_sx^{s-1}+(s+1)a_{s+1}x^s+(s+2)a_{s+2}x^{s+1}+\cdots$$
$$+(s+k+1)a_{s+k+1}x^{s+k}+\cdots,$$

$$y''(x)=s(s-1)a_sx^{s-2}+(s+1)sa_{s+1}x^{s-1}$$
$$+(s+2)(s+1)a_{s+2}x^s+\cdots$$
$$+(s+k+2)(s+k+1)a_{s+k+2}x^{s+k}+\cdots$$

代入微分方程。为了计算的简便，方程就用题所给的形式而不化为(42.1)的形式。方程里的 x^2，x 和 $-m^2$ 分别是只有二次项，一次项和常数项的泰勒级数，无需再作展开。现在把各个幂次的项分别集合如下表。

	x^s 项	x^{s+1} 项	x^{s+2} 项	…	x^{s+k} 项	…
$x^2y''=$	$s(s-1)a_s$	$(s+1)sa_{s+1}$	$(s+2)(s+1)a_{s+2}$	…	$(s+k)(s+k-1)a_{s+k}$	…
$xy'=$	sa_s	$(s+1)a_{s+1}$	$(s+2)a_{s+2}$	…	$(s+k)a_{s+k}$	…
$-m^2y=$	$-m^2a_s$	$-m^2a_{s+1}$	$-m^2a_{s+2}$	…	$-m^2a_{s+k}$	…

令上表各个幂次合并后的系数分别为零，得一系列方程

$$\begin{cases}[s(s-1)+s-m^2]a_s=0,\\ [(s+1)s+(s+1)-m^2]a_{s+1}=0,\\ [(s+2)(s+1)+(s+2)-m^2]a_{s+2}=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{cases}$$

$$\text{即}\begin{cases}[s^2-m^2]a_s=0,\\ [(s+1)^2-m^2]a_{s+1}=0,\\ [(s+2)^2-m^2]a_{s+2}=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.\end{cases}$$

考虑到第一个系数 $a_s\neq0$，第一个方程即是**判定方程**

$$s^2-m^2=0.$$

由此解得第一项的幂次

$$s_1=+m \quad \text{和} \quad s_2=-m.$$

先取 $s_1=+m$. 第二个方程成为 $[(m+1)^2-m^2]a_{m+1}=0$, 由此知 $a_{m+1}=0$. 第三个方程成为 $[(m+2)^2-m^2]a_{m+2}=0$, 由此知 $a_{m+2}=0$. 照此类推，后面所有系数全为零。这样，得到微分方程的一个特解

$$y_1(x)=x^m.$$

再取 $s_2=-m$. 第二个方程成为 $[(-m+1)^2-m^2]a_{-m+1}=0$, 由此知 $a_{-m+1}=0$. 第三个方程成为 $[(-m+2)^2-m^2]a_{-m+2}=0$, 由此知 $a_{-m+2}=0$. 照此类推，后面所有系数全为零。这样，得到微分方程的另一个特解

$$y_2(x)=x^{-m}.$$

微分方程的通解是

$$y(x)=Cx^m+D\frac{1}{x^m}.$$

这种欧勒方程和它的求解方法本是读者已熟悉的。这里用级数方法来解只是为了便于读者领会级数解法的步骤。

例 2 在 $x_0=0$ 的邻域上求解 m 阶贝塞耳方程

$$x^2y''+xy'+(x^2-m^2)y=0 \quad (m\text{是常数})。$$

解 把方程表为 (42.1) 的形式，系数 $p(x)=1/x$，$q(x)=(x^2-m^2)/x^2=1-m^2/x^2$。指定的展开中心 $x_0=0$ 是 $p(x)$ 的一阶极点，又是 $q(x)$ 的二阶极点。因此，x_0 是方程的正则奇点。以

$$y(x)=a_sx^s+a_{s+1}x^{s+1}+a_{s+2}x^{s+2}+\cdots+a_{s+k}x^{s+k}+\cdots,$$

$$y'(x)=sa_sx^{s-1}+(s+1)a_{s+1}x^s+(s+2)a_{s+2}x^{s+1}+\cdots$$
$$+(s+k+1)a_{s+k+1}x^{s+k}+\cdots,$$

$$y''(x)=s(s-1)a_sx^{s-2}+(s+1)sa_{s+1}x^{s-1}$$
$$+(s+2)(s+1)a_{s+2}x^s+\cdots$$
$$+(s+k+2)(s+k+1)a_{s+k+2}x^{s+k}+\cdots$$

代入微分方程。为了计算简便，方程就用题所给的形式而不化为(42.1)的形式。方程里的 x^2，x 和 x^2-m^2 分别是只有一项和两项的泰勒级数，无需再作展开。现在把各个幂次的项分别集合如下表。

	x^s 项	x^{s+1} 项	x^{s+2} 项	$\cdots$	x^{s+k} 项	$\cdots$
$x^2y''=$	$s(s-1)a_s$	$(s+1)sa_{s+1}$	$(s+2)(s+1)a_{s+2}$	$\cdots$	$(s+k)(s+k-1)a_{s+k}$	$\cdots$
$xy'=$	sa_s	$(s+1)a_{s+1}$	$(s+2)a_{s+2}$	$\cdots$	$(s+k)a_{s+k}$	$\cdots$
$x^2y=$			a_s	$\cdots$	a_{s+k-2}	$\cdots$
$-m^2y=$	$-m^2a_s$	$-m^2a_{s+1}$	$-m^2a_{s+2}$	$\cdots$	$-m^2a_{s+k}$	$\cdots$

令上表各个幂次合并后的系数分别为零，得一系列方程

$$\begin{cases}[s^2-m^2]a_s=0,\\ [(s+1)^2-m^2]a_{s+1}=0,\\ [(s+2)^2-m^2]a_{s+2}+a_s=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ [(s+k)^2-m^2]a_{s+k}+a_{s+k-2}=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{cases}$$

考虑到第一个系数 $a_s\neq0$，第一个方程即是**判定方程**

$$s^2-m^2=0.$$

由此解得第一项的幂次

$$s_1=+m \quad 和 \quad s_2=-m.$$

由第二个方程即$[(\pm m+1)^2-m^2]a_{s+1}=0$ 得

$$a_{s+1}=0.$$

利用以后各式进行系数的递推，递推公式是

$$[(s+k)^2-m^2]a_{s+k}+a_{s+k-2}=0,$$

即

$$a_{s+k}=-\frac{1}{(s+k)^2-m^2}a_{s+k-2}$$

$$=\frac{-1}{(s+k+m)(s+k-m)}a_{s+k-2}.$$

先取 $s_1=+m$，递推公式成为 $a_{m+k}=-a_{m+k-2}/k(2m+k)$. 于是，

$$a_{m+2}=\frac{-1}{2(2m+2)}a_m=-\frac{1}{1!\,(m+1)}\cdot\frac{1}{2^2}a_m,$$

$$a_{m+3}=\frac{-1}{3(2m+3)}a_{m+1}=0,$$

$$a_{m+4}=\frac{-1}{4(2m+4)}a_{m+2}=-\frac{1}{2(m+2)}\frac{1}{2^2}a_{m+2}$$

$$=+\frac{1}{2!\,(m+1)(m+2)}\frac{1}{2^4}a_m,$$

....

$$a_{m+2k}=(-1)^k\frac{1}{k!(m+1)(m+2)\cdots(m+k)}\cdot\frac{1}{2^{2k}}a_m,$$

$$a_{m+2k+1}=0.$$

这样，得到贝塞耳方程的一个特解

$$y_1(x)=a_m x^m\left[1-\frac{1}{1!(m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{2!(m+1)(m+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^4-\cdots+(-1)^k\frac{1}{k!(m+1)(m+2)\cdots(m+k)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}+\cdots\right].\tag{42.7}$$

还需要确定这个级数的收敛半径。按照(11.3)，收敛半径

$$R=\lim_{k\to\infty}|a_{m+k-2}/a_{m+k}|=\lim_{k\to\infty}k(2m+k)=\infty.$$

这是说，只要 x 有限，级数解(42.7)就收敛。通常取

$$a_m=1/2^m\Gamma(m+1)$$

(实变数 x 的 $\Gamma(x)$ 在"高等数学"中讲过，对于整数 m，$\Gamma(m+1)=m!$. 关于 Γ 函数，读者可参阅附录二十四)，并把这个解叫作 m 阶贝塞耳函数，记作 $J_m(x)$，

$$J_m(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\Gamma(m+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k}.\tag{42.8}$$

整数阶贝塞耳函数的数值已列成专门的"贝塞耳函数表"备查。附录十四有贝塞耳函数简表。

再取 $s_2=-m$，递推公式成为 $a_{-m+k}=-a_{-m+k-2}/k(k-2m)$. 于是，

$$a_{-m+2}=\frac{-1}{2(2-2m)}a_{-m}=-\frac{1}{1!(-m+1)}\frac{1}{2^2}a_{-m},$$

$$a_{-m+3}=\frac{-1}{3(3-2m)}a_{-m+1}=0,$$

$$a_{-m+4}=\frac{-1}{4(4-2m)}a_{-m+2}=+\frac{1}{2(-m+2)}\frac{1}{2^2}a_{-m+2}$$

$$=\frac{1}{2!(-m+1)(-m+2)}\frac{1}{2^4}a_{-m},$$

………………

$$a_{-m+2k}=(-1)^k\frac{1}{k!(-m+1)(-m+2)\cdots(-m+k)}\cdot\frac{1}{2^{2k}}a_{-m},$$

$$a_{-m+2k+1}=0.$$

这样，得贝塞耳方程的另一个特解

$$y_2(x)=a_{-m}x^{-m}\left[1-\frac{1}{1!(-m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{2!(-m+1)(-m+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^4-\cdots+(-1)^k\frac{1}{k!(-m+1)(-m+2)\cdots(-m+k)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}+\cdots\right].\tag{42.9}$$

这个级数的收敛半径

$$R=\lim_{k\to\infty}|a_{-m+k-2}/a_{-m+k}|=\lim_{k\to\infty}k(-2m+k)=\infty.$$

这是说，只要 x 有限，级数解(42.9)就收敛。通常取

$$a_{-m}=1/2^{-m}\Gamma(-m+1),$$

并把这个解叫作 $-m$ 阶贝塞耳函数，记作 $J_{-m}(x)$，

$$J_{-m}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\Gamma(-m+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2k}.\tag{42.10}$$

贝塞耳方程的通解是这两个特解 $J_m(x)$ 和 $J_{-m}(x)$ 的线性叠加。

$$C_1 J_m(x) + C_2 J_{-m}(x). \tag{42.11}$$

$-m$ 阶贝塞耳函数 $J_{-m}(x)$ 含有 x 的负幂项，从而

$$\lim_{x\to 0} J_{-m}(x) = \infty.$$

所以，如果所研究的区域包含点 $x=0$，通常就从(42.11)之中排除掉 $J_{-m}(x)$ 而只剩下 $J_m(x)$。可以说，贝塞耳方程在点 $x=0$ 具有自然的边界条件。

上面这个例子好像已经顺利解出。其实，如果 m 是整数[参看(40.16)]，第一个特解 (42.7) 确实可以顺利求出，第二个特解(42.9)却很成问题。事实上，(42.9)的[ ]中从 x^{2m} 项开始，所有系数的分母都包含因子$(-m+m)$即零，这些系数全是无限大！或者，换个方式来说明问题。对于第二个特解，系数的递推公式是

$$k(k-2m)a_{-m+k} + a_{-m+k-2} = 0.$$

在上式中，置 $k=2$，可从 a_{-m} 推出 a_{-m+2}；置 $k=4$，可从 a_{-m+2} 推出 a_{-m+4}，…。当我们要想从 a_{m-2} 推算 a_m 时，必须在递推公式中置 $k=2m$，可是这一来，递推公式竟成为

$$0a_m + a_{m-2} = 0, \quad 即 \quad a_{m-2} = 0.$$

这里有两个问题。首先，要推算的系数 a_m 从递推公式中消失了，怎能推算它呢？其次，不管已经逐步递推出来的 a_{m-2} 是什么数值，这里却硬要求它等于零。系数的递推到这里完全无法进行下去。这样，如果 m 是整数，例 2 的解法只给出一个特解(42.7)，还缺少一个特解。

这个问题并不是贝塞耳方程特有的。只要 x_0 是微分方程的正则奇点，而判定方程两根之差 $s_1 - s_2$ 是整数 h(不妨认为整数 h 是正的，这只不过是认定 s_1 为较大的根，s_2 为较小的根)，就可能出现这个问题。事实上，在 $m \leqslant 1$ 而 $n \leqslant 2$ 的条件下，(42.4)是

$$
\begin{cases}
y'' = s(s-1)a_s(x-x_0)^{s-2} + \cdots \\
\qquad + (s+k)(s+k-1)a_{s+k}(x-x_0)^{s+k-2} + \cdots \\
\quad = \sum_{k=0}^{\infty}(s+k)(s+k-1)a_{s+k}(x-x_0)^{s+k-2}, \\
p(x)y' = [p_{-1}(x-x_0)^{-1} + \cdots + p_k(x-x_0)^k + \cdots] \\
\qquad \times [sa_s(x-x_0)^{s-1} + \cdots + (s+k)a_{s+k}(x-x_0)^{s+k-1} + \cdots] \\
\qquad = \sum_{k=0}^{\infty}[p_{k-1}sa_s + p_{k-2}(s+1)a_{s+1} + \cdots \\
\qquad\qquad + p_{-1}(s+k)a_{s+k}](x-x_0)^{s+k-2}, \\
q(x)y = [q_{-2}(x-x_0)^{-2} + \cdots + q_k(x-x_0)^k + \cdots] \\
\qquad \times [a_s(x-x_0)^s + \cdots + a_{s+k}(x-x_0)^{s+k} + \cdots] \\
\qquad = \sum_{k=0}^{\infty}[q_{k-2}a_s + q_{k-1}a_{s+1} + \cdots + q_{-2}a_{s+k}](x-x_0)^{s+k-2}.
\end{cases}
$$

把$(x-x_0)^{s+k-2}$项合并，令合并后的系数为零，就得递推公式

$$
\begin{aligned}
& a_{s+k}[(s+k)(s+k-1) + p_{-1}(s+k) + q_{-2}] \\
& \quad + a_{s+k-1}[(s+k-1)p_0 + q_{-1}] + a_{s+k-2}[(s+k-2)p_1 + q_0] \\
& \quad + \cdots + a_s[sp_{k-1} + q_{k-2}] = 0.
\end{aligned} \tag{42.12}
$$

对于判定方程较大的一根s_1，按照(42.12)可以顺利地进行系数的递推，求得一个特解。对于判定方程较小的一根s_2，开头几个系数$a_{s+1}, a_{s+2}, \cdots, a_{s+h-1}$还可以顺利地推出，到$a_{s+h}$就发生了困难，因为这时递推公式是

$$
\begin{aligned}
& a_{s_2+h}[(s_2+h)(s_2+h-1) + p_{-1}(s_2+h) + q_{-2}] \\
& \quad + a_{s_2+h-1}[(s_2+h-1)p_0 + q_{-1}] \\
& \quad + a_{s_2+h-2}[(s_2+h-2)p_1 + p_0] + \cdots + a_{s_2}[s_2p_{h-1} + q_{h-2}] = 0,
\end{aligned}
$$

即

$$
\begin{aligned}
a_{s_2+h}[s_1(s_1-1) + p_{-1}s_1 + q_{-2}] & + a_{s_2+h-1}[(s_1-1)p_0 + q_{-1}] \\
& + a_{s_2+h-2}[(s_1-2)p_1 + p_0] + \cdots \\
& + a_{s_2}[s_2p_{h-1} + q_{h-2}] = 0.
\end{aligned}
$$

既然 s_1 是判定方程(42.6)的根，$s_1(s_1-1)+p_{-1}s_1+q_{-2}=0$，上面这个递推公式成为

$$a_{s_2+k}0+a_{s_2+k-1}[(s_1-1)p_0+q_{-1}]+\cdots$$
$$+a_{s_2}[s_2p_{k-1}+q_{k-2}]=0. \qquad (42.13)$$

要推算的系数 a_{s_2+k} 从递推公式(42.13)中消失了，系数的递推无法进行下去。不过，这是就一般情况而论。在特殊情况下，(42.13)可能是恒等式

$$a_{s_2+k}0+a_{s_2+k-1}0+\cdots+a_{s_2}0=0,$$

系数的递推仍可顺利进行下去。

那么，在这种情况下，第二个特解应当是怎样的呢?附录十一利用朗斯基行列式证明，跟判定方程较小的根 s_2 对应的解的形式是

$$y_2(x)=Ay_1(x)\ln(x-x_0)+\sum_{k=s_2}^{\infty}a_k(x-x_0)^k, \qquad (42.14)$$

其中 $y_1(x)$ 是对应于判定方程较大的根 s_1 的特解。把(42.14)代入微分方程(42.1)，定出常数 A 和各个系数 a，就求得第二个特解。

例 3 在 $x_0=0$ 的邻域上求解整数阶贝塞耳方程

$$x^2y''+xy'+(x^2-m^2)y=0 \quad (m\text{是整数})。$$

解 例 2 已解出判定方程两根为 $s_1=+m$ 和 $s_2=-m$. 对应于较大的根 $s_1=+m$，有一个特解为贝塞耳函数(42.8)。在 m 为整数的情况下，贝塞耳函数(42.8)即

$$J_m(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\,(m+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k}.$$

问题在于第二个特解。硬搬公式(42.10)并没有用处，这是因为

$$J_{-m}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\,\Gamma(-m+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2k},$$

如果 m 是整数，只要 $k<m$，则 $-m+k+1$ 是负整数，而负整数的 Γ 函数为无限大，所以上面这个级数实际上只从 $k=m$ 的项开始，

$$J_{-m}(x)=\sum_{k=m}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\,\Gamma(-m+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2k}.$$

令 $l=k-m$，则

$$J_{-m}(x)=\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^{l+m}\frac{1}{(l+m)!\,\Gamma(l+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2l}$$

$$=(-1)^m\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\frac{1}{(l+m)!\,l!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2l}$$

$$=(-1)^m J_m(x), \tag{42.15}$$

实际上就是第一个特解，不成为第二个特解。

据(42.14)，第二个特解的形式是

$$y_2(x)=AJ_m(x)\ln x+\sum_{k=0}^{\infty}a_{-m+k}x^{-m+k}.$$

把上式代入贝塞耳方程，得

$$A[x^2J_m''+xJ_m'+(x^2-m^2)J_m]+2AxJ_m'$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}(-m+k)(-m+k-1)a_{-m+k}x^{-m+k}$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}(-m+k)a_{-m+k}x^{-m+k}$$

$$+(x^2-m^2)\sum_{k=0}^{\infty}a_{-m+k}x^{-m+k}=0.$$

即

$$A[x^2J_m''+xJ_m'+(x^2-m^2)J_m]+2AxJ_m'$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}[(-m+k)^2-m^2]a_{-m+k}x^{-m+k}$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty} a_{-m+k-2} x^{-m+k}. \qquad (42.16)$$

m阶贝塞耳函数是m阶贝塞耳方程的解，所以上式的第一个[ ]=0。另外，$xJ'_m(x)=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(m+2n)}{n!(m+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2n-1}$的最低幂项是$x^m$项。先把(42.16)里幂次低于$m$的项(即$k<2m$的项)分别集合如下表，$xJ'_m$项这时还不必考虑。

	x^{-m}项	x^{-m+1}项	x^{-m+2}项	…	x^{-m+k}项	…
$\sum_{k=0}^{\infty}\cdots$	$0a_{-m}$	$[(m-1)^2-m^2]a_{-m+1}$	$[(m-2)^2-m^2]a_{-m+2}$	…	$[(m-k)^2-m^2]a_{-m+k}$	…
$\sum_{k=2}^{\infty}\cdots$			a_{-m}	…	a_{-m+k-2}	…

令上表各个幂次合并后的系数分别为零，得

$$0a_{-m}=0,$$
$$[(m-2)^2-m^2]a_{-m+2}+a_{-m}=0,$$
$$[(m-1)^2-m^2]a_{-m+1}=0,$$
$$[(m-3)^2-m^2]a_{-m+3}+a_{-m+1}=0,$$

……………………

$$[(m-k)^2-m^2]a_{-m+k}+a_{-m+k-2}=0,$$

……………………

由此得

a_{-m}任意，

$$a_{-m+2}=\frac{1}{1!(m-1)}\frac{1}{2^2}a_{-m},$$

……………………

$$a_{-m+2n}=\frac{1}{n!(m-n)(m-n+1)\cdots(m-1)}\frac{1}{2^{2n}}a_{-m}$$
$$=\frac{1}{2^m(m-1)!}\frac{(m-n-1)!}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^{-m+2n}a_{-m}.$$

$$a_{-m+1}=0,$$
$$a_{-m+3}=0,$$

……………………

$$a_{-m+2n+1}=0.$$

其次，观察(42.16)里的 x^m(即 $k=2m$)项，令这种项合并后的系数为零，得

$$A\frac{1}{(m-1)!\,2^{m-1}}+0a_m+a_{-m-2}=0.$$

由此得

$$a_m\ \text{任意},\quad A=-(m-1)!\,2^{m-1}a_{-m-2}=\frac{-2}{2^m(m-1)!}a_{-m}.$$

不难验证，从任意常数 a_m 递推下去，所得各项正好组成 $a_mJ_m(x)$，这是我们已经求出的第一解，这里可以弃置不论。这是说，不妨认为 $a_m=0$. 最后，把(42.16)里幂次高于 m 的项(即 $k>2m$ 和 $n>0$ 的项)分别集合如下表。

	x^{m+1}项	x^{m+2}项	x^{m+3}项	x^{m+4}项	…
$2AxJ'_m$	无	$2A\frac{(-1)(m+2)}{(m+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{m+2}$	无	$2A\frac{(-1)^2(m+4)}{2!(m+2)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{m+4}$	…
$\sum\limits_{k=0}^{\infty}\cdots$	$[(m+1)^2-m^2]a_{m+1}$	$[(m+2)^2-m^2]a_{m+2}$	$[(m+3)^2-m^2]a_{m+3}$	$[(m+4)^2-m^2]a_{m+4}$	…
$\sum\limits_{k=2}^{\infty}\cdots$	a_{m-1}	a_m(认为是零)	a_{m+1}	a_{m+2}	…

令上表各个幂次合并后的系数分别为零，得

$$\begin{cases}[(m+1)^2-m^2]a_{m+1}+a_{m-1}=0,\\ 2A\dfrac{(-1)(m+2)}{(m+1)!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{m+2}+[(m+2)^2-m^2]a_{m+2}=0,\\ [(m+3)^2-m^2]a_{m+3}+a_{m+1}=0,\\ 2A\dfrac{(-1)^2(m+4)}{2!(m+2)!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{m+4}+[(m+4)^2-m^2]a_{m+4}+a_{m+2}=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\end{cases}$$

由此得

$$a_{m+1}=-\frac{1}{1(2m+1)}a_{m-1}=0,$$

$$a_{m+2}=-\frac{1}{2(2m+2)}2A\frac{(-1)(m+2)}{(m+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{m+2}$$

$$=\frac{1}{(m-1)!2^m}\cdot\frac{(-1)}{(m+1)!1!}\left(\frac{1}{2}\right)^{m+2}\left(\frac{m+2}{m+1}\right)a_{-m}$$

$$=\frac{1}{(m-1)!2^m}\frac{(-1)^1}{(m+1)!1!}\left(\frac{1}{2}\right)^{m+2}\left(1+\frac{1}{m+1}\right)a_{-m},$$

$$a_{m+3}=-\frac{1}{3(2m+3)}a_{m+1}=0,$$

$$a_{m+4}=-\frac{1}{4(2m+4)}\left[a_{m+2}+2A\frac{(-1)^2(m+4)}{2!(m+2)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{m+4}\right]$$

$$=\frac{1}{(m-1)!2^m}\cdot\left[\frac{(-1)^2}{(m+1)!1!}\left(\frac{1}{2}\right)^{m+2}\left(1+\frac{1}{m+1}\right)\right.$$

$$\left.\cdot\frac{1}{4\cdot 2(m+2)}+\frac{(-1)^2}{2!(m+2)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{m+4}\frac{4(m+4)}{4\cdot 2(m+2)}\right]a_{-m}$$

$$=\frac{1}{(m-1)!2^m}\frac{(-1)^2}{2!(m+2)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{m+4}\left[\left(1+\frac{1}{m+1}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{m+4}{2(m+2)}\right]a_{-m}$$

$$=\frac{1}{(m-1)!2^m}\frac{(-1)^2}{2!(m+2)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{m+4}\left[\left(1+\frac{1}{m+1}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{m+2}\right)\right]a_{-m}$$

$$=\frac{1}{(m-1)!2^m}\frac{(-1)^2}{2!(m+2)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{m+4}\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}\right)\right]a_{-m}.$$

依此类推，

$$a_{m+2n}=\frac{1}{(m-1)!2^m}\frac{(-1)^n}{n!(m+n)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{m+n}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\right.\right.$$

$$+\frac{1}{n-m}\Big)+\Big(\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{n}\Big)\Big]a_{-m},$$

$a_{m+2n+1}=0.$

到这里，终于求得第二个特解

$$y_2(x)=\frac{a_{-m}}{(m-1)!\,2^m}\Big\{(-2\ln x)J_m(x)$$

$$+\sum_{n=0}^{m-1}\frac{(m-n-1)!}{n!}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{-m+2n}$$

$$+\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{n!\,(n-m)!}\Big[\Big(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-m}\Big)$$

$$+\Big(\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{n}\Big)\Big]\Big(\frac{x}{2}\Big)^{-m+2n}\Big\}. \quad (42.17)$$

在数学理论中，通常取 $a_{-m}=-(m-1)!\,2^m/\pi$，并把这个特解与 $\Big[\frac{2}{\pi}(C-\ln 2)-\frac{1}{\pi}\Big(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\Big)\Big]J_m(x)$ 的和叫作 m 阶诺依曼函数，记作 $N_m(x)$，[记号 C 代表欧勒常数

$$\lim_{k\to\infty}\Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}-\ln k\Big)=0.577216\cdots]$$

$$N_m(x)=\frac{2}{\pi}\Big(\ln\frac{x}{2}+C\Big)J_m(x)-\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{m-1}\frac{(m-n-1)!}{n!}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{-m+2n}$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{(-1)^{n-m}}{n!\,(n-m)!}\Big[\Big(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-m}\Big)$$

$$+\Big(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\Big)\Big]\Big(\frac{x}{2}\Big)^{-m+2n}. \quad (42.18)$$

整数阶贝塞耳方程的通解并不是(42.11)而是

$$C_1J_m(x)+C_2N_m(x). \quad (42.19)$$

从(42.8)和(42.18)容易看出，对于小的 x，

$$\begin{cases} J_0(x)\approx 1-\dfrac{1}{4}x^2, \\ N_0(x)\approx \dfrac{2}{\pi}\left(\ln\dfrac{x}{2}+C\right); \end{cases}$$

$$\begin{cases} J_m(x)\approx \dfrac{1}{m!}\left(\dfrac{x}{2}\right)^m, \\ N_m(x)\approx -\dfrac{(m-1)!}{\pi}\left(\dfrac{2}{x}\right)^m \end{cases} (m\neq 0); \tag{42.20}$$

$$J_{-m}(x)\approx \frac{1}{\Gamma(-m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m} \quad (m\neq 0, m\neq \text{整数})。$$

于 $x\to 0$，(42.20)给出 $J_0(x)\to 1$；$J_m(x)\to 0$，$N_m(x)\to -\infty (m\neq 0)$；$J_{-m}(x)\to\infty$. 因此，如果所研究的区域包含 $x=0$ 在内，$J_{-m}(x)$ 和 $N_m(x)$应该排除而只剩下 $J_m(x)$。可以说，贝塞耳方程（不管阶数是否整数）在点 $x=0$ 具有自然的边界条件。

例 4 在 $x_0=0$ 的邻域上求解$\frac{1}{2}$阶贝塞耳方程

$$x^2y''+xy'+\left[x^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]y=0.$$

解 例2已解出判定方程两根为 $s_1=+m$ 和 $s_2=-m$. 在本例，这就是 $s_1=+\frac{1}{2}$和 $s_2=-\frac{1}{2}$. 对应于较大的根 $s_1=+\frac{1}{2}$，有一个特解为贝塞耳函数(42.8). 在 $m=\frac{1}{2}$的情况下，$\frac{1}{2}$阶贝塞耳函数(42.8)即

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\,\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2k}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k+\frac{1}{2}-1\right)\cdots\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2k}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(2k+1)(2k-1)\cdots5\cdot3\cdot1\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}+2k}$$

$$=\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k(2k-2)\cdots4\cdot2\cdot(2k+1)(2k-1)\cdots5\cdot3\cdot1}x^{2k}$$

$$=\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k+1)!}x^{2k}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x. \quad (42.21)$$

判定方程两根之差 $s_1-s_2=1$ 是整数，第二个特解的形式是

$$y_2(x)=AJ_{\frac{1}{2}}(x)\ln x+\sum_{k=-1/2}^{\infty}a_kx^k.$$

把上式代入$\frac{1}{2}$阶贝塞耳方程，得

$$A\left[x^2J''_{\frac{1}{2}}+xJ'_{\frac{1}{2}}+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)J_{\frac{1}{2}}\right]+2AxJ'_{\frac{1}{2}}$$

$$+\sum_{k=-1/2}^{\infty}k(k-1)a_kx^k+\sum_{k=-1/2}^{\infty}ka_kx^k$$

$$+\sum_{k=-1/2}^{\infty}a_kx^{k+2}-\sum_{k=-1/2}^{\infty}\frac{1}{4}a_kx^k=0.$$

$\frac{1}{2}$阶贝塞耳函数是$\frac{1}{2}$阶贝塞耳方程的解，所以上式的[ ]=0. 加以适当归并，上式成为

$$2AxJ'_{\frac{1}{2}}+\sum_{k=-1/2}^{\infty}\left(k^2-\frac{1}{4}\right)a_kx^k+\sum_{k=-1/2}^{\infty}a_kx^{k+2}=0.$$

把各个幂次的项分别集合如下表。

	$x^{-\frac{1}{2}}$项	$x^{\frac{1}{2}}$项	$x^{\frac{3}{2}}$项	$x^{\frac{5}{2}}$项	…	x^{k+2}项	…
$2AxJ'_{\frac{1}{2}}=$		$A\sqrt{\frac{2}{\pi}}$		$-A\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{5}{3!}$	…	$(-1)^{\frac{k}{2}+\frac{3}{4}}A\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2(k+2)}{(k+5/2)!}$ (限于$k=$偶数$+1/2$)	…
$\sum\left(k^2-\frac{1}{4}\right)\times a_k x^k=$	$0a_{-\frac{1}{2}}$	$0a_{\frac{1}{2}}$	$\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]a_{\frac{3}{2}}$	$\left[\left(\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]a_{\frac{5}{2}}$	…	$\left[(k+2)^2-\frac{1}{4}\right]a_{k+2}$	…
$\sum a_k x^{k+2}=$			$a_{-\frac{1}{2}}$	$a_{\frac{1}{2}}$	…	a_k	…

从 $x^{-1/2}$ 项系数为零，知

$$a_{-\frac{1}{2}}\text{任意}.$$

从 $x^{1/2}$ 项系数为零，知

$$A=0,\quad a_{\frac{1}{2}}\text{任意}.$$

不难验证，从任意常数 $a_{\frac{1}{2}}$ 递推下去，所得各项正好组成 $a_{\frac{1}{2}}J_{\frac{1}{2}}(x)$，这是我们已经求出的第一解，这里可以弃置不论。这是说，不妨认为$a_{\frac{1}{2}}=0$. 于是递推出

$$a_{\frac{5}{2}},\ a_{\frac{9}{2}},\ a_{\frac{13}{2}},\cdots\cdots\text{全为零}.$$

从 $x^{3/2}, x^{7/2}, x^{11/2}, \cdots\cdots$等项的系数为零，得

$$a_{\frac{3}{2}}=-\frac{1}{2}a_{-\frac{1}{2}},\qquad a_{\frac{7}{2}}=-\frac{1}{4\cdot 3}a_{\frac{3}{2}}=\frac{1}{4!}a_{-\frac{1}{2}},$$

$$a_{\frac{11}{2}}=-\frac{1}{6\cdot 5}a_{\frac{7}{2}}=-\frac{1}{6!}a_{-\frac{1}{2}},\cdots\cdots.$$

于是，求得第二个特解

$$y_2(x)=a_{-\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\right)=a_{-\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{x}}\cos x.$$

通常取 $a_{-\frac{1}{2}}=\sqrt{2/\pi}$，第二个特解成为

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x. \tag{42.22}$$

本例不出现 $Ay_1(x)\ln x$，这是不同于例 3 的。

$\frac{1}{2}$阶贝塞耳方程的通解是

$$C_1 J_{\frac{1}{2}}(x)+C_2 J_{-\frac{1}{2}}(x). \tag{42.23}$$

习　题

1. 在 $x_0=0$ 的邻域上求解 $x^2y''+2xy'-l(l+1)y=0$. [这个方程即(40.2)]

2. 在 $x_0=0$ 的邻域上求拉盖尔方程 $xy''+(1-x)y'+\lambda y=0$ 的有限解。λ 取什么数值可使级数退化为多项式？这些多项式乘以适当常数使最高幂项成为 $(-x)^n$ 形式就叫作**拉盖尔多项式**，记作 $L_n(x)$. 写出前几个 $L_n(x)$.

3. 在 $x_0=0$ 的邻域上求 $y''-2\lambda y'+\left[\frac{2Z}{x}-\frac{l(l+1)}{x^2}\right]y=0$ 的有限解。λ 取什么数值可使级数退化为多项式？

4. 在 $x_0=0$ 的邻域上求解 m 阶虚宗量贝塞耳方程 $x^2y''+xy'-(x^2+m^2)y=0$，暂且认为 m 非整数。像例 2 那样选取 $a_m=1/2^{\pm m}\Gamma(\pm m+1)$，所得的两个解分别叫作 m 阶和 $-m$ 阶虚宗量贝塞耳函数，分别记作 $I_{\pm m}(x)$。

验证 $I_{\pm m}(x)$ 没有实的零点。

比较 $J_{\pm m}(ix)$ 和 $I_{\pm m}(x)$.

5. 在 $x_0=1$ 的邻域上，求勒让德方程 $(1-x^2)y''-2xy'+l(l+1)y=0$ 的有限解。

6. 在 $x_0=0$ 的邻域上求解 $xy''-xy'+y=0$.

7. 在 $x_0=0$ 的邻域上求解 $xy''+y=0$.

8. 在 $x_0=0$ 的邻域上求解高斯方程（超几何级数微分方程）

$$x(x-1)y''+[(1+\alpha+\beta)x-\gamma]y'+\alpha\beta y=0.$$

9. 在 $x_0=0$ 的邻域上求解汇合超几何级数微分方程

$$xy''+(\gamma-x)y'-\alpha y=0.$$

§43. 斯特姆-刘维本征值问题

以上两节介绍了二阶常微分方程的级数解法，特别是解出了勒让德方程和贝塞耳方程。但是，从数学物理偏微分方程分离变数法引出的常微分方程往往还附有边界条件，这些边界条件可以是明白写出来的，也可以是没有写出来的所谓自然的条件。满足这些边界条件的非零解往往不存在，除非方程的参数取某些特定值。这些特定值叫作**本征值**，相应的非零解叫作**本征函数**。求本征值和本征函数的问题也就叫作**本征值问题**。

研究二阶常微分方程的本征值问题时，通常用适当的函数遍乘微分方程各项，把方程表为**斯特姆-刘维型**

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{dy}{dx}\right]-q(x)y+\lambda\rho(x)y=0 \quad (a\leqslant x\leqslant b). \tag{43.1}$$

附以相应的边界条件，就构成斯特姆-刘维本征值问题。例如

① $a=0, b=l$；$k(x)=$常数，$q(x)=0$，$\rho(x)=$常数。

$$\begin{cases}y''+\lambda y=0,\\ y(0)=0, \quad y(l)=0.\end{cases} \tag{43.2}$$

本征值和本征函数是读者熟悉的 $\lambda=n^2\pi^2/l^2$，$y=C\sin(\pi nx/l)$.

② $a=0, b=\rho_0$；$k(x)=x$，$q(x)=n^2/x^2$，$\rho(x)=x$.

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dx}\left[x\dfrac{dy}{dx}\right]-\dfrac{n^2}{x^2}y+\lambda xy=0 \quad \text{(贝塞耳方程)},\\ y(\rho_0)=0.\end{cases} \tag{43.3}$$

③ $a=-1, b=+1$；$k(x)=1-x^2$，$q(x)=0$，$\rho(x)=1$.

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+\lambda y=0 \quad \text{(勒让德方程)}。 \tag{43.4}$$

④ $a=-1, b=+1$；$k(x)=1-x^2$，$q(x)=\dfrac{m^2}{1-x^2}$，$\rho(x)=1$.

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]-\frac{m^2}{1-x^2}y+\lambda y=0 \quad \text{(缔合勒让德方程)。}$$

(43.5)

⑤ $a=-\infty, b=+\infty$; $k(x)=e^{-x^2}, q(x)=0, \rho(x)=e^{-x^2}$.

$$\frac{d}{dx}\left[e^{-x^2}\frac{dy}{dx}\right]+\lambda e^{-x^2}y=0$$

(即厄密方程 $y''-2xy'+\lambda y=0$). (43.6)

⑥ $a=0, b=+\infty$; $k(x)=xe^{-x}, q(x)=0, \rho(x)=e^{-x}$.

$$\frac{d}{dx}\left[xe^{-x}\frac{dy}{dx}\right]+\lambda e^{-x}y=0$$

(即拉盖尔方程 $xy''+(1-x)y'+\lambda y=0$). (43.7)

在以上各例中，$k(x)$，$q(x)$和 $\rho(x)$在区间(a,b)上都取正值。

请读者注意，如端点 a 或 b 是 $k(x)$的一级零点，在那个端点就存在着自然的边界条件。例如勒让德方程的 $k(x)=1-x^2$，它在端点 $x=\pm1$ 的值 $k(\pm1)=1-(\pm1)^2=0$，在端点确实存在自然的边界条件［见§41］。又如贝塞耳方程的 $k(x)=x$，它在端点 $x=0$ 的值 $k(0)=0$，在端点 $x=0$ 确实存在着自然的边界条件［见§42］。

自然边界条件的存在是不难证明的。斯特姆-刘维型方程即 $k(x)y''+k'(x)y'-q(x)y+\lambda\rho(x)y=0$，亦即

$$y''+\frac{k'(x)}{k(x)}y'+\frac{-q(x)+\lambda\rho(x)}{k(x)}y=0.$$

如端点 $x=a$ 是 $k(x)$的一级零点，则它也就是 $p(x)=k'(x)/k(x)$ 的一阶极点，从而是方程的正则奇点。先计算 p_{-1}，

$$p_{-1}=[p(x)(x-a)]\big|_{x=a}=\left[k'(x)\frac{x-a}{k(x)}\right]\bigg|_{x=a}.$$

运用罗毕达法则，

$$p_{-1}=\left[k'(x)\frac{1}{k'(x)}\right]\bigg|_{x=a}=1.$$

于是，判定方程 $s(s-1)+sp_{-1}+q_{-2}=0$ 成为

$$s^2+q_{-2}=0,$$

它的两个根是

$$s_1=+\sqrt{q_{-2}}, \quad s_2=-\sqrt{q_{-2}}.$$

对于物理上有意义的问题，根 s_1 和 s_2 应为实数，所以 s_1 和 s_2 一正一负，或者同为零。如 s_1 和 s_2 一正一负，对应于负根 s_2 的解含有 $(x-a)$ 的负幂项因而在 $x=a$ 成为无限大。如 $s_1=s_2=0$，则有一个解含有 $\ln(x-a)$ 项因而在 $x=a$ 成为无限大。在 $x=a$ 成为无限大的解应该排除，这正是自然边界条件。

斯特姆-刘维本征值问题是对斯特姆-刘维型方程附加以齐次的第一类、第二类或第三类边界条件，或者是自然边界条件。微分方程里的 $k(x)$，$q(x)$ 和 $\rho(x)$ 不妨认为只取正值。

现在把这类本征值问题的共同性质列举如下。

① 如 $k(x)$ 及其导数连续，$q(x)$ 连续或者最多在边界有一阶极点，则存在无限多本征值 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\lambda_3\leqslant\lambda_4\leqslant\cdots$，相应地有本征函数 $y_1(x), y_2(x), y_3(x), y_4(x), \cdots$。这些本征函数的排列次序正好使节点个数依次增多(节点个数的性质在量子力学中可用以很方便地判断哪个波函数代表基态)。

以上性质的证明已超出本书范围。

② 所有本征值 $\lambda_n\geqslant 0$.

证 本征函数 $y_n(x)$ 和本征值 λ_n 满足

$$-\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{dy_n}{dx}\right]+q(x)y_n=\lambda_n\rho(x)y_n.$$

用 y_n 遍乘各项，并逐项从 a 到 b 积分，得

$$\begin{aligned}\lambda_n\int_a^b \rho y_n^2 dx &= -\int_a^b y_n\frac{d}{dx}\left[k\frac{dy_n}{dx}\right]dx+\int_a^b qy_n^2dx\\ &= -\left[ky_n\frac{dy_n}{dx}\right]_a^b+\int_a^b k\left(\frac{dy_n}{dx}\right)^2dx+\int_a^b qy_n^2dx\end{aligned}$$

$$=(ky_ny_n')_{x=a}-(ky_ny_n')_{x=b}+\int_a^b ky_n'^2dx+\int_a^b qy_n^2dx. \tag{43.8}$$

(43.8) 右边的两个积分明显是正的。再看 (43.8) 右边第一项 $(ky_ny_n')_{x=a}$. 如果在端点 $x=a$ 的边界条件是第一类齐次条件 $y_n(a)=0$, 或第二类齐次条件 $y_n'(a)=0$, 或自然边界条件 $k(a)=0$, 这一项 $(ky_ny_n')_{x=a}$ 显然为零。如果在端点 $x=a$ 的边界条件是第三类齐次条件 $(y_n-hy_n')_{x=a}=0$, 则

$$(ky_ny_n')_{x=a}=[k(y_n-hy_n')y_n'+hky_n'^2]_{x=a}=h(ky_n'^2)_{x=a}\geqslant 0.$$

再看(43.8)右边第二项 $-(ky_ny_n')_{x=b}$. 如果在端点 $x=b$ 的边界条件是第一类齐次条件 $y_n(b)=0$, 或第二类齐次条件 $y_n'(b)=0$, 或自然边界条件 $k(b)=0$, 这一项 $(ky_ny_n')_{x=b}$ 显然为零。如果在端点 $x=b$ 的边界条件是第三类齐次条件 $(y_n+hy_n')_{x=b}=0$, 则

$$-(ky_ny_n')_{x=b}=-[k(y_n+hy_n')y_n'-hky_n'^2]_{x=b}=h(ky_n'^2)_{x=b}\geqslant 0.$$

既然(43.8)右边各项都 $\geqslant 0$, 左边必然也 $\geqslant 0$, 即

$$\lambda_n\int_a^b \rho y_n^2dx\geqslant 0.$$

上式里的定积分明显是正的，因而 $\lambda_n\geqslant 0$.

③ 相应于不同本征值 λ_m 和 λ_n 的本征函数 $y_m(x)$ 和 $y_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上带权重 $\rho(x)$ 正交，即

$$\int_a^b y_m(x)y_n(x)\rho(x)dx=0. \tag{43.9}$$

证　本征函数 y_m 和 y_n 分别满足

$$\frac{d}{dx}[ky_m']-qy_m+\lambda_m\rho y_m=0,$$

$$\frac{d}{dx}[ky_n']-qy_n+\lambda_n\rho y_n=0.$$

前一式遍乘以 y_n, 后一式遍乘以 y_m, 然后相减,

$$y_n\frac{d}{dx}[ky_m']-y_m\frac{d}{dx}[ky_n']+(\lambda_m-\lambda_n)\rho y_m y_n=0.$$

逐项从 a 到 b 积分，得

$$0=\int_a^b\left[y_n\frac{d}{dx}(ky_m')-y_m\frac{d}{dx}(ky_n')\right]dx+(\lambda_m-\lambda_n)\int_a^b\rho y_m y_n dx$$

$$=\int_a^b\frac{d}{dx}[ky_n y_m'-ky_m y_n']dx+(\lambda_m-\lambda_n)\int_a^b\rho y_m y_n dx$$

$$=(ky_n y_m'-ky_m y_n')_{x=b}-(ky_n y_m'-ky_m y_n')_{x=a}$$

$$+(\lambda_m-\lambda_n)\int_a^b\rho y_m y_n dx. \tag{43.10}$$

现在看右边第一项 $(ky_n y_m'-ky_m y_n')_{x=b}$. 如果在端点 $x=b$ 的边界条件是第一类齐次条件 $y_m(b)=0$ 和 $y_n(b)=0$，或第二类齐次条件 $y_m'(b)=0$ 和 $y_n'(b)=0$，或自然边界条件 $k(b)=0$，这一项 $(ky_n y_m'-ky_m y_n')_{x=b}$ 显然为零。如果在端点 $x=b$ 的边界条件是第三类齐次条件 $(y_m+hy_m')_{x=b}=0$ 和 $(y_n+hy_n')_{x=b}=0$，则

$$[ky_n y_m'-ky_m y_n']_{x=b}=\frac{1}{h}[ky_n(y_m+hy_m')$$

$$-ky_m(y_n+hy_n')]_{x=b}=0.$$

总之，(43.10)右边第一项为零。同理，右边第二项为零。于是，(43.10)成为

$$(\lambda_m-\lambda_n)\int_a^b\rho y_m y_n dx=0.$$

既然 $\lambda_m\neq\lambda_n$ 即 $\lambda_m-\lambda_n\neq0$，上式即 $\int_a^b\rho y_m y_n dx=0$.

如权重 $\rho(x)\equiv1$，(43.9)简单地称为正交。

④ 本征函数族 $y_1(x), y_2(x), y_3(x), \cdots$ 是完整的。函数 $f(x)$ 如具有连续一阶导数和逐段连续二阶导数且满足本征函数族 $y_n(x)$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ 所满足的边界条件，必可展开为绝对且一致收敛的级数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n y_n(x). \tag{43.11}$$

这个性质的证明也超出本书范围。

(43.11) 右边的级数叫作**广义傅里叶级数**，f_n 叫作**广义傅里叶系数**。现在利用正交关系(43.9)推导广义傅里叶系数的计算公式。用 $\rho(x)y_m(x)$遍乘(43.11)各项并逐项积分，

$$\int_a^b f(\xi)y_m(\xi)\rho(\xi)d\xi=\sum_{n=1}^{\infty}f_n\int_a^b \rho y_m y_n dx.$$

由于正交关系(43.9)，上式右边除去含 f_m 的一项之外全为零，

$$\int_a^b f(\xi)y_m(\xi)\rho(\xi)d\xi=f_m\int_a^b \rho(x)[y_m(x)]^2dx.$$

上式右边那个积分的平方根叫作 $y_m(x)$的**模**，记作 N_m，上式写成

$$f_m=\frac{1}{N_m^2}\int_a^b f(\xi)y_m(\xi)\rho(\xi)d\xi. \tag{43.12}$$

这就是广义傅里叶系数的计算公式。

如果本征函数的模等于一，就叫作**规一化的本征函数**。对于正交规一化的本征函数族，公式(43.12)简化为

$$f_m=\int_a^b f(\xi)y_m(\xi)\rho(\xi)d\xi. \tag{43.13}$$

其实，非规一化的本征函数 $f_n(x)$，只要除以模(这是常数)也就成为规一化的了。

为了应用公式(43.12)或(43.13)，必须先肯定本征函数族是(带权重)正交的，还必须能计算本征函数的模。所以，在研究特殊函数时，正交关系和模是两个重要课题。

以上的讨论假定了本征函数是实函数。但本征函数也可以是复函数，例如，方程(36.62)即 $\Phi''+\lambda\Phi=0$ 连同自然的周期条件 $\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)$构成本征值问题，本征函数是(36.66)即实函数

$$1, \cos\varphi, \cos 2\varphi, \cdots, \sin\varphi, \sin 2\varphi, \sin 3\varphi, \cdots;$$

但是也可以说，本征函数是复函数

$$\cdots e^{-i3\varphi}, e^{-i2\varphi}, e^{-i\varphi}, 1, e^{i\varphi}, e^{i2\varphi}, e^{i3\varphi}, \cdots.$$

对于复的本征函数，正交关系(43.9)应修改为

$$\int_a^b [y_m(x)]^* y_n(x) \rho(x) dx = 0. \tag{43.14}$$

模 N_m 的定义应修改为

$$N_m^2 = \int_a^b [y_m(x)]^* y_m(x) \rho(x) dx. \tag{43.15}$$

§ 40 并没有把球坐标系和柱坐标系中的分离变数法进行到底。现在，勒让德方程和贝塞耳方程已经解出，下面两章将继续研究球坐标系和柱坐标系中的分离变数法。

限于篇幅，在特殊函数之中，本书只讨论球函数和柱函数。附录十七至十九简略介绍厄密多项式、拉盖尔多项式和车贝雪夫多项式。

第十三章　球函数

§44. 轴对称球函数

用球坐标系，对拉普拉斯方程和亥姆霍兹方程进行分离变数（见§40），得到球函数方程

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+l(l+1)Y=0. \quad (44.1)$$

继续分离变数，则球函数

$$Y(\theta,\varphi)=(A\cos m\varphi+B\sin m\varphi)\Theta(\theta), \quad (44.2)$$

其中 $\Theta(\theta)$需从缔合勒让德方程

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2}-2x\frac{d\Theta}{dx}+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]\Theta=0 \quad (44.3)$$

解出，式中的 x 是

$$x=\cos\theta. \quad (44.4)$$

如果所研究的问题具有对称轴，自然就取这对称轴作为球坐标的极轴，从而问题跟 φ 无关。从(44.2)看，这是说，$m=0$. 而在 $m=0$ 的情况下，缔合勒让德方程(44.3)成为 l 阶勒让德方程

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2}-2x\frac{d\Theta}{dx}+l(l+1)\Theta=0. \quad (44.5)$$

(一) 勒让德多项式

勒让德方程已在§41 例2解出。这个方程在 $x=\pm1$(即 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$) 有自然边界条件，从而构成本征值问题。本征值是 $l(l+1)$(l 为整数)。在 l 为整数的条件下，勒让德方程的两个线性独立的特解之一退化为 l 次多项式，叫做 l 阶**勒让德多项式**，通常记作 $P_l(x)$. 这就是本征函数。这样，在轴对称的条件下，球函数

(44.2)成为 $P_l(x)$. $P_l(x)$ 可说是轴对称球函数。

现在具体写出勒让德多项式。通常约定，用适当的常数乘本征函数，使最高次幂项 x^l 的系数

$$a_l=\frac{(2l)!}{2^l(l!)^2}.$$

利用系数递推公式(41.5)

$$a_k=\frac{(k+2)(k+1)}{(k-l)(k+l+1)}a_{k+2}$$

就可把其他系数一一推算出来。例如

$$a_{l-2}=\frac{l(l-1)}{(-2)(2l-1)}a_l=-\frac{l(l-1)}{2(2l-1)}\frac{(2l)!}{2^l l!\,l!}$$

$$=-\frac{1}{2(2l-1)}\ \frac{(2l)!}{2^l l\cdot(l-1)!\,(l-2)!}$$

$$=(-1)^1\frac{(2l-2)!}{2^l(l-1)!\,(l-2)!},$$

$$a_{l-4}=\frac{(l-2)(l-3)}{(-4)(2l-3)}a_{l-2}$$

$$=(-1)^2\frac{(l-2)(l-3)}{2\cdot 2!\ (2l-3)}\ \frac{(2l-2)!}{2^l(l-1)!\,(l-2)!}$$

$$=(-1)^2\frac{1}{2\cdot 2!\,(2l-3)}\ \frac{(2l-2)!}{2^l(l-1)(l-2)!\,(l-4)!}$$

$$=(-1)^2\frac{(2l-4)!}{2!\,2^l(l-2)!\,(l-4)!},$$

$$a_{l-6}=\frac{(l-4)(l-5)}{(-6)(2l-5)}a_{l-4}$$

$$=(-1)^3\frac{(l-4)(l-5)}{2\cdot 3(2l-5)}\ \frac{(2l-4)!}{2!\,l^l(l-2)!\,(l-4)!}$$

$$=(-1)^3\frac{1}{2\cdot 3!\,(2l-5)}\ \frac{(2l-4)!}{2^l(l-2)(l-3)!\,(l-6)!}$$

$$=(-1)^3\frac{(2l-6)!}{3!\,2^l(l-3)!\,(l-6)!},$$

$$a_{l-2n}=(-1)^n\frac{(2l-2n)!}{n!\,2^l(l-n)!\,(l-2n)!}.$$

这样，勒让德多项式终于具体写出：

$$P_l(x)=\sum_{k=0}^{\frac{l}{2}\text{或}\frac{l-1}{2}}(-1)^k\frac{(2l-2k)!}{2^l k!\,(l-k)!\,(l-2k)!}x^{l-2k}. \qquad (44.6)$$

例如，头三个勒让德多项式是

$$P_0(x)=1, \qquad P_1(x)=x=\cos\theta,$$

$$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)=\frac{1}{4}(3\cos 2\theta+1).$$

其余的勒让德多项式以及它们的图象参看附录十二。

如 $l=$ 奇数 $2n+1$，则 $P_l(x)$ 只含奇次幂，从而 $P_{2n+1}(0)=0$. 如 $l=$ 偶数 $2n$，则 $P_{2n}(0)=P_{2n}(x)$ 的常数项。按 (44.6)，这是说，

$$P_{2n}(0)=(-1)^n\frac{(2n)!}{2^n n!\,2^n n!}=(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}.$$

勒让德多项式还有微分表示式

$$P_l(x)=\frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l. \qquad (44.7)$$

这叫作洛德利格斯公式。

证 用二项式定理把 $(x^2-1)^l$ 展开，

$$\frac{1}{2^l l!}(x^2-1)^l=\frac{1}{2^l l!}\sum_{k=0}^{l}\frac{l!}{(l-k)!\,k!}(x^2)^{l-k}(-1)^k$$

$$=\sum_{k=0}^{l}(-1)^k\frac{1}{2^l k!\,(l-k)!}x^{2l-2k}.$$

把上式求导 l 次。凡是幂次 $2l-2k$ 低于 l 的项在 l 次求导过程中成为零，所以只需保留幂次 $2l-2k\geqslant l$ 的项，即 $k\leqslant l/2$ 的项。这样，

$$\frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l$$

$$=\sum_{k=0}^{\frac{l}{2}或\frac{l-1}{2}}(-1)^k\frac{(2l-2k)(2l-2k-1)\cdots(l-2k+1)}{2^l k!(l-k)!}x^{l-2k}$$

$$=\sum_{k=0}^{\frac{l}{2}或\frac{l-1}{2}}(-1)^k\frac{(2l-2k)!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!}x^{l-2k}=P_l(x).$$

按照科希公式(9.5)，微分表示式(44.7)可表为路积分

$$P_l(x)=\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2^l}\oint_C\frac{(z^2-1)^l}{(z-x)^{l+1}}dz, \tag{44.8}$$

C 为 z 平面上围绕 $z=x$ 点的任一闭合回路。这叫作施列夫利积分。

(44.8)还可以进一步表为定积分。为此，取 C 为圆周，圆心在 $z=x$，半径为$\sqrt{|x^2-1|}$．在 C 上，$z-x=\sqrt{x^2-1}\,e^{i\psi}$，(44.8)成为

$$P_l(x)=\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2^l}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{[x+\sqrt{x^2-1}\,e^{i\psi}-1]^l}{(\sqrt{x^2-1})^{l+1}(e^{i\psi})^{l+1}}[i\sqrt{x^2-1}e^{i\psi}d\psi]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{x^2+2x\sqrt{x^2-1}\,e^{i\psi}+(x^2-1)e^{i2\psi}-1}{2\sqrt{x^2-1}e^{i\psi}}\right]^l d\psi$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[x+\sqrt{x^2-1}\frac{1}{2}(e^{-i\psi}+e^{i\psi})\right]^l d\psi.$$

从 x 回到原来的变数 θ，$x=\cos\theta$，则

$$P_l(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos\theta+i\sin\theta\cos\psi]^l d\psi. \tag{44.9}$$

这叫作拉普拉斯积分。从(44.9)很容易看出 $|P_l(x)|\leqslant 1$，$P_l(1)=1$.

(二) 勒让德多项式的正交关系

作为斯特姆-刘维本征值问题的正交关系(43.9)的特例，不同阶的勒让德多项式在区间$(-1,+1)$上正交，

$$\int_{-1}^{+1}P_k(x)P_l(x)dx=0 \quad (k\neq l). \tag{44.10}$$

如果从 x 回到原来的变数 θ，则(44.10) 应是

$$\int_0^\pi P_k(\cos\theta)P_l(\cos\theta)\sin\theta d\theta=0 \quad (k\neq l). \tag{44.11}$$

(三) 勒让德多项式的模

现在计算勒让德多项式 $P_l(x)$的模 N_l，

$$N_l^2=\int_{-1}^{+1}[P_l(x)]^2dx.$$

把上式的 $P_l(x)$用微分式(44.7)表出，这便于分部积分，

$$\begin{aligned}N_l^2&=\frac{1}{2^{2l}(l!)^2}\int_{-1}^{+1}\frac{d^l(x^2-1)^l}{dx^l}\ \frac{d}{dx}\left[\frac{d^{l-1}(x^2-1)^l}{dx^{l-1}}\right]dx\\&=\frac{1}{2^{2l}(l!)^2}\left[\frac{d^l(x^2-1)^l}{dx^l}\ \frac{d^{l-1}(x^2-1)^l}{dx^{l-1}}\right]_{-1}^{+1}\\&\quad-\frac{1}{2^{2l}(l!)^2}\int_{-1}^{+1}\frac{d^{l-1}(x^2-1)^l}{dx^{l-1}}\ \frac{d}{dx}\left[\frac{d^l(x^2-1)^l}{dx^l}\right]dx.\end{aligned}$$

这里$(x^2-1)^l=(x-1)^l(x+1)^l$以 $x=\pm1$ 为 l 级零点，所以它的 $l-1$ 阶导数 $\frac{d^{l-1}(x^2-1)^l}{dx^{l-1}}$以 $x=\pm1$ 为一级零点，从而上式已积出部分为零，

$$N_l^2=\frac{(-1)^1}{2^{2l}(l!)^2}\int_{-1}^{+1}\frac{d^{l-1}(x^2-1)^l}{dx^{l-1}}\ \frac{d^{l+1}(x^2-1)^l}{dx^{l+1}}dx.$$

一次又一次地分部积分计 l 次，即得

$$N_l^2=\frac{(-1)^l}{2^{2l}(l!)^2}\int_{-1}^{+1}(x^2-1)^l\,\frac{d^{2l}(x^2-1)^l}{dx^{2l}}dx.$$

这里$(x^2-1)^l$ 是 $2l$ 次多项式，它的 $2l$阶导数也就是最高幂项 x^{2l} 的 $2l$ 阶导数即$(2l)!$。于是，

$$N_l^2=(-1)^l\frac{(2l)!}{2^{2l}(l!)^2}\int_{-1}^{+1}(x^2-1)^l dx.$$

从 x 回到原来的变数 θ，$x=\cos\theta$，则 $(x^2-1)^l=(-1)^l\sin^{2l}\theta$，而

$dx=-\sin\theta d\theta$，因而

$$N_l^2=(-1)^{2l+1}\frac{(2l)!}{2^{2l}(l!)^2}\int_\pi^0\sin^{2l+1}\theta d\theta=\frac{(2l)!}{2^{2l}(l!)^2}\int_0^\pi\sin^{2l+1}\theta d\theta$$

$$=\frac{(2l)!}{2^{2l}(l!)^2}2\int_0^{\pi/2}\sin^{2l+1}\theta d\theta.$$

应用附录七的定积分公式(五)，

$$N_l^2=\frac{(2l)!}{2^{2l}(l!)^2}2\frac{2l(2l-2)(2l-4)\cdots6\cdot4\cdot2}{(2l+1)(2l-1)(2l-3)\cdots5\cdot3}$$

$$=\frac{(2l)!}{2^{2l}(l!)^2}2\frac{2^l l!}{(2l+1)(2l-1)\cdots5\cdot3}$$

$$=\frac{(2l)!}{2^l l!}2\frac{1}{(2l+1)(2l-1)\cdots5\cdot3}=\frac{(2l)!}{(2l+1)!}2=\frac{2}{2l+1}.$$

终于求得模 N_l，

$$N_l=\sqrt{\frac{2}{2l+1}}. \tag{44.12}$$

（四）广义傅里叶级数

根据斯特姆-刘维本征值问题的性质 ④[见§43]，在区间 $-1\leqslant x\leqslant+1$ 即 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 上，以勒让德多项式为基本函数族，可把函数 $f(x)$ 展开为广义傅里叶级数，

$$\begin{cases}f(x)=\sum\limits_{l=0}^{\infty}f_lP_l(x),\\ \text{系数 } f_l=\dfrac{2l+1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{+1}f(x)P_l(x)dx,\end{cases} \tag{44.13}$$

即

$$\begin{cases}f(\theta)=\sum\limits_{l=0}^{\infty}f_lP_l(\cos\theta),\\ \text{系数 } f_l=\dfrac{2l+1}{2}\displaystyle\int_0^\pi f(\theta)P_l(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta.\end{cases} \tag{44.14}$$

（五）母函数与递推公式

设在单位球北极置 $4\pi\varepsilon_0$ 单位正电荷（图 71），则在球内一点

M(它的球坐标为 r,θ,φ)的静电势为

$$\frac{1}{d}=\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}}.$$

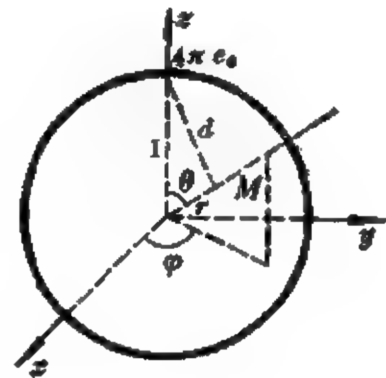


图 71

静电势 $1/d$ 满足拉普拉斯方程。作为拉普拉斯方程的解而又以球坐标的极轴为对称轴，$1/d$ 一般应是(40.4) 与轴对称球函数 $P_l(x)$的乘积的叠加，

$$\frac{1}{d}=\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l+B_l\frac{1}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta).$$

静电势 $1/d$ 在原点是有限的，所以上式中所有 $B_l=0$. 这样，

$$\frac{1}{d}=\sum_{l=0}^{\infty}A_l r^l P_l(\cos\theta). \tag{44.15}$$

展开式 (44.15) 的系数 A_l 本当按照 (44.13)或(44.14)计算。但这里拟采用一个较简便的变通办法。在(44.15)两边置 $\theta=0$，

$$\frac{1}{1-r}=\sum_{l=0}^{\infty}A_l r^l P_l(1)=\sum_{l=0}^{\infty}A_l r^l. \tag{44.16}$$

另一方面，不难在 $r=0$ 的邻域上把 $1/(1-r)$ 展为泰勒级数

$$\frac{1}{1-r}=1+r+r^2+r^3+\cdots+r^l+\cdots. \tag{44.17}$$

比较(44.16)和(44.17)即知

$$A_l=1.$$

于是，(44.15)成为

$$\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}}=\sum_{l=0}^{\infty}r^l P_l(\cos\theta). \tag{44.18}$$

$1/\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}$ 因此叫作勒让德多项式的母函数。

(44.18)只在球内($r<1$)收敛，在球外应代之以

$$\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta).$$

对于半径为R的球，上面两个式子应修改成

$$\frac{1}{\sqrt{R^2-2rR\cos\theta+r^2}}=\begin{cases}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{R^{l+1}}r^lP_l(\cos\theta) & (r<R),\\ \sum_{l=0}^{\infty}R^l\frac{1}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta) & (r>R).\end{cases} \tag{44.19}$$

利用母函数还可以导出勒让德多项式的递推公式。先把(44.18)写成

$$\frac{1}{\sqrt{1-2rx+r^2}}=\sum_{l=0}^{\infty}r^lP_l(x). \tag{44.20}$$

对r求导，

$$\frac{x-r}{(1-2rx+r^2)^{3/2}}=\sum_{l=0}^{\infty}lr^{l-1}P_l(x).$$

两边同乘以$(1-2rx+r^2)$，得

$$\frac{x-r}{\sqrt{1-2rx+r^2}}=(1-2rx+r^2)\sum_{l=0}^{\infty}lr^{l-1}P_l(x).$$

即

$$(x-r)\sum_{l=0}^{\infty}r^lP_l(x)=(1-2rx+r^2)\sum_{l=0}^{\infty}lr^{l-1}P_l(x).$$

比较两边的r^k的系数，得

$$xP_k(x)-P_{k-1}(x)=(k+1)P_{k+1}(x)-2xkP_k(x)+(k-1)P_{k-1}(x),$$

即递推公式

$$(k+1)P_{k+1}(x)-(2k+1)xP_k(x)+kP_{k-1}(x)=0. \tag{44.21}$$

（六）例题

例1　在本来是匀强的静电场中放置均匀介质球。本来的电

场强度是 E_0，球的半径是 a，介电常数为 ε。试求解介质球内外的电场强度。

解 采用球坐标系，以介质球的球心为坐标系的极点。通过球心而平行于 E_0 的直线显然是对称轴，取对称轴作为球坐标系的极轴。

由于介质球的极化，球面出现束缚电荷，电场强度 $\boldsymbol{E}=-\nabla u$ 在球面上不连续，$\Delta u=\nabla\cdot\nabla u$ 在球面上没有意义。因此，应区分球外的电势 u_e 和球内的电势 u_i，两者在球面上通过衔接条件而联系起来。球外的电势满足拉普拉斯方程，距球无限远处的电场保持为匀强的 $\boldsymbol{E}_0$，

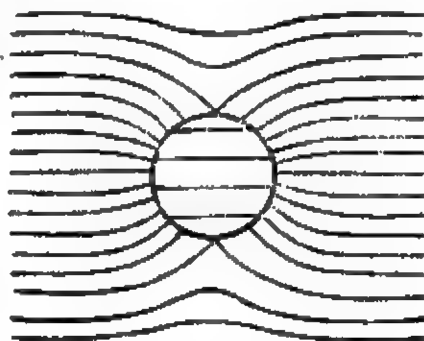


图 72

$$\begin{cases}\Delta_3 u_e=0 \quad (r>a),\\ u|_{r\to\infty}\sim -E_0 z=-E_0 r\cos\theta.\end{cases}$$

球内的电势 u_i 也满足拉普拉斯方程，

$$\Delta_3 u_i=0 \quad (r<a)$$

衔接条件是：电势在球面上连续，电位移 $\boldsymbol{D}=\varepsilon\varepsilon_0\boldsymbol{E}=-\varepsilon\varepsilon_0\nabla u$ 的法向分量即 $-\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial u}{\partial r}$ 连续（这就假定了介质球本来是不带电的），

$$\begin{cases}u_e|_{r=a}=u_i|_{r=a},\\ \varepsilon_0\dfrac{\partial u_e}{\partial r}\Big|_{r=a}=\varepsilon\varepsilon_0\dfrac{\partial u_i}{\partial r}\Big|_{r=a}.\end{cases}$$

本例的极轴既然是对称轴，就只需要轴对称的球函数即勒让德多项式。

考虑到(40.4)，可把球外的电势表为

$$u_e=\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l+B_l\frac{1}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta).$$

对于很大的 r，上式里的 A_0 项和 B_l/r^{l+1} 项远远小于 r^l 项。把上

式代入无限远处的边界条件，得

$$A_1 r P_1(\cos\theta)+A_2 r^2 P_2(\cos\theta)+\cdots$$
$$+A_l r^l P_l(\cos\theta)+\cdots=-E_0 r\cos\theta.$$

左边是以勒让德多项式为基本函数族的广义傅里叶级数，这提示我们把右边也展开为同类的广义傅里叶级数。但是，右边其实已经是广义傅里叶级数，不过它只有一个单项即 $-E_0 r P_1(\cos\theta)$. 比较两边系数，知

$$A_1=-E_0,\quad A_l=0\quad (l\neq 0,1).$$

这样，球外的电势 u_e 可表为

$$u_e=A_0-E_0 r P_1(\cos\theta)+\sum_{l=0}^{\infty}B_l\frac{1}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta).$$

球内的电势可类似地表为

$$u_i=\sum_{l=0}^{\infty}\left(C_l r^l+D_l\frac{1}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta).$$

在球心 $r=0$ 有一个自然的边界条件，即电势 u_i 应是有限的，所以上式里所有 $D_l=0$. 这样，球内的电势 u_i 可表为

$$u_i=\sum_{l=0}^{\infty}C_l r^l P_l(\cos\theta).$$

球内外的电势的联系建立于衔接条件即

$$\begin{cases}A_0-E_0 a P_1(\cos\theta)+\sum\limits_{l=0}^{\infty}B_l\dfrac{1}{a^{l+1}}P_l(\cos\theta)=\sum\limits_{l=0}^{\infty}C_l a^l P_l(\cos\theta),\\ -E_0 P_1(\cos\theta)-\sum\limits_{l=0}^{\infty}(l+1)B_l\dfrac{1}{a^{l+2}}P_l(\cos\theta)\\ \qquad=\varepsilon\sum\limits_{l=0}^{\infty}lC_l a^{l-1}P_l(\cos\theta).\end{cases}$$

比较两边系数，得

$$\begin{cases}A_0+B_0\dfrac{1}{a}=C_0,\\ B_0\dfrac{1}{a^2}=0;\end{cases}\qquad \begin{cases}-E_0a+B_1\dfrac{1}{a^2}=C_1a,\\ -E_0-2B_1\dfrac{1}{a^3}=\varepsilon C_1;\end{cases}$$

$$\begin{cases}B_l\dfrac{1}{a^{l+1}}=C_la^l,\\ -(l+1)B_l\dfrac{1}{a^{l+2}}=\varepsilon lC_la^{l-1}\end{cases}\quad (l\neq 0,1).$$

由此解得

$$\begin{cases}B_0=0,\\ C_0=A_0;\end{cases}\qquad \begin{cases}B_1=\dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}a^3E_0,\\ C_1=-\dfrac{3}{\varepsilon+2}E_0;\end{cases}\qquad \begin{cases}B_l=0,\\ C_l=0\end{cases}\quad (l\neq 0,1).$$

这样，本例的答案是

$$\begin{cases}u_e=A_0-E_0r\cos\theta+\dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}a^3E_0\dfrac{1}{r^2}\cos\theta,\\ u_i=A_0-\dfrac{3}{\varepsilon+2}E_0r\cos\theta.\end{cases}$$

答案中出现任意常数 A_0，这是由于我们没有规定电势的零点。

球内电势 u_i 又可表为

$$u_i=A_0-\frac{3}{\varepsilon+2}E_0z.$$

由此可见，球内场强 $\boldsymbol{E}_i=-\nabla u$ 仍沿 $\boldsymbol{E}_0$ 方向，其大小

$$E_i=-\frac{\partial u_i}{\partial z}=\frac{3}{\varepsilon+2}E_0.$$

这是说，$\boldsymbol{E}_i$ 仍为匀强电场，只是按一定比率削弱了。球内极化强度

$$P_i=\varepsilon_0(\varepsilon-1)E_i=\varepsilon_0 3\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}E_0$$

也是常数。这说明球的极化是均匀的。

本例可移用于静磁场。在匀强磁场 H_0 中放置导磁率为 μ 的磁介质球，球内的磁场仍是匀强的，但大小

$$H_i=\frac{3}{\mu+2}H_0.$$

球内磁化强度

$$M_i=(\mu-1)H_i=3\frac{\mu-1}{\mu+2}H_0.$$

H_i 不同于 H_0 这个现象叫作磁介质的退磁效应，$(H_0-H_i)/M_i$ 叫作退磁因子。对于球形磁介质，

$$\text{退磁因子}=\frac{H_0-H_i}{M_i}=\frac{1}{3}.$$

例2 均匀介质球，半径为 a，介电常数为 ε. 把介质球放在点电荷 $4\pi\varepsilon_0 q$ 的电场中，球心跟点电荷相距 d(图 73)。求解这个静电场中的电势。

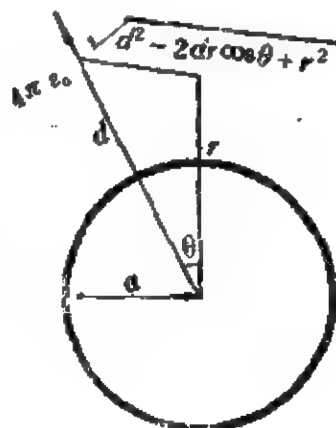


图 73

解 球心和点电荷的联线是对称轴，取作球坐标的极轴，极点则取在球心。

本例也应区分球外电势 u_e 和球内电势 u_i 并通过衔接条件联系起来。

假如没有介质球，电势本来应当是

$$\frac{q}{\sqrt{d^2-2rd\cos\theta+r^2}}.$$

因此，不妨令

$$u_e=\frac{q}{\sqrt{d^2-2rd\cos\theta+r^2}}+v_e,$$

而集中注意力于 v_e.

$$\begin{cases}\Delta_3 v_e=0 & (r>a),\\ \lim\limits_{r\to\infty} v_e=0;\end{cases}\quad \Delta_3 u_i=0;$$

$$\begin{cases} u_e\big|_{r=a} = u_i\big|_{r=a}, \\ \dfrac{\partial u_e}{\partial r}\Big|_{r=a} = \varepsilon \dfrac{\partial u_i}{\partial r}\Big|_{r=a}. \end{cases}$$

考虑到无限远处的边界条件，v_e 可表为

$$v_e = \sum_{l=0}^{\infty} B_l \frac{1}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta).$$

考虑到球心的自然边界条件，u_i 可表为

$$u_i = \sum_{l=0}^{\infty} C_l r^l P_l(\cos\theta).$$

问题在于把 u_e 和 u_i 在球面上通过衔接条件而联系起来。为此，先要利用(44.19)把 $q/\sqrt{d^2-2rd\cos\theta+r^2}$ 展开

$$\frac{q}{\sqrt{d^2-2rd\cos\theta+r^2}} = q\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{d^{l+1}} r^l P_l(\cos\theta).$$

于是，衔接条件给出

$$\begin{cases} q\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{d^{l+1}} a^l P_l(\cos\theta) + \sum_{l=0}^{\infty} B_l \frac{1}{a^{l+1}} P_l(\cos\theta) \\ \qquad = \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} C_l a^l P_l(\cos\theta), \\ q\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} \frac{l}{d^{l+1}} a^{l-1} P_l(\cos\theta) - \sum_{l=0}^{\infty} B_l \frac{l+1}{a^{l+2}} P_l(\cos\theta) \\ \qquad = \varepsilon\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} C_l l a^{l-1} P_l(\cos\theta). \end{cases}$$

比较两边系数，得

$$\begin{cases} q\dfrac{1}{d^{l+1}} a^l + \dfrac{1}{a^{l+1}} B_l = a^l C_l, \\ q\dfrac{l}{d^{l+1}} a^{l-1} - \dfrac{l+1}{a^{l+2}} B_l = \varepsilon l a^{l-1} C_l. \end{cases}$$

由此解得

$$B_l = -\frac{lq(\varepsilon-1)a^{2l+1}}{[(\varepsilon+1)l+1]d^{l+1}}, \qquad C_l = \frac{(2l+1)q}{[(\varepsilon+1)l+1]d^{l+1}}.$$

这样，得到答案

$$\begin{cases} u_e = \dfrac{q}{\sqrt{d^2 - 2rd\cos\theta + r^2}} - q(\varepsilon-1) \\ \qquad \times \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} \frac{la^{2l+1}}{[(\varepsilon+1)l+1]d^{l+1}} \frac{1}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta), \\ u_i = q\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{[(\varepsilon+1)l+1]d^{2l+1}} r^l P_l(\cos\theta). \end{cases}$$

习　　题

1. 计算$\dfrac{2l+1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{+1} x^n P_l(x)dx$.

2. 以勒让德多项式为基本函数，在区间$(-1, +1)$上把下列函数展开为广义傅里叶级数。

(1) $f(x) = x^3$，　　(2) $f(x) = x^4$，

(3) $f(x) = |x|$，　　(4) $f(x) = \begin{cases} x & (0 < x < 1), \\ 0 & (-1 < x < 0). \end{cases}$

3. 在本来是匀强的静电场 E_0 中放置导体球，球的半径为 a. 试研究导体球怎样改变了匀强静电场。

4. 在点电荷 $4\pi\varepsilon_0 q$ 的电场中放置导体球，球的半径为 a，球心与点电荷相距 $d(>a)$，求解这个静电场。

5. 求解 $\Delta_3 u = 0\,(r < a)$, $u|_{r=a} = \cos^2\theta$.

6. 用一层不导电的物质把半径为 a 的导体球壳分隔为两个半球壳，使半球各充电到电势为 v_1 和 v_2. 试计算电场中的电势分布。

7. 半球的球面保持一定温度 u_0，半球底面①保持 $0°$，②绝热。试求这个半球里的稳定温度分布。

8. 半径为 a，表面熏黑的均匀球，在温度为 $0°$的空气中，受着阳光的照射，阳光的热流强度为 q_0．求解小球里的稳定温度分布。

9. 求解§31习题7的轻绳的振动，初位移 $\varphi(x)$，初速 $\psi(x)$.

10. 半径为 a 的圆形铁环，充有 $4\pi\varepsilon_0 q$ 单位电荷，求铁环周围电场中的电势。[在初等电学课程中已知圆环轴上距环心 r 处的电势为 $q/\sqrt{a^2+r^2}$.]

11. 求证 $P_l(x)=P'_{l+1}(x)-2xP'_l(x)+P'_{l-1}(x)$. [提示：拿(44.20)对 x 求导。]

12. 利用上题和(44.21)求证 $(2l+1)P_l(x)=P'_{l+1}(x)-P'_{l-1}(x)$.

§45. 一般的球函数

球函数方程

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+l(l+1)Y=0 \quad (45.1)$$

分离变数的解是

$$Y(\theta,\varphi)=(A\cos m\varphi+B\sin m\varphi)\Theta(\theta), \quad (45.2)$$

其中 $\Theta(\theta)$ 需从缔合勒让德方程

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2}-2x\frac{d\Theta}{dx}+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]\Theta=0 \quad (45.3)$$

解出，式中的 x 是

$$x=\cos\theta. \quad (45.4)$$

如果所研究的问题没有对称轴，缔合勒让德方程不能归结为勒让德方程。我们必须求解缔合勒让德方程。

(一) 缔合勒让德函数

$x_0=0$ 是缔合勒让德方程(45.2)的常点，可以用§41的方法在 $x_0=0$ 的邻域上求缔合勒让德方程的级数解。但是直接运用级数解法所得系数递推公式比较复杂（每个递推公式包括三个系数）。因此，通常作变换

$$\Theta=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}y(x), \quad (45.5)$$

把待求函数从 Θ 变换为 $y(x)$. 在这变换下，

$$\frac{d\Theta}{dx}=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}y'-m(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}xy,$$

$$\frac{d^2\Theta}{dx^2}=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}y''-2m(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}xy'-m(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}y$$

$$+m(m-2)(1-x^2)^{\frac{m}{2}-2}x^2y.$$

把以上三个式子代入缔合勒让德方程(45.3)，就把它化为$y(x)$的微分方程

$$(1-x^2)y''-2(m+1)xy'+[l(l+1)-m(m+1)]y=0. \tag{45.6}$$

$x_0=0$ 是这个微分方程的常点，直接运用级数解法所得系数递推公式也不复杂．可是，我们还是不准备直接运用级数解法，这是因为微分方程(45.6)恰好是勒让德方程逐项求导m次的结果（§41习题3就是例子）．验证如下．应用关于乘积求导的**莱布尼兹求导规则**

$$(uv)^{[m]}=uv^{[m]}+\frac{m}{1!}u'v^{[m-1]}+\frac{m(m-1)}{2!}u''v^{[m-2]}+\cdots$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{k!}u^{[k]}v^{[m-k]}+\cdots+u^{[m]}v, \tag{45.7}$$

把勒让德方程

$$(1-x^2)P''-2xP'+l(l+1)P=0$$

求导m次，其结果是

$$\left\{(1-x^2)P^{[m]''}-m2xP^{[m]'}-\frac{m(m-1)}{2}2P^{[m]}\right\}$$

$$-2\{xP^{[m]'}+mP^{[m]}\}+l(l+1)P^{[m]}=0,$$

即

$$(1-x^2)P^{[m]''}-2(m+1)xP^{[m]'}+[l(l+1)-m(m+1)]P^{[m]}=0.$$

这正是(45.6)。因此(45.6)的解$y(x)$应当是勒让德方程的解

$P(x)$的m阶导数，

$$y(x)=P^{[m]}(x). \tag{45.8}$$

我们已经知道，勒让德方程和自然的边界条件(在$x=\pm1$为有限)构成本征值问题，本征函数是勒让德多项式$P_l(x)$. 那么，方程(45.6)的满足自然边界条件的解便是勒让德多项式的m阶导数，即

$$y(x)=P_l^{[m]}(x).$$

把这代回(45.5)得 $\Theta=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}P_l^{[m]}(x)$，这叫作**缔合勒让德函数**，通常记作$P_l^m(x)$，即 $P_l^m(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}P_l^{[m]}(x)$. 注意区别$P_l^m(x)$和$P_l^{[m]}(x)$，后者只是$P_l(x)$的$m$阶导数。

这样，缔合勒让德方程和自然边界条件也构成本征值问题，它决定了本征值为

$$l(l+1)\quad(l=0,1,2,\cdots),$$

本征函数为缔合勒让德函数

$$P_l^m(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}P_l^{[m]}(x). \tag{45.9}$$

既然$P_l(x)$是l次多项式，它最多只能求导l次，进一步求导就得到零。因此，(45.9)中的m只能取值

$$m=0,1,2,\cdots,l. \tag{45.10}$$

球函数(45.2)里的m也就只限于(45.10)。

缔合勒让德函数的具体式子参看附录十三。

根据勒让德多项式的微分表示式(44.7)，立刻可写出缔合勒让德函数的微分表示式

$$P_l^m(x)=\frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^l l!}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l. \tag{45.11}$$

这也叫作洛德利格斯公式。

缔合勒让德函数还有另一种表示法。事实上，把缔合勒让德

方程(45.3)里的m换为$-m$，方程并不改变。由此可知，

$$P_l^{-m}(x)=\frac{(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}}{2^l l!}\frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}}(x^2-1)^l \tag{45.12}$$

也是缔合勒让德方程的满足自然边界条件的本征函数，从而$P_l^{-m}(x)$应当就是$P_l^m(x)$，最多相差一个常数因子。为了求出这个常数因子，拿(45.11)跟(45.12)相除，

$$\text{常数}=\frac{P_l^m(x)}{P_l^{-m}(x)}=\frac{(1-x^2)^m d^{l+m}(x^2-1)^l/dx^{l+m}}{d^{l-m}(x^2-1)^l/dx^{l-m}}.$$

上式右边是有理分式，分子与分母的同幂项之比就应当等于左边那个常数。现在看分子与分母最高幂项之比，它

$$=(-1)^m x^{2m}\frac{(2l)!}{(l-m)!}x^{l-m}:\frac{(2l)!}{(l+m)!}x^{l+m}=(-1)^m\frac{(l+m)!}{(l-m)!}.$$

这样，我们得到

$$\begin{cases}P_l^m(x)=(-1)^m\dfrac{(l+m)!}{(l-m)!}P_l^{-m}(x),\\[2ex] P_l^{-m}(x)=(-1)^m\dfrac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(x).\end{cases} \tag{45.13}$$

按照科希公式(9.5)，微分表示式(45.11)可表为路积分

$$P_l^m(x)=\frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^l}\frac{1}{2\pi i}\frac{(l+m)!}{l!}\oint_C\frac{(z^2-1)^l}{(z-x)^{l+m+1}}dz, \tag{45.14}$$

C为z平面上围绕$z=x$的任一闭合回路。这也叫作施列夫利积分。

(45.14)还可以进一步表为定积分。为此，取C为圆周，圆心在$z=x$，半径为$\sqrt{|x^2-1|}$。在C上，$z-x=\sqrt{x^2-1}e^{i\psi}$，(45.14)成为

$$\begin{aligned}P_l^m(x)&=\frac{1}{2\pi i}\frac{(l+m)!}{2^l l!}\oint_C\left(i\frac{z-x}{e^{i\psi}}\right)^m\frac{(z^2-1)^l}{(z-x)^{l+m+1}}dz\\&=\frac{i^m}{2\pi i}\frac{(l+m)!}{2^l l!}\oint_C e^{-im\psi}\frac{(z^2-1)^l}{(z-x)^{l+1}}dz\end{aligned}$$

$$=\frac{i^m}{2\pi i}\frac{(l+m)!}{2^l l!}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-im\psi}\frac{[x+\sqrt{x^2-1}e^{i\psi}-1]^l}{[\sqrt{x^2-1}e^{i\psi}]^{l+1}}i\sqrt{x^2-1}e^{i\psi}d\psi$$

$$=\frac{i^m}{2\pi}\frac{(l+m)!}{l!}$$

$$\times\int_{-\pi}^{\pi} e^{-im\psi}\left[\frac{x^2+2x\sqrt{x^2-1}e^{i\psi}+(x^2-1)e^{i2\psi}-1}{2\sqrt{x^2-1}e^{i\psi}}\right]^l d\psi$$

$$=\frac{i^m}{2\pi}\frac{(l+m)!}{l!}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-im\psi}\left[x+\sqrt{x^2-1}\frac{1}{2}(e^{-i\psi}+e^{i\psi})\right]^l d\psi.$$

从 x 回到原来的变数 $\theta, x=\cos\theta$，则

$$P_l^m(x)=\frac{i^m}{2\pi}\frac{(l+m)!}{l!}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-im\psi}[\cos\theta+i\sin\theta\cos\psi]^l d\psi. \quad (45.15)$$

这也叫作拉普拉斯积分。

作为斯特姆-刘维本征值问题的正交关系(43.9)的特例，同一 m 而不同阶 l 的缔合勒让德函数在区间 $(-1,+1)$ 上正交，

$$\int_{-1}^{+1} P_k^m(x)P_l^m(x)dx=0 \quad (k\neq l). \qquad (45.16)$$

如果从 x 回到原来的变数 θ，则(45.16)应是

$$\int_0^{\pi} P_k^m(\cos\theta)P_l^m(\cos\theta)\sin\theta d\theta=0 \quad (k\neq l). \qquad (45.17)$$

现在计算缔合勒让德函数 $P_l^m(x)$ 的模 N_l^m. 利用(45.13)，

$$(N_l^m)^2=\int_{-1}^{+1}[P_l^m(x)]^2dx=(-1)^m\frac{(l+m)!}{(l-m)!}$$

$$\times\int_{-1}^{+1}P_l^{-m}(x)P_l^m(x)dx$$

$$=(-1)^m\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{1}{2^{2l}(l!)^2}\int_{-1}^{+1}\frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}}(x^2-1)^l$$

$$\times\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l dx.$$

仿照上节计算勒让德多项式的模的方法，进行分部积分，而积出的部分代入上限和下限后为零，

$$(N_l^m)^2=(-1)^{m+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{1}{2^{2l}(l!)^2}$$

$$\times\int_{-1}^{+1}\frac{d^{l-m+1}}{dx^{l-m+1}}(x^2-1)^l\frac{d^{l+m-1}}{dx^{l+m-1}}(x^2-1)^l dx$$

$$=(-1)^{m+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\int_{-1}^{+1}P_l^{-(m-1)}(x)P_l^{m-1}(x)dx$$

一次又一次地分部积分计 m 次，并利用(44.12)，即得

$$(N_l^m)^2=(-1)^{2m}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\int_{-1}^{+1}P_l(x)P_l(x)dx$$

$$=\frac{(l+m)!}{(l-m)!}(N_l)^2=\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}.$$

终于求得模 N_l^m，

$$N_l^m=\sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}}. \tag{45.18}$$

根据斯特姆-刘维本征值问题的性质 ④[见 §43]，在区间 $-1\leqslant x\leqslant+1$ 即 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 上，以同一 m 而不同阶 l 的缔合勒让德函数为基本函数族，可把函数 $f(x)$ 展开为**广义傅里叶级数**

$$\begin{cases}f(x)=\sum\limits_{l=0}^{\infty}f_lP_l^m(x),\\ \text{系数 } f_l=\dfrac{2l+1}{2}\dfrac{(l-m)!}{(l+m)!}\displaystyle\int_{-1}^{+1}f(x)P_l^m(x)dx.\end{cases} \tag{45.19}$$

即

$$\begin{cases}f(\theta)=\sum\limits_{l=0}^{\infty}f_lP_l^m(\cos\theta),\\ \text{系数 } f_l=\dfrac{2l+1}{2}\dfrac{(l-m)!}{(l+m)!}\displaystyle\int_{0}^{\pi}f(\theta)P_l^m(\cos\theta)\sin\theta d\theta.\end{cases} \tag{45.20}$$

现在推导缔合勒让德函数的递推公式。上节已导出勒让德多项式的递推公式(44.21)即

$$(k+1)P_{k+1}(x)-(2k+1)xP_k(x)+kP_{k-1}(x)=0.$$

把这个公式逐项对 x 求导 m 次，

$$(k+1)P_{k+1}^{[m]}-(2k+1)xP_k^{[m]}-m(2k+1)P_k^{[m-1]}+kP_{k-1}^{[m]}=0. \tag{45.21}$$

除了第三项以外，各项都是勒让德多项式的 m 阶导数，乘以 $(1-x^2)^{\frac{m}{2}}$ 就成为缔合勒让德函数。这样看来，需要消去第三项。为此，把勒让德多项式的母函数(44.20)对 x 求导一次，

$$\frac{r}{(1-2rx+r^2)^{3/2}}=\sum_{l=0}^{\infty}r^lP_l'(x).$$

两边同乘以 $(1-2rx+r^2)$，得

$$\frac{r}{\sqrt{1-2rx+r^2}}=(1-2rx+r^2)\sum_{l=0}^{\infty}r^lP_l'(x),$$

即

$$r\sum_{l=0}^{\infty}r^lP_l(x)=(1-2rx+r^2)\sum_{l=0}^{\infty}r^lP_l'(x).$$

比较两边 r^{k+1} 的系数，得

$$P_k(x)=P_{k+1}'(x)-2xP_k'(x)+P_{k-1}'(x).$$

对 x 求导 $m-1$ 次，

$$P_k^{[m-1]}=P_{k+1}^{[m]}-2xP_k^{[m]}-2(m-1)P_k^{[m-1]}+P_{k-1}^{[m]}.$$

从上式与(45.21)消去 $P_k^{[m-1]}$，得

$$(k+1-m)P_{k+1}^{[m]}-(2k+1)xP_k^{[m]}+(k+m)P_{k-1}^{[m]}=0.$$

用 $(1-x^2)^{\frac{m}{2}}$ 遍乘各项，即得缔合勒让德函数的递推公式

$$(k+1-m)P_{k+1}^m(x)-(2k+1)xP_k^m(x)+(k+m)P_{k-1}^m(x)=0. \tag{45.22}$$

（二）球函数

不具备轴对称的情况下，球函数方程的解是

$$Y_l(\theta,\varphi)=P_l^m(\cos\theta)\begin{Bmatrix}\sin m\varphi\\ \cos m\varphi\end{Bmatrix}\begin{pmatrix}m=0,1,2,\cdots,l\\ l=0,1,2,3,\cdots\end{pmatrix},\ (45.23)$$

记号$\begin{Bmatrix}\sin m\varphi\\ \cos m\varphi\end{Bmatrix}$ 表示或取 $\sin m\varphi$ 或取 $\cos m\varphi$. (25.23) 叫作球函数，l 叫作它的阶。

独立的 l 阶球函数共有 $2l+1$ 个。这是因为对应于$m=0$，有一个球函数 $P_l(\cos\theta)$；对应于 $m=1,2,\cdots,l$ 则各有两个球函数即 $P_l^m(\cos\theta)\sin m\varphi$ 和 $P_l^m(\cos\theta)\cos m\varphi$。

根据欧勒公式 $\cos m\varphi+i\sin m\varphi=e^{im\varphi}$, $\cos m\varphi-i\sin m\varphi=e^{-im\varphi}$，(45.23)完全可以重新组合为

$$Y_l^m(\theta,\varphi)=P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi}\begin{pmatrix}m=-l,-l+1,\cdots,0,1,\cdots,l\\ l=0,1,2,3,\cdots\end{pmatrix}. \tag{45.24}$$

在(45.24)之中，独立的 l 阶球函数还是 $2l+1$ 个.

球函数 (45.23) 中的任意两个在球面S上(即 $0\leqslant\theta\leqslant\pi, 0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$)上正交，

$$\iint_S Y_l^m(\theta,\varphi)Y_k^n(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi$$

$$=\int_0^\pi P_l^m(\cos\theta)P_k^n(\cos\theta)\sin\theta d\theta\ \int_0^{2\pi}\begin{Bmatrix}\sin m\varphi\\ \cos m\varphi\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\sin n\varphi\\ \cos n\varphi\end{Bmatrix}d\varphi$$

$$=\int_{-1}^{+1}P_l^m(x)P_k^n(x)dx\int_0^{2\pi}\begin{Bmatrix}\sin m\varphi\\ \cos m\varphi\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\sin n\varphi\\ \cos n\varphi\end{Bmatrix}d\varphi=0$$

$$(m\neq n \text{ 或 } l\neq k). \tag{45.25}$$

这是很容易验证的。事实上，(24.3)指出，只要 $m\neq n$，上式中对 φ 的积分为零；而如果 $m=n$，(45.16)指出对 x 的积分为零，或者说，(45.17)指出对 θ 的积分为零。

现在计算球函数(45.23)的模 N_l^m.

$$(N_l^m)^2=\iint_S[Y_l^m(\theta,\varphi)]^2\sin\theta d\theta d\varphi=\int_0^\pi[P_l^m(\cos\theta)]^2$$

$$\times\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}\begin{Bmatrix}\sin^2 m\varphi\\\cos^2 m\varphi\end{Bmatrix}d\varphi=\int_{-1}^{+1}[P_l^m(x)]^2dx\int_0^{2\pi}\begin{Bmatrix}\sin^2 m\varphi\\\cos^2 m\varphi\end{Bmatrix}d\varphi.$$

读者已经熟悉

$$\int_0^{2\pi}\sin^2 m\varphi d\varphi=\pi\quad(m\neq0),$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^2 m\varphi d\varphi=\pi\delta_m,\quad\delta_m=\begin{cases}2&(m=0),\\1&(m\neq0).\end{cases}$$

(45.18)给出

$$\int_{-1}^{+1}[P_l^m(x)]^2dx=\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}.$$

因此,

$$(N_l^m)^2=\frac{2\pi\delta_m}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}.$$

于是,球函数(45.23)的模

$$N_l^m=\sqrt{\frac{2\pi\delta_m}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}}.\tag{45.26}$$

有了正交关系(45.25)和模(45.26),任一函数 $f(\theta,\varphi)$ 可在球面 S 上($0\leqslant\theta\leqslant\pi,0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$)按球函数展开,

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}[A_l^m\cos m\varphi+B_l^m\sin m\varphi]P_l^m(\cos\theta),\tag{45.27}$$

系数 A_l^m 和 B_l^m 的计算公式是

$$\begin{cases}A_l^m=\dfrac{2l+1}{2\pi\delta_m}\dfrac{(l-m)!}{(l+m)!}\displaystyle\iint_S f(\theta,\varphi)P_l^m(\cos\theta)\cos m\varphi\sin\theta d\theta d\varphi,\\[2ex]B_l^m=\dfrac{2l+1}{2\pi}\dfrac{(l-m)!}{(l+m)!}\displaystyle\iint_S f(\theta,\varphi)P_l^m(\cos\theta)\sin m\varphi\sin\theta d\theta d\varphi.\end{cases}$$

如果用球函数(45.24)代替(45.23),则正交关系、模、展开公

式应分别改写为

$$\iint_S Y_l^m(\theta,\varphi)[Y_k^n(\theta,\varphi)]^* \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$=\int_{-1}^{+1} P_l^m(x)P_k^n(x)\,dx\int_0^{2\pi} e^{im\varphi}[e^{in\varphi}]^* d\varphi=0 \quad (m\neq n \text{ 或 } l\neq k), \tag{45.28}$$

$$N_l^m=\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}}, \tag{45.29}$$

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l} C_l^m P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi}, \tag{45.30}$$

$$C_l^m=\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\iint_S f(\theta,\varphi)P_l^m(\cos\theta)[e^{im\varphi}]^* \sin\theta d\theta d\varphi.$$

(三) 加法公式

作为函数展开的例子，把函数 $\delta(\cos\theta-\cos\theta_0)\delta(\varphi-\varphi_0)$ 在球面 S 上用(45.27)按球函数展开，

$$\delta(\cos\theta-\cos\theta_0)\delta(\varphi-\varphi_0)$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}[A_l^m\cos m\varphi+B_l^m\sin m\varphi]P_l^m(\cos\theta),$$

$$A_l^m=\frac{2l+1}{2\pi\delta_m}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\int_0^{\pi}\delta(\cos\theta-\cos\theta_0)P_l^m(\cos\theta)d(\cos\theta)$$

$$\times\int_0^{2\pi}\delta(\varphi-\varphi_0)\cos m\varphi d\varphi$$

$$=\frac{2l+1}{2\pi\delta_m}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(\cos\theta_0)\cos m\varphi_0,$$

$$B_l^m=\frac{2l+1}{2\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\int_0^{\pi}\delta(\cos\theta-\cos\theta_0)P_l^m(\cos\theta)d(\cos\theta)$$

$$\times\int_0^{2\pi}\delta(\varphi-\varphi_0)\sin m\varphi d\varphi$$

$$=\frac{2l+1}{2\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(\cos\theta_0)\sin m\varphi_0.$$

这样，展开的结果是

$$\delta(\cos\theta-\cos\theta_0)\delta(\varphi-\varphi_0)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+1}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\delta_m}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}$$

$$\times(\cos m\varphi_0\cos m\varphi+\sin m\varphi_0\sin m\varphi)P_l^m(\cos\theta_0)P_l^m(\cos\theta).$$

(45.31)

现在选取新的球坐标系，它的极轴指着原坐标系的(θ_0,φ_0)方向。新坐标系中的坐标Θ就是原坐标系的(θ,φ)方向与(θ_0,φ_0)方向之间的夹角，所以

$$\cos\Theta=\cos\theta_0\cos\theta+\sin\theta_0\sin\theta\cos(\varphi-\varphi_0). \quad (45.32)$$

函数$\delta(\cos\theta-\cos\theta_0)\delta(\varphi-\varphi_0)$在新坐标系中成为$\delta(\cos\Theta-\cos 0)$ $\frac{1}{2\pi}$，其中 $\cos 0$ 即 1，$\frac{1}{2\pi}$是由于要求对φ的积分等于一。在新坐标系中，这个函数是轴对称的，可以按(44.14)进行展开，

$$\frac{1}{2\pi}\delta(\cos\Theta-1)=\sum_{l=0}^{\infty}f_lP_l(\cos\Theta),$$

$$f_l=\frac{2l+1}{2}\int_0^{\pi}\frac{1}{2\pi}\delta(\cos\Theta-1)P_l(\cos\Theta)\sin\Theta d\Theta$$

$$=\frac{2l+1}{2}\int_0^{\pi}\frac{1}{2\pi}\delta(\cos\Theta-1)P_l(\cos\Theta)d(\cos\Theta)$$

$$=\frac{2l+1}{4\pi}P_l(1)=\frac{2l+1}{4\pi}.$$

这样，展开的结果是

$$\frac{1}{2\pi}\delta(\cos\Theta-1)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+1}{4\pi}P_l(\cos\Theta). \quad (45.33)$$

(45.31)和(45.33)是同一个函数在不同坐标系中的展开式，它们应该彼此相等，

$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+1}{4\pi}P_l(\cos\Theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+1}{2\pi}\sum_{m=0}^{l}\frac{1}{\delta_m}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}$$

$$\times(\cos m\varphi_0\cos m\varphi+\sin m\varphi_0\sin m\varphi)P_l^m(\cos\theta_0)P_l^m(\cos\theta)$$

(45.34)

我们知道，球函数方程是从拉普拉斯方程或亥姆霍兹方程把变数 r 分离出去而得到的。拉普拉斯方程和亥姆霍兹方程中的算符 Δ 即 $\nabla\cdot\nabla$ 具有确定的意义，跟坐标的选择无关。"径向变数" r 则跟坐标系的旋转无关。因此，在坐标系旋转时，球函数方程不变。换句话说，坐标系旋转时，l 阶球函数仍保持为 l 阶。公式(45.35)两边的差别就在于坐标系的旋转，所以它两边的同阶球函数分别相等，即

$$P_l(\cos\Theta)=\sum_{m=0}^{l}\frac{2}{\delta_m}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}$$

$$\times(\cos m\varphi_0\cos m\varphi+\sin m\varphi_0\sin m\varphi)P_l^m(\cos\theta_0)P_l^m(\cos\theta).$$

(45.35)

这叫作球函数的加法公式，其中 Θ 见(45.32)。

如果改用展开公式(45.30)以代替(45.27)，则球函数的加法公式是

$$P_l(\cos\Theta)=\sum_{m=-l}^{+l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(\cos\theta_0)P_l^m(\cos\theta)e^{im(\varphi-\varphi_0)}.$$

(45.36)

(四) 例题

例1 用球函数把下列函数展开。(1) $\sin\theta\cos\varphi$，(2) $\sin\theta\sin\varphi$.

解 按照展开公式，

$$\sin\theta\cos\varphi=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}[A_l^m\cos m\varphi+B_l^m\sin m\varphi]P_l^m(\cos\theta),$$

$$\begin{cases} A_l^m = \dfrac{2l+1}{2\pi\delta_m}\dfrac{(l-m)!}{(l+m)!}\displaystyle\int_0^\pi \sin\theta P_l^m(\cos\theta)\sin\theta d\theta \\ \qquad\qquad \times\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos\varphi\cos m\varphi d\varphi, \\ B_l^m = \dfrac{2l+1}{2\pi}\dfrac{(l-m)!}{(l+m)!}\displaystyle\int_0^\pi \sin\theta P_l^m(\cos\theta)\sin\theta d\theta \\ \qquad\qquad \times\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos\varphi\sin m\varphi d\varphi. \end{cases}$$

对 φ 的积分是容易计算的。对 θ 的积分则应化为对 $x(x=\cos\theta)$ 的积分，$P_l^m(x)$ 用微分式表出，一次又一次分部积分就能算出。

但是，其实不用这样麻烦。从附录十三查得 $\sin\theta=P_1^1(\cos\theta)$，立刻看出 $\sin\theta\cos\varphi$ 和 $\sin\theta\sin\varphi$ 是已经展开的，各只有一个单项：

(1) $\sin\theta\cos\varphi=P_1^1(\cos\theta)\cos\varphi$,

(2) $\sin\theta\sin\varphi=P_1^1(\cos\theta)\sin\varphi$.

例2 用球函数把下列函数展开。(1) $3\sin^2\theta\cos^2\varphi-1$，(2) $\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi$。

解 用一般的展开公式计算比较繁。现在试试利用附录十三。为此，需要把含 φ 的部分化为 $\cos m\varphi$ 和 $\sin m\varphi$ 的形式。

(1) $$3\sin^2\theta\cos^2\varphi-1=\frac{1}{2}P_2^2(\cos\theta)(1+\cos2\varphi)-1$$

$$=\frac{1}{2}P_2^2(\cos\theta)\cos2\varphi+\frac{3}{2}\sin^2\theta-1$$

$$=\frac{1}{2}P_2^2(\cos\theta)\cos2\varphi+1-\frac{3}{2}\cos^2\theta$$

$$=\frac{1}{2}P_2^2(\cos\theta)\cos2\varphi-P_2(\cos\theta).$$

(2) $$\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi=\frac{1}{2}\sin^2\theta\sin2\varphi=\frac{1}{6}P_2^2(\cos\theta)\sin2\varphi.$$

例3 读者在初等电学里已熟悉电偶极子。两个点电荷，电

量相等而符号相反，两者相距很近，就构成偶极子。试计算偶极子的电场中的电势。

解 用 s_1 表示点电荷 $+q$ 相对于点电荷 $-q$ 的矢径，qs_1 叫作偶极子的**偶极矩**，记作 p_1，

$$p_1 = qs_1.$$

先研究 s_1 沿 x 轴的情况，即 $p_{1x}=qs_{1x}, p_{1y}=0, p_{1z}=0$. 把坐标原点取在偶极子所在处，或者更具体些，取在点电荷 $-q$ 所在处。于是，两个点电荷的坐标分别是 $(s_{1x},0,0)$ 和 $(0,0,0)$. 从初等电学知道电势

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{\sqrt{(x-s_{1x})^2+y^2+z^2}}-\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

引用记号 $r=\sqrt{(x-s_{1x})^2+y^2+z^2}$，上式可以写成

$$\begin{aligned}u(x,y,z)&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\partial}{\partial s_{1x}}\left(\frac{q}{r}\right)\right]_{s_{1x}=0}s_{1x}\\&=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{q}{r}\right)\right]_{s_{1x}=0}s_{1x}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}qs_{1x}\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1x}\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.\end{aligned}$$

改用球坐标，

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1x}\frac{\sin\theta\cos\varphi}{r^2}.$$

引用例 1 的答案，

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1x}\frac{1}{r^2}P_1^1(\cos\theta)\cos\varphi.$$

同理，如果 s_1 沿 y 轴，则

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1y}\frac{y}{r^3}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1y}\frac{1}{r^2}P_1^1(\cos\theta)\sin\varphi.$$

如果 s_1 沿 z 轴，则

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1z}\frac{z}{r^3}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1z}\frac{1}{r^2}P_1(\cos\theta),$$

一般情况下，偶极子的电场中的电势

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}[p_{1x}P_1^1(\cos\theta)\cos\varphi$$

$$+p_{1y}P_1^1(\cos\theta)\sin\varphi+p_{1z}P_1(\cos\theta)].$$

[ ]里是一阶球函数。

例 4 两个偶极子，偶极矩相等而方向相反，两者相距很近，就构成四极子。计算四极子的电场中的电势。

解 把这两个偶极子的偶极矩记作 $\boldsymbol{p}_1$ 和 $-\boldsymbol{p}_1$，前者相对于后者的矢径记作 $\boldsymbol{s}_2$。

先计算 $\boldsymbol{p}_1$ 和 $\boldsymbol{s}_2$ 都沿 x 轴的情况，$p_{1y}=p_{1z}=0$，$s_{2y}=s_{2z}=0$。把坐标原点取在四极子所在处，或者更具体些，取在偶极矩为 $-\boldsymbol{p}_1$ 的偶极子处。于是，两个偶极子的坐标分别是 $(s_{2x},0,0)$ 和 $(0,0,0)$。引用例 3 的结果，电势

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1x}\left\{\frac{x-s_{2x}}{[(x-s_{2x})^2+y^2+z^2]^{3/2}}\right.$$

$$\left.-\frac{x}{[x^2+y^2+z^2]^{3/2}}\right\}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1x}\left\{\frac{x-s_{2x}}{r^3}-\frac{x-s_{2x}}{r^3}\bigg|_{s_{2x}=0}\right\}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1x}\left[\frac{\partial}{\partial s_{2x}}\left(\frac{x-s_{2x}}{r^3}\right)\right]_{s_{2x}=0}s_{2x}$$

$$=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1x}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x-s_{2x}}{r^3}\right)\right]_{s_{2x}=0}s_{2x}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1x}\frac{2x^2-y^2-z^2}{r^5}s_{2x}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1x}s_{2x}\frac{3x^2-r^2}{r^5}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1x}s_{2x}\frac{3\sin^2\theta\cos^2\varphi-1}{r^3}.$$

引用例 2 的答案，则

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{2xx}\frac{1}{r^3}\left[\frac{1}{2}P_2^2(\cos\theta)\cos2\varphi-P_2(\cos\theta)\right],$$

式中 $p_{2xx}=p_{1x}s_{2x}$ 叫作四极矩。

同理，p_1 沿 x 轴，s_2 沿 y 轴，则

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{2xy}\frac{3xy}{r^5}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{2xy}\frac{3\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi}{r^3}.$$

式中 $p_{2xy}=p_{1x}s_{2y}$ 叫作四极矩。引用例 2 的答案，则

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{2xy}\frac{1}{r^3}\left[\frac{1}{2}P_2^2(\cos\theta)\sin 2\varphi\right].$$

p_1 沿 x 轴，s_2 沿 z 轴，则

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1x}s_{2z}\frac{3xz}{r^5}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1x}s_{2z}\frac{3\sin\theta\cos\theta\cos\varphi}{r^3}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1x}s_{2z}\frac{1}{r^3}\left[P_2^1(\cos\theta)\cos\varphi\right].$$

p_1 沿 y 轴，s_2 沿 x 轴，则

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1y}s_{2x}\frac{3xy}{r^5}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1y}s_{2x}\frac{1}{r^3}\left[\frac{1}{2}P_2^2(\cos\theta)\sin 2\varphi\right].$$

p_1 沿 y 轴，s_2 沿 y 轴，则

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1y}s_{2y}\frac{3y^2-r^2}{r^5}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1y}s_{2y}\frac{3\sin^2\theta\sin^2\varphi-1}{r^3}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1y}s_{2y}\frac{1}{r^3}\left[-\frac{1}{2}P_2^2(\cos\theta)\cos 2\varphi-P_2(\cos\theta)\right].$$

p_1沿 y 轴，s_2 沿 z 轴，则

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1y}s_{2z}\frac{3yz}{r^5}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1y}s_{2z}\frac{1}{r^3}[P_2^1(\cos\theta)\sin\varphi].$$

p_1 沿 z 轴，s_2 沿 x 轴，则

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1z}s_{2x}\frac{3xz}{r^5}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1z}s_{2x}\frac{1}{r^3}[P_2^1(\cos\theta)\cos\varphi].$$

p_1 沿 z 轴，s_2 沿 y 轴，则

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1z}s_{2y}\frac{3yz}{r^5}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1z}s_{2y}\frac{1}{r^3}[P_2^1(\cos\theta)\sin\varphi].$$

p_1 沿 z 轴，s_2 沿 z 轴，则

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1z}s_{2z}\frac{3z^2-r^2}{r^5}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1z}s_{2z}\frac{1}{r^3}[2P_2(\cos\theta)].$$

这些答案的[　　]里全是二阶球函数。其实，这些电势是拉普拉斯方程的解，拉普拉斯方程的解如表为$\frac{1}{r^3}$[　　]则[　　]里必定是二阶球函数[参看(40.4)和(40.3)]。

一般情况下，四极子的电场的电势

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\mathrm{Tr}\begin{bmatrix}p_{1x}s_{2x} & p_{1x}s_{2y} & p_{1x}s_{2z}\\ p_{1y}s_{2x} & p_{1y}s_{2y} & p_{1y}s_{2z}\\ p_{1z}s_{2x} & p_{1z}s_{2y} & p_{1z}s_{2z}\end{bmatrix}$$

$$\times\begin{bmatrix}-p_2+\frac{1}{2}p_2^2\cos2\varphi & \frac{1}{2}p_2^2\sin2\varphi & p_2^1\cos\varphi\\ \frac{1}{2}p_2^2\sin2\varphi & -p_2-\frac{1}{2}p_2^2\cos2\varphi & p_2^1\sin\varphi\\ p_2^1\cos\varphi & p_2^1\sin\varphi & 2p_2\end{bmatrix}.$$

记号 Tr 表示迹(*trace*)，就是说，取(后面相乘所得的)矩阵的对角线元素之和。

上式经整理后可表为

$$\begin{aligned}u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}[&(-p_{1x}s_{2x}-p_{1y}s_{2y}+p_{1z}s_{2z})P_2(\cos\theta)\\ &+(p_{1x}s_{2z}+p_{1z}s_{2x})P_2^1(\cos\theta)\cos\varphi\\ &+(p_{1y}s_{2z}+p_{1z}s_{2y})P_2^1(\cos\theta)\sin\varphi\\ &+\frac{1}{2}(p_{1x}s_{2y}+p_{1y}s_{2x})P_2^2(\cos\theta)\sin2\varphi\\ &+\frac{1}{2}(p_{1x}s_{2x}-p_{1y}s_{2y})P_2^2(\cos\theta)\cos2\varphi].\end{aligned}$$

例5 类推下去，还有八极子、十六极子、…等所谓多极子。2^n极子的电场的电势必可表为$\frac{1}{r^{n+1}}$ [n阶球函数]。这里证明电学里很重要的一个推论：在区域T中分布着电荷，对区域外远处的电场来说，区域T里的电荷可以用一系列的多极子代替。

证 在区域T里有电荷分布，其密度为$4\pi\varepsilon_0\rho(r_0,\theta_0,\varphi_0)$，其中$r_0$，$\theta_0$和$\varphi_0$是电荷所在处的坐标。空间中坐标为$(r,\theta,\varphi)$处的电势应为

$$u(r,\theta,\varphi)=\iiint_T\frac{\rho(r_0,\theta_0,\varphi_0)}{R}dv_0,$$

式中R是点(r,θ,φ)距(r_0,θ_0,φ_0)处的电荷的距离，积分是对(r_0,θ_0,φ_0)进行的，dv_0表示积分体积元。把(θ,φ)方向与(θ_0,φ_0)方向之间的夹角记作Θ，

$$\cos\Theta=\cos\theta\cos\theta_0+\sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0),$$

则距离R是

$$R=\sqrt{r^2-2rr_0\cos\Theta+r_0{}^2}.$$

于是，电势

$$u(r,\theta,\varphi)=\iiint_T\frac{\rho(r_0,\theta_0,\varphi_0)}{\sqrt{r^2-2rr_0\cos\Theta+r_0^2}}dv_0.$$

利用勒让德多项式的母函数公式(44.19)，上式可改写为

$$u(r,\theta,\varphi)=\iiint_T\rho(r_0,\theta_0,\varphi_0)\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_0^l}{r^{l+1}}P_l(\cos\Theta)dv_0.$$

再利用球函数的加法公式(45.36)，

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\frac{2}{\delta_m}\iiint_T\rho(r_0,\theta_0,\varphi_0)\right.$$

$$\left.\times r_0^l P_l^m(\cos\theta_0)\cos m\varphi_0 dv_0\right]\frac{1}{r^{l+1}}P_l^m(\cos\theta)\cos m\varphi$$

$$+\sum_{l=0}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}2\iiint_{T}\rho(r_0,\theta_0,\varphi_0)\right.$$

$$\left.\times r_0^l P_l^m(\cos\theta_0)\sin m\varphi_0 dv_0\right]\frac{1}{r^{l+1}}P_l^m(\cos\theta)\sin m\varphi.$$

[　　]外面的$\frac{1}{r^{l+1}}\cdot l$阶球函数表明是 2^l 极子的电势，[　　]里则是 2^l 极子的 2^l 极矩，这 2^l 极矩也是用 l 阶球函数表示的。

习　　题

1. 用球函数把下列函数展开。

   (1) $\sin^2\theta\cos^2\varphi$,　　　　(2) $(1+3\cos\theta)\sin\theta\cos\varphi$,

   (3) $(1-|\cos\theta|)(1+\cos 2\varphi)$.

2. 在半径为 a 的球外($r>a$)求解

$$\begin{cases}\Delta_3 u=0,\\ u|_{r=a}=f(\theta,\varphi).\end{cases}$$

3. 在半径为 a 的球的(1)内部，(2)外部求解

$$\begin{cases}\Delta_3 u=0,\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a}=f(\theta,\varphi).\end{cases}$$

研究一个简单的特例 $f(\theta,\varphi)=A\cos\theta$.

第十四章　柱函数

用柱坐标系，对拉普拉斯方程进行分离变数(见§40)，得到贝塞耳方程

$$x^2\frac{d^2R}{dx^2}+x\frac{dR}{dx}+(x^2-m^2)R=0,$$

其中 $x=\sqrt{\mu}\,\rho$；或者虚宗量贝塞耳方程

$$x^2\frac{d^2R}{dx^2}+x\frac{dR}{dx}-(x^2+m^2)R=0,$$

其中 $x=h\rho=\sqrt{-\mu}\,\rho$. 虚宗量贝塞耳方程可以归结为贝塞耳方程。事实上，在贝塞耳方程中，把 x 换为 ix，就得到虚宗量贝塞耳方程。

用柱坐标系，对亥姆霍兹方程进行分离变数(见§40)，也得到贝塞耳方程，只是其中 $x=\sqrt{k^2-h^2}\,\rho=\sqrt{k^2+\mu}\rho$.

贝塞耳方程已在§42例2和例3解出。如果阶数m不是整数，方程的两个线性独立解是m阶和$-m$阶贝塞耳函数 $J_m(x)$ 和 $J_{-m}(x)$，或者也可用m阶的贝塞耳函数 $J_m(x)$ 和m阶诺依曼函数 $N_m(x)$. 如果阶数m是整数，$J_{-m}(x)$ 并不是一个独立的解，$J_{-m}(x)=(-1)^mJ_m(x)$，这时两个线性独立解是 $J_m(x)$ 和 $N_m(x)$.

$\lim\limits_{x\to0}N_m(x)=\infty$. 如果$m$不是整数，$\lim\limits_{x\to0}J_{-m}(x)=\infty$. 因此，研究圆柱内部的拉普拉斯方程或亥姆霍兹方程时，为了满足“解在圆柱轴上($\rho=0$，从而 $x=0$)为有限”这个要求，应当舍弃 $N_m(x)$ 和 $J_{-m}(x)$，只用正阶数的贝塞耳函数。

贝塞耳函数又叫作**第一类柱函数**。诺依曼函数又叫作第二类柱函数。有时，取下列两个函数作为贝塞耳方程的两个线性独立解

$$\begin{cases} H_m^{(1)}(x) = J_m(x) + iN_m(x), \\ H_m^{(2)}(x) = J_m(x) - iN_m(x). \end{cases}$$

这两个函数分别叫作第一种和第二种汉克函数。汉克函数又叫作第三类柱函数。

$H_m^{(1)}$, $H_m^{(2)}$, J_m 和 N_m 之间的关系很有点象 e^{ix}, e^{-ix}, $\cos x$ 和 $\sin x$ 的关系。当 x 很大的时候，它们的渐近公式 (48.17)——(48.20)真的就是 e^{ix}, e^{-ix}, $\cos x$ 和 $\sin x$ 的形式。

§46. 贝塞耳函数

如阶数 m 不是整数，贝塞耳函数

$$J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(m+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k}. \tag{46.1}$$

当 m 是整数时，(46.1)成为

$$J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(m+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k}. \tag{46.2}$$

从(46.2)容易看出

$$J_0(0) = 1, \quad J_m(0) = 0 \quad (m \neq 0).$$

(一) 递推公式

用(46.1)不难算出

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{J_m(x)}{x^m}\right] = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(m+k+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{m+2k} x^{2k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2k}{k!\,\Gamma(m+k+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{m+2k} x^{2k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2k}{k!\,\Gamma(m+k+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{m+2k} x^{2k-1}$$

令 $l=k-1$，则

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{J_m(x)}{x^m}\right]=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{l+1}2(l+1)x^{2l+1}}{(l+1)!\,\Gamma(m+l+1+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{m+2l+2}$$

$$=-\frac{J_{m+1}(x)}{x^m}, \tag{46.3}$$

即

$$J'_m(x)-\frac{mJ_m(x)}{x}=-J_{m+1}(x). \tag{46.4}$$

(46.4) 的 $m=0$ 的特例是

$$J'_0(x)=-J_1(x). \tag{46.5}$$

仿照(46.3)，不难算出

$$\frac{d}{dx}[x^mJ_m(x)]=x^mJ_{m-1}(x), \tag{46.6}$$

即

$$J'_m(x)+\frac{mJ_m(x)}{x}=J_{m-1}(x). \tag{46.7}$$

从(46.4)和(46.7)消去 $J'_m(x)$ 即得贝塞耳函数的递推公式

$$J_{m+1}(x)-\frac{2mJ_m(x)}{x}+J_{m-1}(x)=0. \tag{46.8}$$

(二) 本征值

把贝塞耳方程表为斯特姆-刘维型如(43.3)，就看出 $k(x)=x$. 在圆柱的轴上 $x=0$，而 $k(0)=0$，所以在 $x=0$ 存在着自然的边界条件。舍弃 $N_m(x)$ 或 $J_{-m}(x)$ 正是这个自然边界条件的后果。

贝塞耳方程常常带有圆柱侧面的齐次边界条件。如圆柱半径为 ρ_0，以拉普拉斯方程而论，这些齐次边界条件是

$$\begin{cases}\text{或}\ J_m(\sqrt{\mu}\,\rho_0)=0 & (\text{第一类}),\\ \text{或}\ J'_m(\sqrt{\mu}\,\rho_0)=0 & (\text{第二类}),\\ \text{或}\ J_m(\sqrt{\mu}\,\rho_0)+H\left[\dfrac{d}{d\rho}J_m(\sqrt{\mu}\,\rho)\right]_{\rho=\rho_0}=0 & (\text{第三类}).\end{cases}$$

(46.9)

其中第三类齐次边界条件又可以写成

$$J_m(\sqrt{\mu}\,\rho_0)+H\sqrt{\mu}\,J'_m(\sqrt{\mu}\,\rho_0)=0.$$

对于亥姆霍兹方程,圆柱侧面的齐次边界条件也是(46.9),只是应把$\sqrt{\mu}$换作$\sqrt{k^2-h^2}$。

(46.9)是决定本征值的式子。它所决定的$\sqrt{\mu}$(对于亥姆霍兹方程,则是$\sqrt{k^2-h^2}$)都是实数。事实上,假如有某个$\sqrt{\mu_n}$是复数,则由于贝塞耳函数的级数展开式中的系数都是实数,必有一个共轭复数的$\sqrt{\mu_n}^*$。这样,一方面,作为斯特姆-刘维本征值问题的正交关系(43.9)的特例,

$$\int_0^{\rho_0} J_m(\sqrt{\mu_n}\rho)\,J_m(\sqrt{\mu_n}^*\rho)\rho d\rho=0.$$

另一方面,$J_m(\sqrt{\mu_n}^*\rho)$即$[J_m(\sqrt{\mu_n}\rho)]^*$,从而

$$\int_0^{\rho_0} J_m(\sqrt{\mu_n}\rho)J_m(\sqrt{\mu_n}^*\rho)\rho d\rho$$

$$=\int_0^{\rho_0} J_m(\sqrt{\mu_n}\rho)[J_m(\sqrt{\mu_n}\rho)]^*\rho d\rho$$

$$=\int_0^{\rho_0} |J_m(\sqrt{\mu_n}\rho)|^2\rho d\rho>0.$$

两者互相矛盾。可见$\sqrt{\mu}$不可能是复数,只可能是实的。

第一类边界条件的(46.9)是容易解决的。有许多数学用表,尤其是专门的贝塞耳函数表列出了贝塞耳函数的零点。只要从表中查出贝塞耳函数$J_m(x)$的零点$x_n^{(m)}$,除以ρ_0即得$\sqrt{\mu_n^{(m)}}$,关于贝塞耳函数的零点$x_n^{(m)}$还有公式

$$x_n^{(m)}=A-\frac{B-1}{8A}\left(1+\frac{C}{3(4A)^2}+\frac{D}{5(4A)^4}+\frac{E}{105(4A)^6}+\cdots\right),$$

其中

$$A=\left(m-\frac{1}{2}+2n\right)\frac{\pi}{2},\quad B=4m^2,$$

$$C=7B-31,\quad D=83B^2-982B+3779,$$

$$E=6949B^3-153855B^2+1585743B-6277237.$$

下面列举一些有关贝塞耳函数零点的一般性结论。

贝塞耳的级数展开式各项的幂次依序逐个相差 2，因此贝塞耳函数的零点必正负成对，其绝对值相等。

对于大 x，贝塞耳函数 $J_m(x)$ 的渐近公式［参看 (48.19) 式］是

$$J_m(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{2}m-\frac{\pi}{4}\right),$$

余弦函数有无限多个零点，所以贝塞耳函数有无限多零点。

连续函数的两个相邻零点之间必有其导数的一个零点。(46.3) 说明，$\frac{1}{x^m}J_m(x)$ 的两个相邻零点之间必有$\frac{1}{x^m}J_{m+1}(x)$ 的一个零点。换句话说，J_m 的两个相邻零点之间必有 $J_{m+1}(x)$ 的一个零点。把 (46.6) 中的 m 换为 $m+1$，则它说明 $x^{m+1}J_{m+1}(x)$ 的两个相邻零点之间必有 $J_m(x)$ 的一个零点。换句话说，$J_{m+1}(x)$ 的两个相邻零点之间必有 $J_m(x)$ 的一个零点，在 $x=0$ 与 $J_{m+1}(x)$ 的绝对值最小零点之间也必有 $J_m(x)$ 的一个零点。总之，$J_m(x)$ 和 $J_{m+1}(x)$ 的零点两两相间，$J_m(x)$ 的绝对值最小零点比 $J_{m+1}(x)$ 的绝对值最小零点更接近于零(这对于波导问题是重要的，参看例 5)。

第二类边界条件的 (46.9) 一般不能利用普通的函数表解决，因为 $J_m'(x)$ 的零点在普通的函数表中是没有给出的。但 $m=0$ 的特例是容易解决的，因为按照(46.5)，$J_0'(x)$的零点不过就是 $J_1(x)$ 的零点。至于 $m\neq0$ 的情况可以利用下述方法加以估计。从(46.4) 和(46.7)消去 $J_m(x)$，得

$$J_m'(x)=\frac{1}{2}[J_{m-1}(x)-J_{m+1}(x)].\qquad(46.10)$$

所以，$J_m'(x)$ 的零点就是 $J_{m-1}(x)=J_{m+1}(x)$ 的根，可从 $J_{m-1}(x)$

和 $J_{m+1}(x)$ 两曲线的交点得出。

贝塞耳函数的导数 $J'_m(x)$ 的零点 $x_n^{(m)}$ 的公式是

$$x_n^{(m)}=A-\frac{B+3}{8A}-\frac{C}{6(4A)^3}-\frac{D}{15(4A)^5}-\cdots,$$

其中

$$A=\left(m+\frac{1}{2}+2n\right)\frac{\pi}{2},\qquad B=4m^2,\qquad C=7B^2+82B-9,$$

$$D=83B^3+2075B^2-3039B+3537.$$

（三）贝塞耳函数的正交关系

作为斯特姆-刘维本征值问题的正交关系(43.9)的特例，对应于不同本征值的贝塞耳函数在区间$(0,\rho_0)$上带权重 ρ 正交

$$\int_0^{\rho_0}J_m(\sqrt{\mu_n}\rho)J_m(\sqrt{\mu_l}\rho)\rho d\rho=0\quad(n\neq l).\qquad(46.11)$$

（四）贝塞耳函数的模

现在计算贝塞耳函数$J_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho)$ 的模$N_n^{(m)}$，其中$\sqrt{\mu_n^{(m)}}$是(46.9)的第 n 个根。

$$[N_n^{(m)}]^2=\int_0^{\rho_0}[J_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho)]^2\rho d\rho.$$

把$\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho$ 记作 x，$\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho_0$ 记作 x_0，则

$$[N_n^{(m)}]^2=\frac{1}{\mu_n^{(m)}}\int_0^{x_0}[J_m(x)]^2xdx=\frac{1}{2\mu_n^{(m)}}\int_0^{x_0}[J_m(x)]^2d(x^2)$$

$$=\frac{1}{2\mu_n^{(m)}}[x^2J_m(x)]_0^{x_0}-\frac{1}{\mu_n^{(m)}}\int_0^{x_0}[x^2J_m(x)]J'_m(x)dx.$$

右边积分号下的[ ]里的 $x^2J_m(x)$ 可利用贝塞耳方程加以改写，

$$[N_n^{(m)}]^2=\frac{1}{2\mu_n^{(m)}}[x^2J_m^2]_0^{x_0}$$

$$+\frac{1}{\mu_n^{(m)}}\int_0^{x_0}[x^2J''_m(x)+xJ'_m(x)-m^2J_m(x)]J'_m(x)dx$$

$$=\frac{1}{2\mu_n^{(m)}}[x^2J_m^2]_0^{x_0}$$

$$+\frac{1}{\mu_n^{(m)}}\int_0^{x_0}\left[x^2J_m'(x)\frac{dJ_m'(x)}{dx}+x(J_m')^2\right]dx$$

$$-\frac{m^2}{\mu_n^{(m)}}\int_0^{x_0}J_m dJ_m$$

$$=\frac{1}{2\mu_n^{(m)}}[x^2J_m^2]_0^{x_0}+\frac{1}{2\mu_n^{(m)}}\int_0^{x_0}d[x^2J_m'^2]-\frac{m^2}{2\mu_n^{(m)}}[J_m^2]_0^{x_0}$$

$$=\frac{1}{2\mu_n^{(m)}}[(x^2-m^2)J_m^2]_0^{x_0}+\frac{1}{2\mu_n^{(m)}}[x^2J_m'^2]_0^{x_0}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\rho_0^2-\frac{m^2}{\mu_n^{(m)}}\right)[J_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho_0)]^2$$

$$+\frac{1}{2}\rho_0^2[J_m'(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho_0)]^2. \qquad (46.12)$$

对于第一类齐次边界条件$J_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho_0)=0$，(46.12)成为

$$[N_n^{(m)}]^2=\frac{1}{2}\rho_0^2[J_m'(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho_0)]^2.$$

以(46.4)代入并且考虑到第一类齐次边界条件，得

$$[N_n^{(m)}]^2=\frac{1}{2}\rho_0^2[J_{m+1}(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho_0)]^2. \qquad (46.13)$$

对于第二类齐次边界条件 $J_m'(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho_0)=0$，(46.12)成为

$$[N_n^{(m)}]^2=\frac{1}{2}\left(\rho_0^2-\frac{m^2}{\mu_n^{(m)}}\right)[J_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho_0)]^2. \qquad (46.14)$$

对于第三类齐次边界条件，$J_m'=-J_m/\sqrt{\mu_n^{(m)}}H$，(46.12)成为

$$[N_n^{(m)}]^2=\frac{1}{2}\left(\rho_0^2-\frac{m^2}{\mu_n^{(m)}}+\frac{\rho_0^2}{\mu_n^{(m)}H}\right)[J_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho_0)]^2.$$

(46.15)

(五) 傅里叶-贝塞耳级数

根据斯特姆-刘维本征值问题的性质④ [见 § 43]，在区间$[0,\rho_0]$上，以贝塞耳函数族$J_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho)(n=1, 2, 3, \cdots)$作为基本函数族。可把函数$f(x)$展开为傅里叶-贝塞耳级数，

$$\begin{cases} f(\rho)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n J_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho), \\ \text{系数 } f_n=\frac{1}{[N_n^{(m)}]^2}\int_0^{\rho_0} f(\rho) J_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho)\rho d\rho, \end{cases}$$

(46.16)

其中 $N_n^{(m)}$ 选用(46.13)或(46.14)或(46.15)，根据边界条件而定。

记得公式(46.3)，(46.5)和(46.6)可能对计算系数 f_n 有帮助，因为它们给出不定积分

$$\int x^{-m} J_{m+1}(x)dx=-x^{-m}J_m(x)+C,$$

$$\int J_1(x)dx=-J_0(x)+C,$$

$$\int x^m J_{m-1}(x)dx=x^m J_m(x)+C.$$

某些贝塞耳函数表附有系数 f_n 的简便计算表。

对于 $\rho_0\to\infty$ 的情况，则有傅里叶-贝塞耳积分

$$\begin{cases} f(\rho)=\int_0^{\infty}\bar{f}(\omega)J_m(\omega\rho)\omega d\omega, \\ \bar{f}(\omega)=\int_0^{\infty}f(\rho)J_m(\omega\rho)\rho d\rho. \end{cases} \tag{46.17}$$

(六) 母函数，积分表示与加法公式

§ 14 例 4 把 $e^{\frac{1}{2}xz}$ 和 $e^{-\frac{1}{2}x\frac{1}{z}}$ 分别展为绝对收敛级数，逐项相乘而得到(14.7)即

$$e^{\frac{1}{2}x\left(z-\frac{1}{z}\right)}=\sum_{m=0}^{\infty}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(m+n)!\,n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2n}\right]z^m$$

$$+\sum_{m=-1}^{-\infty}\left[(-1)^m\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(|m|+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{|m|+2n}\right]z^m$$

$$(0<|z|<\infty).$$

上式右边前一个[ ]正是$J_m(x)$，后一个[ ]则是$(-1)^m J_{|m|}(x)$，而这按照(42.15)正是$J_{-|m|}(x)$。因此，

$$e^{\frac{1}{2}x\left(z-\frac{1}{z}\right)}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}J_m(x)z^m \quad (0<|z|<\infty). \tag{46.18}$$

$e^{\frac{1}{2}x\left(z-\frac{1}{z}\right)}$因此叫作整数阶贝塞耳函数的母函数。令$z=e^{i\zeta}$，(46.18)改写成

$$e^{ix\sin\zeta}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}J_m(x)e^{im\zeta}. \tag{46.19}$$

又令$\zeta=\psi-\frac{\pi}{2}$，(46.19)改写成

$$e^{-ix\cos\psi}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-i)^m J_m(x)e^{im\psi}. \tag{46.20}$$

又令$\psi=\theta+\pi$，(46.20)改写成

$$e^{ix\cos\theta}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}i^m J_m(x)e^{im\theta}. \tag{46.21}$$

(46.18)——(46.21)是彼此等价的。

把(46.19)的右边看作复数形式的傅里叶级数，那么$J_m(x)$就是$e^{ix\sin\zeta}$的傅里叶系数，所以

$$J_m(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ix\sin\zeta}e^{-im\zeta}d\zeta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(x\sin\zeta-m\zeta)}d\zeta. \tag{46.22}$$

被积函数$e^{i(x\sin\zeta-m\zeta)}=\cos(x\sin\zeta-m\zeta)+i\sin(x\sin\zeta-m\zeta)$，虚部是$\zeta$的奇函数，在区间$[-\pi,\pi]$上积分为零，所以

$$J_m(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x\sin\zeta-m\zeta)d\zeta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(m\zeta-x\sin\zeta)d\zeta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{im\xi-ix\sin\xi}d\xi. \qquad (46.23)$$

如用ψ和θ代替ξ，则

$$J_m(x)=\frac{(-i)^m}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\cos\psi+im\psi}d\psi, \qquad (46.24)$$

$$J_m(x)=\frac{i^m}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix\cos\theta+im\theta}d\theta. \qquad (46.25)$$

(46.22)——(46.25)是整数阶贝塞耳函数的积分表示式。

现在推导整数阶贝塞耳函数的加法公式。按照(46.18)，

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(a+b)z^m=e^{\frac{1}{2}(a+b)\left(z-\frac{1}{z}\right)}=e^{\frac{1}{2}a\left(z-\frac{1}{z}\right)}e^{\frac{1}{2}b\left(z-\frac{1}{z}\right)}.$$

对右边两个因子分别应用(46.18)，

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(a+b)z^m=\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(a)z^k\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(b)z^n.$$

比较两边的z^m的系数，即得加法公式

$$J_m(a+b)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(a)J_{m-k}(b). \qquad (46.26)$$

（七）虚宗量贝塞耳函数

§40 用柱坐标系，对拉普拉斯方程进行分离变数，分离变数过程中引入的常数μ有>0和<0两种可能。如在圆柱上下底有齐次边界条件，应排除$\mu>0$的可能，而在$\mu<0$的情况下，拉普拉斯方程的分离变数形式的解是

$$R(x)\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\cos hz\\ \sin hz\end{Bmatrix},$$

其中$h=\sqrt{-\mu}$，$x=h\rho$，而$R(x)$需从虚宗量贝塞耳方程

$$x^2\frac{d^2R}{dx^2}+x\frac{dR}{dx}-(x^2+m^2)R=0$$

解出。

§42 习题 4 解出虚宗量贝塞耳方程。如m不是整数，两个线

性独立解是

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,\Gamma(m+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,\Gamma(-m+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2k}.$$

它们分别叫作$+m$阶和$-m$阶虚宗量贝塞耳函数，分别记作$I_m(x)$和$I_{-m}(x)$，

$$I_{\pm m}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,\Gamma(\pm m+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\pm m+2k}. \qquad (46.27)$$

在圆柱的轴上，$\rho=0$，$x=h\rho=0$，而当$x\to 0$，$I_{-m}(x)\to\infty$。所以研究圆柱内部的拉普拉斯方程时，应舍弃$I_{-m}(x)$，只用$I_m(x)$。

注意$I_m(x)$和$J_m(x)$的差别只在于$J_m(x)$的级数展开式中各项交替取正号和负号，$I_m(x)$的级数展开式中各项一律取正号。正因为$I_m(x)$的各项一律取正号，$I_m(x)$没有实的零点。因此，如在圆柱侧面有齐次边界条件，就不适用虚宗量贝塞耳函数。

不难验证，

$$I_m(x)=i^{-m}J_m(ix). \qquad (46.28)$$

如m是整数，虚宗量贝塞耳方程的两个线性独立解是m阶虚宗量贝塞耳函数和m阶虚宗量诺埃曼函数。对于圆柱内部的拉普拉斯方程，应舍弃虚宗量诺埃曼函数，只用$I_m(x)$。

（八）例题

例 1 均匀圆柱，半径R，高H。柱侧有均匀分布的恒定热流进入，其强度为q_0。圆柱上下底面保持为恒定的u_0度。求解柱内稳定温度分布。

解 稳定温度分布满足拉普拉斯方程$\Delta_3 u=0$。采用柱坐标系，极点在下底中心，z轴沿着圆柱的轴，定解问题就表为

$$\begin{cases}\Delta_3 u=0,\\ k\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\Big|_{\rho=R}=q_0,\\ u|_{z=0}=u_0,\quad u|_{z=H}=u_0.\end{cases}$$

上下两底的边界条件很容易化为齐次的。为此，只需把温标的零点移动一下，令

$$u=u_0+v,$$

问题就转化为 v 的定解问题

$$\begin{cases}\Delta_3 v=0,\\ k\dfrac{\partial v}{\partial\rho}\Big|_{\rho=R}=q_0,\\ v|_{z=0}=0,\quad v|_{z=H}=0.\end{cases}$$

上下两底是第一类齐次边界条件，应排除 $\mu>0$ 的可能。在 $\mu<0$ 的情况下，分离变数形式的解一般地说是

$$I_m(h\rho)\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\cosh z\\ \sin hz\end{Bmatrix}.$$

本例的圆柱轴是对称轴，解应该跟 φ 无关，所以 $m=0$. 又，上下两底的第一类齐次边界条件决定了应舍弃 $\cos hz$，只取 $\sin hz$，而且 h 的值只能是

$$h_n=\frac{n\pi}{H}\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

这样，分离变数形式的解应是

$$I_0\left(\frac{n\pi}{H}\rho\right)\sin\frac{n\pi z}{H}.$$

所求的 v

$$v=\sum_{n=1}^{\infty}A_nI_0\left(\frac{n\pi}{H}\rho\right)\sin\frac{n\pi z}{H}.$$

为决定系数 A_n，把上式代入柱侧的边界条件，

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{n\pi}{H} I_0'\left(\frac{n\pi}{H} R\right) \sin \frac{n\pi z}{H} = \frac{q_0}{k}.$$

上式左边是傅里叶正弦级数，这提示把右边的 q_0/k 也展开为傅里叶正弦级数，然后比较两边系数，

$$A_n = \frac{H}{n\pi} \frac{1}{I_0'\left(\frac{n\pi}{H} R\right)} \frac{2}{H} \int_0^H \frac{q_0}{k} \sin \frac{n\pi z}{H} dz$$

$$= \frac{2q_0}{n\pi k} \frac{1}{I_0'\left(\frac{n\pi}{H} R\right)} \left[-\frac{H}{n\pi} \cos \frac{n\pi z}{H} \right]_0^H$$

$$= \frac{2Hq_0}{n^2\pi^2 k} \frac{1}{I_0'\left(\frac{n\pi}{H} R\right)} [1-(-1)^n]$$

$$= \begin{cases} 0 & (n \text{ 为偶数}), \\ \dfrac{4Hq_0}{n^2\pi^2 k} \dfrac{1}{I_0'\left(\frac{n\pi}{H} R\right)} & (n \text{ 为奇数}). \end{cases}$$

于是，本例的答案是

$$u = u_0 + \frac{4Hq_0}{k\pi^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)^2} \frac{1}{I_0'\left(\frac{(2l+1)\pi R}{H}\right)}$$

$$\times I_0\left(\frac{(2l+1)\pi}{H} \rho\right) \sin \frac{(2l+1)\pi z}{H}.$$

例 2 均匀圆柱，半径 R，高 H。柱侧绝热，上下底面温度分布分别保持为 $f_2(\rho)$ 和 $f_1(\rho)$。求解柱内稳定温度分布。

解 稳定温度分布满足拉普拉斯方程 $\Delta_3 u = 0$。采用柱坐标系，极点在下底中心，z 轴沿着圆柱的轴，定解问题就表为

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho=R} = 0, \\ u|_{z=0} = f_1(\rho), \quad u|_{z=H} = f_2(\rho). \end{cases}$$

柱侧是第二类齐次边界条件，这就排除了虚宗量贝塞耳函数，亦即排除了 $\mu<0$ 的可能。在 $\mu>0$ 的情况下，分离变数形式的解一般地说是

$$J_m(\sqrt{\mu}\,\rho)\begin{Bmatrix}e^{\sqrt{\mu}z}\\e^{-\sqrt{\mu}z}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\\sin m\varphi\end{Bmatrix}.$$

本例的圆柱轴是对称轴，解应该跟 φ 无关，所以 $m=0$. 又，侧面的第二类齐次边界条件指出 $\sqrt{\mu}$ 决定于

$$J_0'(\sqrt{\mu}R)=0 \quad 即 \quad J_1(\sqrt{\mu}R)=0.$$

因此，

$$\sqrt{\mu_n}=\frac{x_n^{(1)}}{R} \quad (n=0,1,2,3,\cdots),$$

其中 $x_n^{(1)}$ 是 $J_1(x)$ 的第 n 个零点。这里 $x_0^{(1)}=0$ 从而 $\sqrt{\mu_0}=0$，而在 $\sqrt{\mu}=0$ 的情况下，$\begin{Bmatrix}e^{\sqrt{\mu}z}\\e^{-\sqrt{\mu}z}\end{Bmatrix}$ 应代之以 $\begin{Bmatrix}1\\z\end{Bmatrix}$.

这样，所求的解

$$w=A_0+B_0z+\sum_{n=1}^{\infty}J_0\left(\frac{x_n^{(1)}}{R}\rho\right)\left(A_ne^{\frac{x_n^{(1)}}{R}z}+B_ne^{-\frac{x_n^{(1)}}{R}z}\right).$$

为决定系数 A_n 和 B_n，把上式代入上下底的边界条件，

$$\begin{cases}A_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}J_0\left(\dfrac{x_n^{(1)}}{R}\rho\right)(A_n+B_n)=f_1(\rho),\\[2ex]A_0+B_0H+\sum\limits_{n=1}^{\infty}J_0\left(\dfrac{x_n^{(1)}}{R}\rho\right)\left(A_ne^{\frac{x_n^{(1)}}{R}H}+B_ne^{-\frac{x_n^{(1)}}{R}H}\right)=f_2(\rho).\end{cases}$$

用(46.15)和(46.13)把 $f_1(\rho)$ 和 $f_2(\rho)$ 分别展开，然后比较系数，得

$$\begin{cases}A_0=\dfrac{2}{R^2}\displaystyle\int_0^R f_1(\rho)\rho d\rho\equiv f_{10},\\[2ex]A_0+B_0H=\dfrac{2}{R^2}\displaystyle\int_0^R f_2(\rho)\rho d\rho\equiv f_{20};\end{cases}$$

$$
\begin{cases}
A_n+B_n=\dfrac{2}{R^2[J_0(x_n^{(1)})]^2}\displaystyle\int_0^R J_0\left(\dfrac{x_n^{(1)}}{R}\rho\right)f_1(\rho)\rho d\rho\equiv f_{1n}, \\
A_n e^{\frac{x_n^{(1)}}{R}H}+B_n e^{-\frac{x_n^{(1)}}{R}H}=\dfrac{2}{R^2[J_0(x_n^{(1)})]^2}\displaystyle\int_0^R J_0\left(\dfrac{x_n^{(1)}}{R}\rho\right)f_2(\rho)\rho d\rho \\
\qquad\qquad\equiv f_{2n}.
\end{cases}
$$

从以上代数方程组解得

$$
\begin{cases}
A_0=f_{10}, \\
B_0=\dfrac{f_{20}-f_{10}}{H};
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
A_n=\dfrac{f_{1n}e^{-\frac{x_n^{(1)}}{R}H}-f_{2n}}{e^{-\frac{x_n^{(1)}}{R}H}-e^{\frac{x_n^{(1)}}{R}H}}, \\
B_n=\dfrac{f_{1n}e^{\frac{x_n^{(1)}}{R}H}-f_{2n}}{e^{-\frac{x_n^{(1)}}{R}H}-e^{\frac{x_n^{(1)}}{R}H}}.
\end{cases}
$$

有了这些系数，本例的答案也就有了。

例 3 均匀圆柱，半径 R，高 H. 柱侧有均匀分布的恒定热流进入，其强度为 q_0. 圆柱上下底面温度分布分别保持为 $f_2(\rho)$ 和 $f_1(\rho)$. 求解柱内稳定温度分布。

解 稳定温度分布满足拉普拉斯方程 $\Delta_3 u=0$。采用柱坐标系，极点在下底中心，z 轴沿着圆柱的轴，定解问题就表为

$$
\begin{cases}
\Delta_3 u=0, \\
k\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\Big|_{\rho=R}=q_0, \\
u|_{z=0}=f_1(\rho),\ u|_{z=H}=f_2(\rho).
\end{cases}
$$

所有边界条件都是非齐次的。

令 u 为 v 和 w 的叠加，

$$u=v+w,$$

而 v 和 w 分别满足

$$\begin{cases}\Delta_3 v=0,\\ k\dfrac{\partial v}{\partial\rho}\Big|_{\rho=R}=q_0,\\ v|_{z=0}=0,\ \ v|_{z=H}=0.\end{cases}\qquad \begin{cases}\Delta_3 w=0,\\ \dfrac{\partial w}{\partial\rho}\Big|_{\rho=R}=0,\\ w|_{z=0}=f_1(\rho),\ \ w|_{z=H}=f_2(\rho).\end{cases}$$

v 在圆柱上下底有第一类齐次边界条件，它已在例 1 解出。w 在圆柱侧面有第二类齐次边界条件，它已在例 2 解出。

把例 1 解出的 v 和例 2 解出的 w 相加就得本例答案。

例 4 均质细杆，长为 l. 一端是削尖的，各横截面的面积正比于它跟尖端的距离。已知初始位移为 $f(x)$，x 轴沿杆长方向而原点在尖端，初始速度则处处为零。杆的粗端自由。求解杆的纵振动。

解 首先需要推导这种杆的纵振动方程。设想在杆上截取一个小段 B(图 74)。

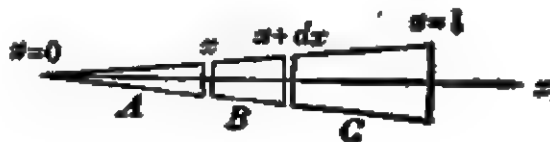


图 74

C 段对 B 的拉力是 $YSu_x|_{x+dx}$, A 段对 B 的拉力是 $YSu_x|_x$, 合力为 $YSu_x|_{x+dx}-YSu_x|_x$ 即 $Y\dfrac{\partial}{\partial x}(Su_x)dx$. B 段的质量是 ρSdx. 于是，写出 B 段的运动方程式

$$(\rho Sdx)u_{tt}=Y\frac{\partial}{\partial x}(Su_x)dx.$$

又因 $S\propto x$，上式化为

$$u_{tt}-a^2\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0\quad (a^2=Y/\rho).$$

本例应表为定解问题

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)=0,\\ u_x|_{x=l}=0,\\ u|_{t=0}=f(x),\ \ u_t|_{t=0}=0.\end{cases}$$

在尖端$x=0$，横截面为零，提不出边界条件。下面将会发现，分离变数后得到贝塞耳方程，而贝塞耳方程在$x=0$有自然的边界条件。

用分离变数法。以

$$u(x,t)=X(x)T(t)$$

代入泛定方程和边界条件，可得

$$T''+a^2k^2T=0,$$

$$\begin{cases}x^2X''+xX'+x^2k^2T=0,\\ X'(l)=0.\end{cases}$$

X的常微分方程是宗量为kx的零阶贝塞耳方程，它在$x=0$有自然边界条件。在$x=0$为有限的解是

$$X(x)=J_0(kx).$$

由边界条件$X'(l)=0$，即$J_0'(kl)=0$，亦即$J_1(kl)=0$，得

$$k_n=\frac{1}{l}x_n^{(1)},\qquad (x_n^{(1)}\text{是 }J_1(x)\text{ 的第 }n\text{ 个零点}).$$

关于T的常微分方程的解是熟知的

$$\begin{aligned}T(t)&=A\cos kat+B\sin kat\\&=A\cos\frac{x_n^{(1)}a}{l}t+B\sin\frac{x_n^{(1)}a}{l}t.\quad(n\neq0)\end{aligned}$$

$J_1(x)$有一个零点是$x=0$. 与此对应，

$$T(t)=A+Bt.$$

这样，所求的解

$$u(x,t)=A_0+B_0t+\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos\frac{x_n^{(1)}at}{l}+B_n\sin\frac{x_n^{(1)}at}{l}\right]J_0\left(\frac{x_n^{(1)}}{l}x\right).$$

为决定系数A_n和B_n，把上式代入初始条件，

$$\begin{cases}A_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_nJ_0\left(\dfrac{x_n^{(1)}}{l}x\right)=f(x),\\ B_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}B_n\dfrac{x_n^{(1)}a}{l}J_0\left(\dfrac{x_n^{(1)}}{l}x\right)=0.\end{cases}$$

由第二式知 $B_0=0$，$B_n=0$。再把第一式右边的 $f(x)$ 展开为傅里叶-贝塞耳级数，然后比较两边系数，

$$A_0=\frac{2}{l^2}\int_0^l f(x)xdx,$$

$$A_n=\frac{2}{l^2[J_0(x_n^{(1)})]^2}\int_0^l J_0\left(\frac{x_n^{(1)}}{l}x\right)f(x)xdx.$$

有了这些系数，本例的答案也就有了。

例 5 研究横磁波（指 $H_z=0$ 的情况，z 为波导的管轴方向，横磁波通常记作 TM 波）在半径为 R 的圆形波导中的传播。

解 (40.48)把 $\boldsymbol{E}(\rho,\varphi,z,t)$ 和 $\boldsymbol{H}(\rho,\varphi,z,t)$ 用 $\mathscr{E}(\rho,\varphi)$ 和 $\mathscr{H}(\rho,\varphi)$表出，

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}(\rho,\varphi,z,t)=\mathscr{E}(\rho,\varphi)e^{i(hz-kct)},\\ \boldsymbol{H}(\rho,\varphi,z,t)=\mathscr{H}(\rho,\varphi)e^{i(hz-kct)},\end{cases}$$

其中 h 应当是实数，否则就意味着 E 和 H 沿管轴衰减从而通不过波导。问题归结为求解 $\mathscr{E}$ 和 $\mathscr{H}$. 为此，又只需求解 $\mathscr{E}_z$ 和 $\mathscr{H}_z$，因为有了 $\mathscr{E}_z$ 和 $\mathscr{H}_z$ 就可按(40.53) 把其他分量 $\mathscr{E}_\rho$，$\mathscr{E}_\varphi$，$\mathscr{H}_\rho$ 和 $\mathscr{H}_\varphi$ 算出。

$\mathscr{E}_z$ 和 $\mathscr{H}_z$ 应当从亥姆霍兹方程 (40.54)解出。对于横磁波，$\mathscr{H}_z=0$，我们只需从亥姆霍兹方程

$$\Delta_2\mathscr{E}_z+(k^2-h^2)\mathscr{E}_z=0$$

求解 $\mathscr{E}_z$。

如果波导内壁导电性很好，电磁波频率又不是特别高，可把边界条件记作

$$\mathscr{E}_z|_{\rho=R}=0.$$

本例这个亥姆霍兹方程的分离变数形式的解是

$$\mathscr{E}_z=J_m(\sqrt{k^2-h^2}\,\rho)\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{Bmatrix},$$

边界条件则规定了

$$\sqrt{k^2-h^2}R=x_n^{(m)}\quad (x_n^{(m)}\text{是}J_m(x)\text{的第}n\text{个零点})。\tag{46.29}$$

把 $\mathscr{H}_z=0$ 和上面解出的 $\mathscr{E}_z$ 代入(40.53)，就可算出 $\mathscr{E}$ 和 $\mathscr{H}$ 的各个分量

$$\begin{cases}\mathscr{E}_\rho=\dfrac{ihR}{x_n^{(m)}}J_m'\left(\dfrac{x_n^{(m)}}{R}\rho\right)\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{Bmatrix},\\ \mathscr{E}_\varphi=\dfrac{imhR^2}{[x_n^{(m)}]^2\rho}J_m\left(\dfrac{x_n^{(m)}}{R}\rho\right)\begin{Bmatrix}\sin m\varphi\\ -\cos m\varphi\end{Bmatrix},\\ \mathscr{E}_z=J_m\left(\dfrac{x_n^{(m)}}{R}\rho\right)\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{Bmatrix};\\ \mathscr{H}_\rho=\dfrac{imkR^2}{[x_n^{(m)}]^2\rho}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}J_m\left(\dfrac{x_n^{(m)}}{R}\rho\right)\begin{Bmatrix}-\sin m\varphi\\ \cos m\varphi\end{Bmatrix},\\ \mathscr{H}_\varphi=\dfrac{ikR}{x_n^{(m)}}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}J_m'\left(\dfrac{x_n^{(m)}}{R}\rho\right)\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{Bmatrix},\\ \mathscr{H}_z=0.\end{cases}\tag{46.30}$$

以上各式遍乘以 $e^{i(hz-kct)}$，就给出 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的各个分量。到这里，我们已把波矢量为 k 的电磁波在半径为 R 的圆形波导里的分离变数形式的解求了出来。对应于某一特定的 m 和某一特定的 n 的分离变数形式的解叫作这种波导中的电磁波的特定的模式。

本例暂时满足于求得分离变数形式的解亦即各种模式，并不把各个分离变数形式的解叠加起来然后运用初始条件确定叠加系数。其实，在实际工作中正是创造条件激发起某一或某些模式而抑制其他所有模式。

现在研究一下，哪些模式能够通过波导传输，哪些不能。(46.29)可改写为

$$h=\sqrt{k^2-[x_n^{(m)}/R]^2}.$$

要是希望这种模式的电磁波能够通过波导，h 必须是实数，这是说，

$$k \geqslant x_n^{(m)}/R. \tag{46.31}$$

波矢量 k 和波长 λ 之间的关系是 $\lambda = 2\pi/k$，所以(46.31)可表为

$$\lambda \leqslant 2\pi R/x_n^{(m)}, \quad 即 \quad x_n^{(m)} \leqslant 2\pi R/\lambda. \tag{46.32}$$

我们知道，对于一定的 n 而言，m 越大则 $x_n^{(m)}$ 也越大；对于一定的 m 而言，n 越大则 $x_n^{(m)}$ 越大（n 本来就是按大小排列的序数）。因此，就特定的电磁波而言，λ 是既定的，波导越粗（R 越大），符合(46.31)的 $x_n^{(m)}$ 个数越多，能够通过的模式越多；波导越细（R 越小），符合(46.31)的 $x_n^{(m)}$ 个数越少，能够通过的模式越少。

在所有 $x_n^{(m)}$ 之中，除去 0 不算，绝对值最小的是 $J_0(x)$ 的第一个零点 $x_1^{(0)} = 2.405$，其次就轮到 $J_1(x)$ 的第一个零点 $x_1^{(1)} = 3.832$。这样，如果波导半径 R 在 $\frac{2.405}{2\pi}\lambda$ 和 $\frac{3.832}{2\pi}\lambda$ 之间，

$$\frac{1}{2\pi}\lambda x_1^{(0)} < R < \frac{1}{2\pi}\lambda x_1^{(1)}$$

即

$$\frac{2\pi R}{x_1^{(0)}} > \lambda > \frac{2\pi R}{x_1^{(1)}},$$

则只有 $m=0$（据(46.31)，这意味着电磁场的分布以波导的轴为对称轴）而且 $n=1$（据(46.31)，这意味着从管轴 $\rho=0$ 到管壁 $\rho=R$ 并不存在节点）的模式能够通过波导。如果波导半径比 $\frac{2.405}{2\pi}\lambda$ 还要小，

$$R < \frac{x_1^{(0)}}{2\pi}\lambda, \quad 即 \quad \lambda > \frac{2\pi R}{x_1^{(0)}},$$

不论什么模式也不能通过波导。

例 6 均质空心长圆柱体，内外半径分别是 R_1 和 R_2。初始

温度分布是 $f(\rho)$，放入温度为 U_0 的烘箱里进行保温。圆柱内外面温度保持为 U_0. 求解柱体内各处温度变化情况。

解 用平面极坐标，这个问题可表为

$$\begin{cases} u_t - a^2\Delta_2 u = 0, \\ u|_{\rho=R_1} = U_0, \quad u|_{\rho=R_2} = U_0, \\ u|_{t=0} = f(\rho). \end{cases}$$

先设法把边界条件化为齐次的。为此，令

$$u = U_0 + w,$$

则 w 的定解问题是

$$\begin{cases} w_t - a^2\Delta_2 w = 0, \\ w|_{\rho=R_1} = 0, \quad w|_{\rho=R_2} = 0, \\ w|_{t=0} = f(\rho) - U_0. \end{cases}$$

边界确已化为齐次的。

把这个二维热传导方程分离变数(参看 § 40)，得指数式衰减的时间因子 $e^{-a^2k^2t}$ 和二维空间中的亥姆霍兹方程。平面极坐标系不过是缺少 z 轴的柱坐标系。参看 § 40 关于用柱坐标系把亥姆霍兹方程分离变数的结果，除掉其中跟 z 有关的部分就是我们所需要的。这样，w 的分离变数形式的解是

$$R(\rho)\begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix} e^{-a^2k^2t},$$

其中 $R(\rho)$ 的方程是(40.41)，但(40.41)的 h 应是零(因为问题跟坐标 z 无关)。这样，

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + \left(k^2 - \frac{m^2}{\rho^2}\right)R = 0.$$

这是以 $k\rho$ 为宗量的 m 阶贝塞耳方程。

本例的柱轴是对称轴，温度分布跟 φ 无关，可见 $m=0$. 于是，分离变数形式的解是

$$R(\rho)e^{-a^2k^2t},$$

而 $R(\rho)$ 的方程是

$$\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho}+k^2R=0,$$

这是以 $k\rho$ 为宗量的零阶贝塞耳方程。本例研究的区间是 $R_1<\rho<R_2$，并不包含 $\rho=0$，自然边界条件不起作用，这个贝塞耳方程的解包括贝塞耳函数和诺埃曼函数，

$$R(\rho)=AJ_0(k\rho)+BN_0(k\rho).$$

把上式代入边界条件，

$$\begin{cases}AJ_0(kR_1)+BN_0(kR_1)=0,\\AJ_0(kR_2)+BN_0(kR_2)=0.\end{cases}$$

从上面这个联立代数方程组只能解出 $A=B=0$，除非系数行列式等于零，即

$$J_0(kR_1)N_0(kR_2)-J_0(kR_2)N_0(kR_1)=0.$$

这个方程的根 k_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 可从贝塞耳函数表查出［例如 E. Jahnke und F. Emde: Funktiontafeln mit Formeln und Kurven（德英对照本），第四版，204—206 页］。对于每一个 k_n 可以定出 A 与 B 的一定比例

$$\frac{B_n}{A_n}=-\frac{J_0(k_nR_1)}{N_0(k_nR_1)}.$$

因此，所求的 w 应是

$$w=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\left[J_0(k_n\rho)-\frac{J_0(k_nR_1)}{N_0(k_nR_1)}N_0(k_n\rho)\right]e^{-a^2k_n^2t}.$$

为决定系数 A_n，把上式代入初始条件，

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n\left[J_0(k_n\rho)-\frac{J_0(k_nR_1)}{N_0(k_nR_1)}N_0(k_n\rho)\right]=f(\rho).$$

以$J_0(k_n\rho)-\dfrac{J_0(k_nR_1)}{N_0(k_nR_1)}N_0(k_n\rho)$为基本函数族，把$f(\rho)$展开，比较两边系数就可定出$A_n$。定出$A_n$之后，就得到答案

$$u=U_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\left[J_0(k_n\rho)-\frac{J_0(k_nR_1)}{N_0(k_nR_1)}N_0(k_n\rho)\right]e^{-a^2k_n^2t}。$$

习　题

1. 计算下列积分。

(1) $\int x^3J_0(x)\,dx$,

[提示：反复用$xJ_0=(xJ_1)'$与$J_1=-J_0'$并分部积分。]

(2) $\int x^4J_1(x)dx$,

[提示：利用$J_1=-J_0', xJ_0=(xJ_1)'$与$x^2J_1=(x^2J_2)'$并分部积分。]

(3) $\int J_3(x)dx$.

[提示：利用$x^{-2}J_3=-(x^{-2}J_2)', (x^{-1}J_2)=-(x^{-1}J_1)'$并分部积分。]

2. 在区间(0, 1)上，第一类齐次边界条件下，用零阶贝塞耳函数把$f(x)=1$展开为傅里叶-贝塞耳级数。

3. 求解半径为R的圆形膜的稳恒振动，每单位面积上作用的周期力(1) $f=A\sin\omega t$ (2) $f=A(1-\rho^2/R^2)\sin\omega t$.

4. 半径为R的圆形膜，边缘固定。初始形状是旋转抛物面$u|_{t=0}=(1-\rho^2/R^2)H$，初速为零。求解膜的振动情况。

5. 半径为R的圆形膜，在(ρ_0, φ_0)受到冲量K作用。求解其后的振动。

6. 半径为R的半圆形膜，边缘固定。求其本征频率和本征振动。

7. 半径为R而高为H的圆柱体下底和侧面保持零度，上底温度分布为$f(\rho)=\rho^2$。求柱体内各点的稳恒温度。

8. 圆柱体半径为R而高为H，上底保持温度u_1，下底保持温度u_2，侧面温度分布为$f(z)=\dfrac{2u_1}{H^2}\left(z-\dfrac{H}{2}\right)z+\dfrac{u_2}{H}(H-z)$。求解柱体内各点的稳恒温度。

9. 圆柱体半径R而高为H，上底有均匀分布的强度为q_0的热流进入，下底则有同样的热流流出，柱侧保持零度。求柱体里的稳恒温度。

10．研究横电波（指 $E_z=0$ 的情况，z 为波导的管轴方向．横电波通常记作 TE 波）在半径为 R 的圆形波导中的传播。［提示：在管壁上可认为 $\mathscr{E}_\varphi=0$。参看(40.53)，对于 TE 波 $\mathscr{E}_{t\varphi}=0$ 意味 $\frac{\partial \mathscr{H}_z}{\partial \rho}=0$。这就是关于 $\mathscr{H}_z$ 的边界条件。］

11．求长圆柱形铀块的临界半径。［"临界"一词参看§36 习题 8。］

12．样品放入烘炉之前的温度同于室温即 u_0，把它放入温度 u_1 的烘炉进行保温。但是，样品内的温度不可能立刻就转变为 u_1，它与 u_1 的差随着时间作指数衰减。今约定把差值降到 $1/e$ 才算作保温开始。试计算圆柱形样品放入烘炉内多少时间才可开始计算保温时间。

13．电子光学透镜的某一部件由两个中空圆柱筒组成，其电势分别为 $+v_0$ 和 $-v_0$。在圆柱中间隙缝的边缘处电势可近似表为 $v=v_0\sin\frac{\pi z}{2\delta}$。求圆柱筒内的电势分布。圆柱两端边界条件可近似表为 $v|_{z=\pm l}=\pm v_0$。

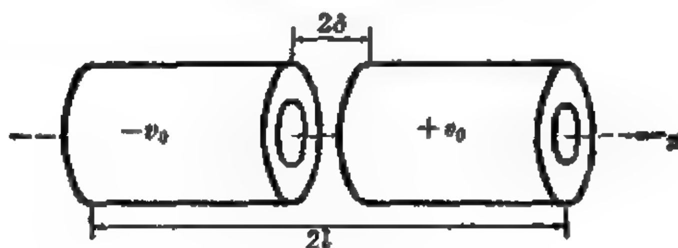


图 75

§47．球贝塞耳方程

用球坐标系，对亥姆霍兹方程 $\Delta_3 v+k^2 v=0$ 进行分离变数（见§40），得

$$v(r,\theta,\varphi)=R(r)P_l^m(\cos\theta)\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{Bmatrix}, \tag{47.1}$$

其中 $R(r)$ 需从 l 阶球贝塞耳方程

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2}+2r\frac{dR}{dr}+[k^2r^2-l(l+1)]R=0 \tag{47.2}$$

解出。把 kr 记作 x，$x=kr$，并把 $R(r)$ 变换为 $y(x)$，

$$R(r)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}y(x),\qquad(47.3)$$

球贝塞耳方程(47.2)化为$l+\frac{1}{2}$阶贝塞耳方程

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+\left[x^2-\left(l+\frac{1}{2}\right)^2\right]y=0.\qquad(47.4)$$

§42例4解出$\frac{1}{2}$阶贝塞耳方程，得到两个线性独立解

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x,\qquad J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x.\qquad(47.5)$$

我们知道，m阶贝塞耳方程的两个线性独立解也可以取为m阶贝塞耳函数$J_m(x)$和m阶诺埃曼函数$N_m(x)$。诺埃曼函数$N_m(x)$的一种定义是(参看附录十五)

$$N_m(x)=\frac{J_m(x)\cos m\pi-J_{-m}(x)}{\sin m\pi}.$$

在$m=\frac{1}{2}$的情况下，

$$N_{\frac{1}{2}}(x)=\frac{J_{\frac{1}{2}}(x)0-J_{-\frac{1}{2}}(x)}{1}=-J_{-\frac{1}{2}}(x).$$

$\frac{1}{2}$阶诺埃曼函数其实就是$-\frac{1}{2}$阶贝塞耳函数。因此，$\frac{1}{2}$阶贝塞耳方程的两个线性独立解(47.5)也可写成

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x,\qquad N_{\frac{1}{2}}(x)=-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x.\qquad(47.6)$$

把(47.6)代回(47.3)，得到零阶球贝塞耳方程的两个线性独立解$\sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{\frac{1}{2}}(x)$和$\sqrt{\frac{\pi}{2x}}N_{\frac{1}{2}}(x)$即$\frac{1}{x}\sin x$和$-\frac{1}{x}\cos x$，通常把这叫作**零阶球贝塞耳函数和零阶球诺埃曼函数**，并分别记作$j_0(x)$和$n_0(x)$，

$$j_0(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{\frac{1}{2}}(x)=\frac{\sin x}{x},$$

$$n_0(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}N_{\frac{1}{2}}(x)=-\frac{\cos x}{x}. \quad (47.7)$$

l 阶球贝塞耳方程 (47.2) 的两个线性独立解是$\sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{l+\frac{1}{2}}(x)$和$\sqrt{\frac{\pi}{2x}}N_{l+\frac{1}{2}}(x)$，通常把它们叫作 l 阶球贝塞耳函数和 l 阶球诺埃曼函数，并分别记作 $j_l(x)$ 和 $n_l(x)$，

$$j_l(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{l+\frac{1}{2}}(x), \qquad n_l(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}N_{l+\frac{1}{2}}(x). \quad (47.8)$$

在(46.3)式中，如 $m=$ 半奇数，即 $m=\frac{1}{2}+$ 整数 l，则

$$\frac{J_{l+\frac{3}{2}}(x)}{x^{l+\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[\frac{J_{l+\frac{1}{2}}(x)}{x^{l+\frac{1}{2}}}\right],$$

即

$$\frac{j_{l+1}(x)}{x^{l+1}}=-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[\frac{j_l(x)}{x^l}\right]. \quad (47.9)$$

这是球贝塞耳函数的递推公式。(47.9)里的 l 如果是负数，则是 $-|l|$ 阶球贝塞耳函数的递推公式，亦即 $|l|$ 阶球诺埃曼函数的递推公式，即

$$\frac{n_{l+1}(x)}{x^{l+1}}=-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[\frac{n_l(x)}{x^l}\right]. \quad (47.10)$$

(47.7)已用初等函数表出 $j_0(x)$ 和 $n_0(x)$，运用(47.9)和(47.10)就能把所有的 $j_l(x)$ 和 $n_l(x)$ 都用初等函数表出。例如

$$\begin{cases} j_0(x)=\frac{\sin x}{x}, \\ j_1(x)=\frac{\sin x-x\cos x}{x^2}, \\ j_2(x)=\frac{3(\sin x-x\cos x)-x^2\sin x}{x^3}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \quad (47.11)$$

$$\begin{cases} n_0(x) = -\dfrac{\cos x}{x}, \\ n_1(x) = -\dfrac{\cos x + x\sin x}{x^2}, \\ n_2(x) = -\dfrac{3(\cos x + x\sin x) - x^2\cos x}{x^3}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{47.12}$$

球贝塞耳方程(47.2)可表为斯特姆-刘维型

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) - l(l+1)R + k^2r^2R = 0. \tag{47.13}$$

这方程在球心 $r=0$ 有自然边界条件。这自然边界条件排除球诺埃曼函数。如果在球面 $r=r_0$ 有第一类、第二类或第三类齐次边界条件，就构成本征值问题，它决定本征值 k^2.

作为斯特姆-刘维本征值问题的正交关系(43.9)的特例，不同本征值的同阶球贝塞耳函数在区间$(0, r_0)$上带权重 r^2 正交，

$$\int_0^{r_0} j_l(k_m r) j_l(k_n r) r^2 dr = 0 \quad (k_m \neq k_n). \tag{47.14}$$

现在计算 $j_l(k_n r)$ 的模 N_n,

$$[N_n]^2 = \int_0^{r_0} [j_l(k_n r)]^2 r^2 dr = \frac{\pi}{2k_n}\int_0^{r_0} [J_{l+\frac{1}{2}}(k_n r)]^2 r dr.$$

这已转化为贝塞耳函数的模的计算。

根据斯特姆-刘维本征值问题的性质④[见§43]，在区间$(0, r_0)$上，以 $j_l(k_n r)(n=1, 2, 3, \cdots)$为基本函数族，可把函数 $f(x)$ 展开为广义傅里叶级数

$$\begin{cases} f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n j_l(k_n r), \\ \text{系数 } f_n = \dfrac{1}{[N_n]^2}\displaystyle\int_0^{r_0} f(x) j_l(k_n r) r^2 dr. \end{cases} \tag{47.15}$$

例1 均质球，半径 r_0. 初始时刻，球体温度均匀为 u_0. 把

球放入温度为U_0的烘箱内，使球面温度保持为U_0，求解球内各处温度变化情况。

解 用球坐标系，这个问题可表为

$$\begin{cases} u_t - a^2\Delta_3 u = 0, \\ u|_{t=0} = u_0, \\ u|_{r=r_0} = U_0. \end{cases}$$

边界条件是非齐次的，应先设法化为齐次的。为此，令

$$u = U_0 + w,$$

则w的定解问题是

$$\begin{cases} w_t - a^2\Delta_3 w = 0, \\ w|_{t=0} = -(U_0 - u_0), \\ w|_{r=r_0} = 0. \end{cases}$$

边界条件确已化为齐次的。

把这个三维热传导方程分离变数(参看§40)，得指数式衰减的时间因子$e^{-a^2k^2t}$和三维空间中的亥姆霍兹方程。用球坐标系把亥姆霍兹方程分离变数，得球函数方程和球贝塞耳方程。因此，w的分离变数形式的解是

$$j_l(kr)P_l^m(\cos\theta)\begin{Bmatrix}\cos m\varphi \\ \sin m\varphi\end{Bmatrix}e^{-a^2k^2t}.$$

本例的球心是对称中心，温度分布跟θ和φ无关，可见$l=0$，$m=0$。于是分离变数形式的解是$j_0(kr)e^{-a^2k^2t}$，即

$$\frac{\sin kr}{r}e^{-a^2k^2t}.$$

边界条件$w|_{r=r_0}=0$即

$$\frac{\sin kr_0}{kr_0}e^{-a^2k^2t}=0.$$

这是说，

$$k=\frac{n\pi}{r_0}\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

这样，所求的 w 是

$$w=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\frac{\sin(n\pi r/r_0)}{n\pi r/r_0}e^{-a^2(n\pi/r_0)^2t}.$$

为决定系数 A_n，把上式代入初始条件，

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n\frac{\sin(n\pi r/r_0)}{n\pi r/r_0}=-(U_0-u_0).$$

把右边的 $-(U_0-u_0)$ 按球贝塞耳函数展开，比较两边系数，

$$A_n=\frac{\int_0^{r_0}-(U_0-u_0)\frac{\sin(n\pi r/r_0)}{n\pi r/r_0}r^2dr}{\int_0^{r_0}\left[\frac{\sin(n\pi r/r_0)}{n\pi r/r_0}\right]^2r^2dr}=(-1)^n2(U_0-u_0)$$

于是，得到答案

$$u=U_0+\frac{2(U_0-u_0)r_0}{\pi r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{r_0^2}t}\sin\frac{n\pi r}{r_0}$$

代替贝塞耳函数和诺埃曼函数，可取第一种和第二种汉克函数作为贝塞耳方程的两个线性独立解。这样，代替(47.8)，可取

$$h_l^{(1)}(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}H_{l+\frac{1}{2}}^{(1)}(x),\qquad h_l^{(2)}(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}H_{l+\frac{1}{2}}^{(2)}(x).$$

(47.16)

作为球贝塞耳方程 (47.2) 的两个线性独立解。(47.16)的两个函数叫作第一种和第二种球汉克函数。

现在具体写出球汉克函数。首先，

$$h_0^{(1)}(x)=j_0(x)+in_0(x)=\frac{\sin x}{x}+i\left(-\frac{\cos x}{x}\right)$$

$$=-i\frac{1}{x}(\cos x+i\sin x)=-i\frac{1}{x}e^{ix},$$

$$h_0^{(2)}(x)=j_0(x)-in_0(x)=[h_0^{(1)}(x)]^*=i\frac{1}{x}e^{-ix},$$

递推公式(47.9)和(47.10)对球汉克函数也适用，

$$\frac{h_{l+1}(x)}{x^{l+1}}=-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left[\frac{h_l(x)}{x^l}\right]. \tag{47.17}$$

运用递推公式(47.17)推出

$$\begin{cases} h_0^{(1)}(x)=-i\dfrac{1}{x}e^{ix} \\ h_1^{(1)}(x)=\left(-i\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right)e^{ix}, \\ h_2^{(1)}(x)=\left(-i\dfrac{3}{x^3}-\dfrac{3}{x^2}+i\dfrac{1}{x}\right)e^{ix}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_0^{(2)}(x)=i\dfrac{1}{x}e^{-ix}, \\ h_1^{(2)}(x)=\left(i\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right)e^{-ix}, \\ h_2^{(2)}(x)=\left(i\dfrac{3}{x^3}-\dfrac{3}{x^2}-i\dfrac{1}{x}\right)e^{-ix}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{47.18}$$

球汉克函数带有因子 $e^{\pm ix}$，这对于某些问题是比较方便的。参看例2。

从(47.11)，(47.12)和(47.18)容易看出，对于小的 x

$$\begin{cases} j_0\sim 1, \\ j_1\sim\dfrac{1}{x}, \\ j_2\sim\dfrac{3}{x^2}, \\ \cdots\cdots \end{cases} \begin{cases} n_0\sim-\dfrac{1}{x}, \\ n_1\sim-\dfrac{1}{x^2}, \\ n_2\sim-\dfrac{3}{x^3}, \\ \cdots\cdots \end{cases} \begin{cases} h_0^{(1)}\sim-i\dfrac{1}{x}, \\ h_1^{(1)}\sim-i\dfrac{1}{x^2}, \\ h_2^{(1)}\sim-i\dfrac{3}{x^3}, \\ \cdots\cdots \end{cases} \begin{cases} h_0^{(2)}\sim i\dfrac{1}{x}, \\ h_1^{(2)}\sim i\dfrac{1}{x^2}, \\ h_2^{(2)}\sim i\dfrac{3}{x^3}, \\ \cdots\cdots \end{cases} \tag{47.19}$$

例2 半径为 r_0 的球面径向速度分布为

$$v=v_0\cos\theta\cos\omega t.$$

试求解这个球在空气中辐射出去的声场中的速度势，设 r_0 远小于

声波波长。本例径向速度对空间中的方向的依赖性由因子 $\cos\theta$ 即 $P_1(\cos\theta)$描写，因而叫作偶极声源。

解 速度势U遵守三维波动方程(31.27)。本例所研究的问题在球坐标系中表示出来是

$$\begin{cases}U_{tt}-a^2\Delta_3 U=0 \quad \left(a^2=\dfrac{\gamma p_0}{\rho_0}\right),\\ \left.\dfrac{\partial U}{\partial r}\right|_{r=r_0}=v_0 P_1(\cos\theta)e^{-i\omega t}\end{cases}$$

为了计算方便，在边界条件中，$\cos\omega t$ 即 $\mathrm{Re}\,e^{-i\omega t}$ 写成了 $e^{-i\omega t}$，这就必须约定，在算出的最后结果中也应取它的实部。

把这个三维波动方程分离变数(参看§40)，得分离变数形式的解

$$U(r,\theta,\varphi,t)=\begin{Bmatrix}h_l^{(1)}(kr)\\h_l^{(2)}(kr)\end{Bmatrix}P_l^m(\cos\theta)\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\\sin m\varphi\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}e^{iakt}\\e^{-iakt}\end{Bmatrix}.$$

跟边界条件比较就看出：$l=1, m=0$；在时间因子中应舍弃 e^{iakt}而保留 e^{-iakt}，并且

$$ak=\omega,\ \text{即}\ k=\omega/a.$$

上式其实就是读者在初等的"振动与波"课程中已经熟悉的"波矢量、频率、波速三者之间的关系"，它也可以表为 $a/\lambda=f$ 即频率等于波速/波长。

$h_l^{(2)}(kr)$的因子 e^{-ikr} 跟时间因子 $e^{-i\omega t}$ 相结合给出 $e^{-ik(r+at)}$。根据§34指出的道理，这是以速度 a 朝 $-r$ 方向传播的波，即从远处向球收缩的波，跟题意不合，应该舍弃。至于 $h_l^{(1)}(kr)$的因子 e^{ikr} 跟时间因子 $e^{-i\omega t}$ 相结合给出 $e^{ik(r-at)}$，这是以速度 a 朝 $+r$ 方向传播的波，即从球向远处发射出去的波，正是题所要求的。

这样，分离变数形式的解就只有

$$h_1^{(1)}(kr)P_1(\cos\theta)e^{-i\omega t}\quad(ka=\omega),$$

不存在叠加问题。所求的解

$$U = Ah_1^{(1)}(kr)P_1(\cos\theta)e^{-i\omega t}.$$

为确定系数 A，把上式代入边界条件，得

$$A\left(i\frac{2}{k^2r_0^3}+\frac{2}{kr_0^2}-i\frac{1}{r_0}\right)e^{ikr_0}=v_0,$$

从这个式子可求出 A. 球的半径 r_0 远小于声波的波长 $\lambda(=2\pi/k)$ 即 r_0k 很小，上式可用(47.19)简化为

$$Ai\frac{2}{k^2r_0^3}=v_0,$$

从而

$$A=-i\frac{v_0k^2r_0^3}{2}.$$

于是，得到答案

$$U=-i\frac{v_0k^2r_0^3}{2}h_1^{(1)}(kr)P_1(\cos\theta)e^{-i\omega t}$$

$$=-i\frac{v_0k^2r_0^3}{2}\left(-i\frac{1}{k^2r^2}-\frac{1}{kr}\right)P_1(\cos\theta)e^{ik(r-at)}.$$

在"远场区"即 r 较大的地方，上式简化为

$$U=i\frac{v_0kr_0^3}{2r}P_1(\cos\theta)e^{ik(r-at)}.$$

取实部，

$$U=-\frac{v_0kr_0^3}{2r}P_1(\cos\theta)\sin k(r-at).$$

这里对空间中方向的依赖也由 $P_1(\cos\theta)$ 描写，因而是偶极声场。偶极声源发射的声场自然是偶极声场。

习　　题

1. 确定球形铀块的临界半径。["临界"一词参看 § 36 习题 8]

2. 均质球，半径为 r_0，初始温度分布为 $f(r)$. 把球面温度保持为零度而使它冷却。求解球内各处温度变化情况。

3. 均质球，半径为 r_0，初始温度分布为 $f(r)\cos\theta$. 把球面温度保持为

零度而使它冷却。求解球内各处温度变化情况。

4. 半径为$2r_0$的均质球。初始温度$=\begin{cases}u_0 & (0<r<r_0),\\ 0 & (r_0<r<2r_0).\end{cases}$把球面保持为零度而使它冷却。求解球内温度变化情况。

5. 均质球，半径为r_0，初始温度为U_0。放在温度为u_0的空气中自由冷却(按照牛顿冷却定律跟空气交换热量)，求解球内各处温度变化情况。

6. 半径为r_0的球面径向速度分布为$v=v_0\frac{1}{4}(3\cos 2\theta+1)\cos\omega t$. 试求解这个球在空气中辐射出去的声场中的速度势，设$r_0\ll$波长λ. 本题径向速度对空间中的方向的依赖性由因子$\frac{1}{4}(3\cos 2\theta+1)$即$P_2(\cos\theta)$描写，因而是轴对称四极声源。

§48. 路积分表示式与渐近公式

(一) 索末菲积分

索末菲把柱函数表为路积分，这种路积分表示式就叫作索末菲积分。

很容易验证，

$$e^{i(ax+by)}\quad (a^2+b^2=k^2)$$

是二维亥姆霍兹方程$v_{xx}+v_{yy}+k^2v=0$的特解。从直角坐标系(x,y)变换到平面极坐标系(ρ,φ)，同时把a和b改记作

$$a=k\cos\alpha,\quad b=k\sin\alpha,$$

则上述特解

$$e^{i(ax+by)}=e^{ik\rho(\cos\alpha\cos\varphi+\sin\alpha\sin\varphi)}=e^{ik\rho\cos(\alpha-\varphi)}.$$

为便于跟前面有关各节相比较，把$k\rho$记作x(注意这x并不是直角坐标，它只是代表$k\rho$的一个记号)。于是，上述特解表为

$$e^{ix\cos(\alpha-\varphi)}. \tag{48.1}$$

作(48.1)的线性叠加，

$$v=\int_{\beta}^{\gamma}A(\alpha)e^{ix\cos(\alpha-\varphi)}d\alpha,$$

这当然仍是二维亥姆霍兹方程 $\Delta_2 v+k^2v=0$ 的解。参考(46.22)—(46.25)，取 $A(\alpha)=a_m e^{im\alpha}$,

$$v=a_m\int_{\beta}^{\gamma}e^{im\alpha+ix\cos(\alpha-\varphi)}d\alpha.$$

鉴于(46.24)，令 $\psi=\alpha-\varphi$，则

$$v=a_m e^{im\varphi}\int_{\beta-\varphi}^{\gamma-\varphi}e^{im\psi+ix\cos\psi}d\psi.$$

一般说来，(46.23)比(46.24)较为常用，再令 $\zeta=\psi-\frac{\pi}{2}$，则

$$v=a_m e^{im\varphi}e^{im\frac{\pi}{2}}\int_{\beta-\varphi-\frac{\pi}{2}}^{\gamma-\varphi-\frac{\pi}{2}}e^{im\zeta-ix\sin\zeta}d\zeta$$

$$=a_m i^m e^{im\varphi}\int_{\beta-\varphi-\frac{\pi}{2}}^{\gamma-\varphi-\frac{\pi}{2}}e^{im\zeta-ix\sin\zeta}d\zeta. \qquad (48.2)$$

(48.2)作为二维亥姆霍兹方程的解，如果积分上下限跟 φ 无关，就是说，如果极坐标 ρ(注意 x 就是 $k\rho$)和 φ 是分离在不同的因子里，那么它的径向因子（即积分式）应当就是贝塞耳方程的解即柱函数，这是§40关于亥姆霍兹方程的分离变数过程已经表明而且§46例6又作了说明的。可是，(48.2)的积分上下限是含有 φ 的。要使积分上下限跟 φ 无关，必须把上下限取为某种无限大。这样一来，又需要考虑积分的上下限趋于∞时积分是否收敛。为此，试考察当 $\zeta=\xi+i\eta\to\infty$ 时，被积函数的模怎样变化。

$$\left|e^{im\zeta-ix\sin\zeta}\right|=\left|e^{\mathrm{Re}(im\zeta-ix\sin\zeta)+i\,\mathrm{Im}(im\zeta-ix\sin\zeta)}\right|=e^{\mathrm{Re}(im\zeta-ix\sin\zeta)},$$

$$\mathrm{Re}(im\zeta-ix\sin\zeta)=\mathrm{Re}(im\zeta)-\mathrm{Re}(ix\sin\zeta)$$

$$=\mathrm{Re}(im\xi-m\eta)-\mathrm{Re}\left[\frac{x}{2}(e^{i\zeta}-e^{-i\zeta})\right]$$

$$= -m\eta - \mathrm{Re}\left[\frac{x}{2}(e^{-\eta}e^{i\xi} - e^{\eta}e^{-i\xi})\right]$$

$$= -m\eta + \frac{x}{2}(e^{\eta} - e^{-\eta})\cos\xi. \qquad (48.3)$$

(48.3)的第一项是 η 的一次幂，第二项是 η 的指数函数。当 η 增大时，指数函数的增大远比幂函数来得快，所以第二项远比第一项重要。（如果 $x=0$，第二项根本不存在，那就另当别论了。）参看图76，如 ζ 在划线区域中趋于∞，则(48.3)的第二项趋于$+\infty$，被积函数的模趋于 $e^{+\infty}$，积分发散。如 ζ 在未划线区域中趋于∞，则(48.3)的第二项趋于$-\infty$，被积函数的模迅速地趋于 $e^{-\infty}$ 即 0，积分收敛。

到这里，我们得到结论：路积分

$$a_m\int_l e^{im\zeta - ix\sin\zeta}d\zeta \qquad (48.4)$$

的积分路径 l 的两端在未划线区域中趋于无限远点，则(48.4)收敛。它不再跟 φ 有关，如前所指出，它应当就是柱函数。

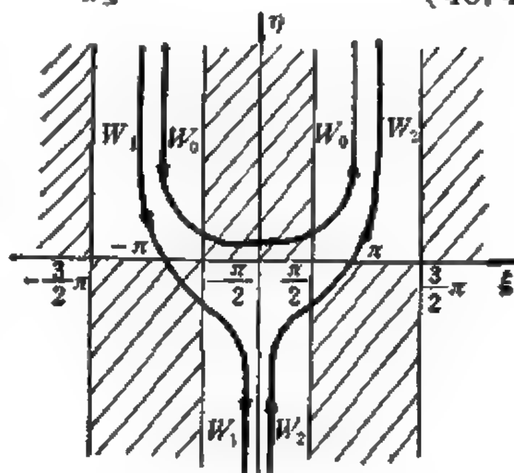


图 76

取积分路径为图 76 的 W_0，取常数 a_m 为 $1/2\pi$，可以证明这个柱函数是m阶贝塞耳函数 $J_m(x)$，

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{W_0} e^{im\zeta - ix\sin\zeta}d\zeta. \qquad (48.5)$$

事实上，对于 $x=0$，当 ζ 趋于 W_0 两端的时候，(48.5)的被积函数的模

$$|e^{im\zeta}| = e^{-m\eta} \to e^{-\infty} = 0,$$

积分收敛。既然(48.5)是柱函数而且在 $x=0$ 是有限的，它只能就

是贝塞耳函数。

如果m是整数，还可以具体验证(48.5)确是贝塞耳函数。被积函数在有限远点是解析的，根据科希定理，积分路径W_0可以变形为图77的折线$-\pi+i\infty\to-\pi\to+\pi\to\pi+i\infty$，

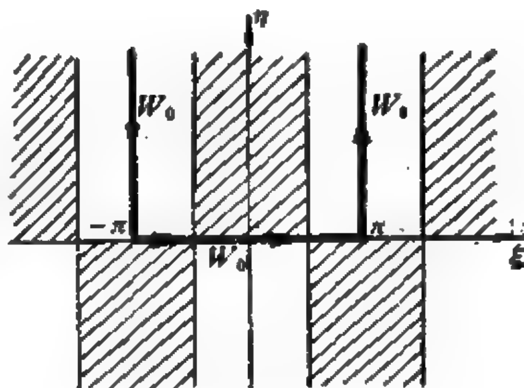


图 77

$$J_m(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+i\infty}^{-\pi}e^{im\zeta-ix\sin\zeta}d\zeta+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{im\zeta-ix\sin\zeta}d\zeta$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi+i\infty}e^{im\zeta-ix\sin\zeta}d\zeta.$$

在右边第一个积分中，令$\zeta=z-2\pi$，则

$$J_m(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\pi+i\infty}^{\pi}e^{im2\pi}e^{imz-ix\sin z}dz$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{im\zeta-ix\sin\zeta}d\zeta+\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi+i\infty}e^{im\zeta-ix\sin\zeta}d\zeta.$$

既然m是整数，$e^{im2\pi}=1^m=1$，所以右边第一项跟第三项互相消去，

$$J_m(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{im\zeta-ix\sin\zeta}d\zeta.$$

这正是贝塞耳函数的积分表示式(46.23)。

又取积分路径为图76的W_1或W_2，取常数a_m为$1/\pi$，暂且把这两个柱函数记作$H_m^{(1)}(x)$和$H_m^{(2)}(x)$，

$$\begin{cases}H_m^{(1)}(x)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{W_1}e^{im\zeta-ix\sin\zeta}d\zeta,\\ H_m^{(2)}(x)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{W_2}e^{im\zeta-ix\sin\zeta}d\zeta.\end{cases}\tag{48.6}$$

(48.6)是两个线性独立的m阶柱函数，凡是m阶柱函数都可表为它们的线性组合。例如

$$J_m(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{W_0}e^{im\zeta-ix\sin\zeta}d\zeta=\frac{1}{2\pi}\int_{W_1+W_2}e^{im\zeta-ix\sin\zeta}d\zeta$$

$$=\frac{1}{2}[H_m^{(1)}(x)+H_m^{(2)}(x)].\qquad(48.7)$$

如m不是整数，$J_m(x)$ 和 $J_{-m}(x)$是两个线性独立m阶柱函数，其他的m阶柱函数都可表为它们的线性组合。现在

$$J_{-m}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{W_0}e^{-im\zeta-ix\sin\zeta}d\zeta.$$

令 $\zeta=-\zeta'$，则

$$J_{-m}(x)=\frac{-1}{2\pi}\int_{-W_0}e^{im\zeta'+ix\sin\zeta'}d\zeta'.$$

为了把积分路径移入未划线区域，要使积分路径 $-W_0$ 向左移动π（图 78）。为此，又令 $\zeta'=\zeta+\pi$，则

图 78

$$J_{-m}(x)=-\frac{1}{2\pi}\int_{W_0'}e^{im(\zeta+\pi)+ix\sin(\zeta+\pi)}d\zeta$$

$$=-\frac{e^{im\pi}}{2\pi}\int_{W_0'}e^{im\zeta-ix\sin\zeta}d\zeta.\qquad(48.8)$$

由(48.5)和(48.8)得

$$J_m(x)-e^{-im\pi}J_{-m}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{W_0+W_0'}e^{im\zeta-ix\sin\zeta}d\zeta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{W_2+W_0'}e^{im\zeta-ix\sin\zeta}d\zeta$$

$$=\frac{1}{2}H_m^{(2)}(x)+\frac{1}{2\pi}\int_{W_2'}e^{im\zeta-ix\sin\zeta}d\zeta.$$

在上式右边第二个积分中，令 $\zeta=z-2\pi$，则

$$J_m(x)-e^{-im\pi}J_{-m}(x)$$

$$=\frac{1}{2}H_m^{(2)}(x)-\frac{1}{2\pi}\int_{W_2}e^{-i2m\pi}e^{imz-ix\sin z}dz$$

$$=\frac{1}{2}(1-e^{-i2m\pi})H_m^{(2)}(x)=e^{-im\pi}i\sin m\pi H_m^{(2)}(x),$$

即

$$H_m^{(2)}(x)=\frac{e^{im\pi}J_m(x)-J_{-m}(x)}{i\sin m\pi}. \tag{48.9}$$

把上式代入(48.7)又得

$$H_m^{(1)}(x)=\frac{e^{-im\pi}J_m(x)-J_{-m}(x)}{-i\sin m\pi}. \tag{48.10}$$

把柱函数$\frac{1}{2i}[H_m^{(1)}(x)-H_m^{(2)}(x)]$暂且记作 $N_m(x)$，

$$N_m(x)=\frac{1}{2i}[H_m^{(1)}(x)-H_m^{(2)}(x)]. \tag{48.11}$$

关系式(48.7)和(49.11)等价于

$$\begin{cases}H_m^{(1)}(x)=J_m(x)+iN_m(x),\\ H_m^{(2)}(x)=J_m(x)-iN_m(x).\end{cases} \tag{48.12}$$

把(48.9)和(48.10)代入(48.11)，

$$N_m(x)=\frac{J_m(x)\cos m\pi-J_{-m}(x)}{\sin m\pi} \tag{48.13}$$

这正是诺埃曼函数 $N_m(x)$的一种定义（参看附录十五）。因此，(48.6)和(48.11)的记号 $H_m^{(1)}(x)$，$H_m^{(2)}(x)$和$N_m(x)$用得完全正当。

(48.5)和(48.6)就是索末菲积分。

(二) 渐近公式

从索末菲积分出发，运用鞍点法（最速下降法），不难导出柱函数对于大 x 的近似式，即所谓渐近公式。

以 $H_m^{(1)}(x)$ 为例，

$$H_m^{(1)}(x)=\frac{1}{\pi}\int_{W_1} e^{im\zeta-ix\sin\zeta}d\zeta.$$

前已指出，被积函数的模的大小取决于指数

$$im\zeta-ix\sin\zeta \tag{48.14}$$

的实部

$$\mathrm{Re}(im\zeta-ix\sin\zeta)=-m\eta+\frac{x}{2}(e^{\eta}+e^{-\eta})\cos\xi, \tag{48.15}$$

其中 $\frac{x}{2}(e^{\eta}-e^{-\eta})\cos\xi$ 尤为重要。对于大的 x，决定被积函数的模的(48.15)式在图 76—图 78的划线区域具有很大的正值，在未划线区域具有负值，其绝对值很大。图 79 是 (48.15)的“地形图”。点 $\xi=-\frac{\pi}{2}$，$\eta=0$ 的两侧是高峰，前后是低谷，因而叫作鞍点。

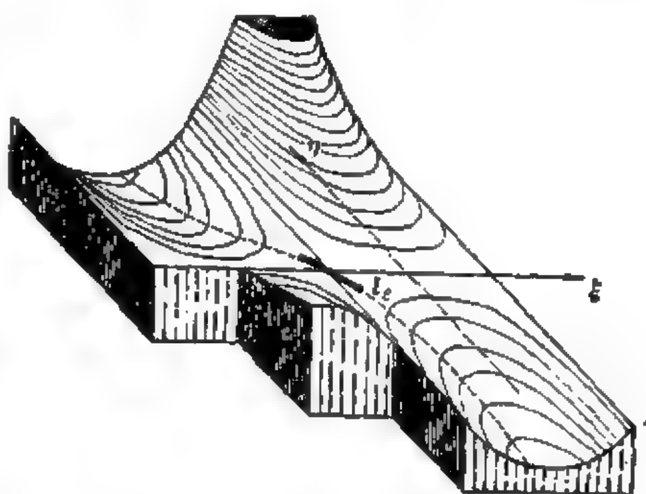


图 79

把积分路径 W_1 变形，使之通过鞍点。在积分路径上，被积函数的模于鞍点最大，在鞍点前后则迅速减小。因而积分的值主要来自鞍点附近的一段路程 l_s。适当选取 l_s 的方向使被积函数的模在鞍点前后减小得最快，那自然最理想。为此，需要研究(48.15)的主要部分 $\frac{x}{2}(e^{\eta}-e^{-\eta})\cos\xi$ 在 l_s 上的变化情况。近似地把 l_s 当

作直线段，其辐角为θ. 把l_s上的点ζ与鞍点的距离记作s，则ζ应表为

$$\zeta=-\frac{\pi}{2}+se^{i\theta},\ \text{即}\begin{cases}\xi=-\dfrac{\pi}{2}+s\cos\theta,\\ \eta=s\sin\theta.\end{cases}$$

于是，

$$\frac{x}{2}(e^{\eta}-e^{-\eta})\cos\xi=\frac{x}{2}(e^{s\sin\theta}-e^{-s\sin\theta})\cos\left(-\frac{\pi}{2}+s\cos\theta\right)$$

$$=\frac{x}{2}(e^{s\sin\theta}-e^{-s\sin\theta})\sin(s\cos\theta)$$

$$=\frac{x}{2}\left[1+\frac{s\sin\theta}{1!}+\cdots-\left(1-\frac{s\sin\theta}{1!}+\cdots\right)\right]$$

$$\times\left(s\cos\theta-\frac{s^3\cos^3\theta}{3!}+\cdots\right)$$

$$\approx\frac{x}{2}(2s\sin\theta)(s\cos\theta)=\frac{x}{2}s^2\sin 2\theta. \tag{48.16}$$

上式沿路径的变化率

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{x}{2}s^2\sin 2\theta\right)=xs\sin 2\theta.$$

于$2\theta=-\frac{\pi}{2}$，即 $\theta=-\frac{\pi}{4}$，变化率取负值，且绝对值最大。

这样说来，积分的值主要来自通过鞍点而与ξ轴作$-45°$的短线段l_s上的积分，

$$H_m^{(1)}(x)\approx\frac{1}{\pi}\int_{l_s}e^{im\zeta-ix\sin\zeta}d\zeta.$$

上面已算出(48.14)的实部(48.15)的主要部分在l_s上为(48.16)即$\frac{1}{2}xs^2\sin 2\theta$. 至于(48.14)的虚部的主要部分$-\frac{x}{2}(e^{\eta}+e^{-\eta})\sin\xi$在$l_s$上同样可以算出为$x\left(1-\frac{1}{2}s^2\cos 2\theta\right)$. 因此，

$$H_m^{(1)}(x)\approx\frac{1}{\pi}\int_{-\epsilon}^{\epsilon} e^{im\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}xs^2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+ix\left(1-\frac{1}{2}s^2\cos\frac{\pi}{2}\right)}e^{i\theta}ds$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\epsilon}^{\epsilon} e^{im\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{2}xs^2+ix}\ e^{-i\frac{\pi}{4}}ds$$

$$=\frac{1}{\pi}e^{i\left(-m\frac{\pi}{2}+x-\frac{\pi}{4}\right)}\int_{-\epsilon}^{\epsilon} e^{-\frac{x}{2}s^2}\ ds.$$

引用$t=s\sqrt{x/2}$作为积分变数，得到$H_m^{(1)}(x)$的渐近公式

$$H_m^{(1)}(x)\approx\frac{1}{\pi}e^{i\left(x-\frac{\pi}{2}m-\frac{\pi}{4}\right)}\sqrt{\frac{2}{x}}\int_{-\epsilon\sqrt{x/2}}^{+\epsilon\sqrt{x/2}}e^{-t^2}dt$$

$$\approx\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{x}}e^{i\left(x-\frac{\pi}{2}m-\frac{\pi}{4}\right)}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{x}}e^{i\left(x-\frac{\pi}{2}m-\frac{\pi}{4}\right)}\sqrt{\pi}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{i\left(x-\frac{\pi}{2}m-\frac{\pi}{4}\right)}. \tag{48.17}$$

同理可得$H_m^{(2)}(x)$的渐近公式

$$H_m^{(2)}(x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{-i\left(x-\frac{\pi}{2}m-\frac{\pi}{4}\right)}. \tag{48.18}$$

把以上两式代入(48.7)和(48.11)即得$J_m(x)$和$N_m(x)$的渐近公式

$$J_m(x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{2}m-\frac{\pi}{4}\right), \tag{48.19}$$

$$N_m(x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\pi}{2}m-\frac{\pi}{4}\right). \tag{48.20}$$

（三）发散波和收敛波

§40用柱坐标系对波动方程进行分离变数。分离变数形式的解是

$$Z_m(\sqrt{k^2-h^2}\rho)\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\cos hz\\ \sin hz\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}e^{ikat}\\ e^{-ikat}\end{Bmatrix}, \tag{48.21}$$

其中 Z_m 是m阶柱函数。$h=0$ 描写的是二维波动。

现在取时间因子为 e^{-ikat} 并考察(48.21)在大 ρ 地方的行为。为书写简便起见，以下的式子将省略$\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\cos hz\\ \sin hz\end{Bmatrix}$不写出。

先取 Z_m 为 $H_m^{(1)}$. 按照(48.17)，对于大的 ρ,

$$H_m^{(1)}(\sqrt{k^2-h^2}\rho)e^{-ikat}\approx\sqrt{\frac{2}{\pi\sqrt{k^2-h^2}\rho}}e^{i\left(\sqrt{k^2-h^2}\rho-kat-\frac{\pi}{2}m-\frac{\pi}{4}\right)}.$$

时间 t 只出现于指数里的$\sqrt{k^2-h^2}\rho-kat$ 之中，这是朝 $+\rho$ 方向传播的波，就是说，向远处发散出去的波。

次取 Z_m 为 $H_m^{(2)}$. 按照(48.18)，对于大的 ρ,

$$H_m^{(2)}(\sqrt{k^2-h^2}\rho)e^{-ikat}\approx\sqrt{\frac{2}{\pi\sqrt{k^2-h^2}\rho}}e^{-i\left(\sqrt{k^2-h^2}\rho+kat+\frac{\pi}{2}m-\frac{\pi}{4}\right)}.$$

这是朝 $-\rho$ 方向传播的波，就是说，从远处向柱坐标系的极轴收敛的波。在波的发射问题中，这种收敛波应当舍弃。

如果时间因子改取 e^{ikat}，则 $H_m^{(1)}$对应于收敛波，$H_m^{(2)}$ 却对应于发散波。

最后取 Z_m 为 J_m 或 N_m. 按照(48.19)和(48.20)，对于大的ρ,

$$J_m(\sqrt{k^2-h^2}\rho)e^{\pm ikat}$$
$$\approx\sqrt{\frac{2}{\pi\sqrt{k^2-h^2}\rho}}\cos\left(\sqrt{k^2-h^2}\rho+\frac{\pi}{2}m-\frac{\pi}{4}\right)e^{\pm ikat},$$
$$N_m(\sqrt{k^2-h^2}\rho)e^{\pm ikat}$$
$$\approx\sqrt{\frac{2}{\pi\sqrt{k^2-h^2}\rho}}\sin\left(\sqrt{k^2-h^2}\rho+\frac{\pi}{2}m-\frac{\pi}{4}\right)e^{\pm ikat}.$$

t 跟 ρ 是分离的，它们代表驻波。

§ 40 还用球坐标系对波动方程进行分离变数。分离变数形式的解是

$$z_l(kr)P_l^m(\cos\theta)\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}e^{ikat}\\ e^{-ikat}\end{Bmatrix},\qquad(48.22)$$

即

$$\sqrt{\frac{\pi}{2kr}}Z_{l+\frac{1}{2}}(kr)P_l^m(\cos\theta)\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}e^{ikat}\\ e^{-ikat}\end{Bmatrix}. \quad (48.23)$$

取时间因子为 e^{-ikat}，运用柱函数的渐近公式考察 (48.22)即 (48.23) 在大 r 地方的行为，就知道 $h_l^{(1)}(kr)$ 对应于发散波，$h_l^{(2)}(kr)$对应于收敛波而应舍弃。

如果时间因子改取 e^{ikat}，则 $h_l^{(1)}(kr)$对应于收敛波而应舍弃，$h_l^{(2)}(kr)$却对应于发散波。

$j_l(kr)$和 $n_l(kr)$则对应于驻波。

例 半径为 ρ_0 的长圆柱面径向速度分布为

$$v=v_0\cos\omega t.$$

试求解这个长圆柱在空气中辐射出去的声场中的速度势。设 ρ_0 远小于声波波长 λ.

解 本例的速度势U满足二维波动方程，这个问题在平面极坐标系中表示出来是

$$U_{tt}-a^2\Delta_2 U=0,$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial\rho}\right|_{\rho=\rho_0}=v_0 e^{-i\omega t}.$$

边界条件里的 $\cos\omega t$ 即 $\mathrm{Re}e^{-i\omega t}$ 写成了 $e^{-i\omega t}$，这就必须约定，在算出的最后结果中也应取它的实部。

这个二维波动方程的分离变数形式的解是

$$Z_m(k\rho)\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}e^{ikat}\\ e^{-ikat}\end{Bmatrix}.$$

跟边界条件比较就看出：$m=0$；在时间因子中应舍弃 e^{ikat} 而保留 e^{-ikat}，并且

$$ak=\omega,\ \text{即}\ k=\omega/a.$$

§ 47 例 2 已指出上式即"频率等于波速/波长"。

考虑到这是声发射问题，柱函数 $Z_0(k\rho)$ 可取为 $H_0^{(1)}(k\rho)$ 而舍弃 $H_0^{(2)}(k\rho)$.

本例分离变数形式的解只有 $H_0^{(1)}(k\rho)e^{-i\omega t}(ka=\omega)$，不存在叠加问题。所求的解

$$U=AH_0^{(1)}(k\rho)e^{-i\omega t}.$$

为确定系数 A，把上式代入边界条件。

$$A\left[\frac{\partial}{\partial\rho}H_0^{(1)}(k\rho)\right]_{\rho=\rho_0}=v_0,$$

从这个式子可求出 A. 柱的半径 ρ_0 远小于声波的波长 $\lambda(=2\pi/k)$ 即 $\rho_0 k$ 很小，利用(42.20)可把上式简化为

$$A\frac{\partial}{\partial\rho}\left[i\frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{k\rho}{2}+C\right)\right]\Bigg|_{\rho=\rho_0}=v_0,$$

即

$$iA\frac{2}{\pi}\frac{1}{\rho_0}=v_0.$$

从而 $A=-i\frac{\pi v_0\rho_0}{2}$. 于是，得到答案

$$U=-i\frac{\pi v_0\rho_0}{2}H_0^{(1)}(k\rho)e^{-i\omega t}.$$

在远场区即 ρ 较大的地方，用渐近公式(48.17)，得

$$\begin{aligned}U&=-i\frac{\pi v_0\rho_0}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}}e^{i\left(k\rho-\frac{\pi}{4}\right)-i\omega t}\\&=v_0\rho_0\sqrt{\frac{\pi}{2k\rho}}e^{i\left(k\rho-\omega t-\frac{3}{4}\pi\right)}.\end{aligned}$$

取实部，

$$U=v_0\rho_0\sqrt{\frac{\pi}{2k\rho}}\cos\left[k(\rho-at)-\frac{3}{4}\pi\right].$$

这是从长圆柱面向远处传播而振幅按 $1/\sqrt{\rho}$ 减小的波。

（四）虚宗量汉克函数

虚宗量贝塞耳方程在圆柱内部为有限的解是虚宗量贝塞耳函数 $I_m(x)=i^{-m}J_m(ix)$. 如不限于圆柱内部，一般地说，虚宗量贝塞耳方程有两个线性独立解，即虚宗量贝塞耳函数和虚宗量诺埃曼函数，或者虚宗量的第一种和第二种汉克函数 $H_m^{(1)}(ix)$ 和 $H_m^{(2)}(ix)$.

从渐近公式(48.17)和(48.18)得 $H_m^{(1)}(ix)$ 和 $H_m^{(2)}(ix)$ 在大 x 处的行为：

$$H_m^{(1)}(ix)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi ix}}e^{i\left(ix-\frac{\pi}{2}m-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{-x}e^{-i\frac{\pi}{2}m}e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}(-i)i^{-m}e^{-x},$$

$$H_m^{(2)}(ix)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi ix}}e^{-i\left(ix-\frac{\pi}{2}m-\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}i^{m}e^{x}.$$

于 $x\to\infty$，显然有 $H_m^{(2)}(ix)\to\infty$. 对于圆柱外部的问题，$H_m^{(2)}(ix)$ 随 x 而无限增大，这是没有物理意义的。因此，对于圆柱外部的问题只用虚宗量的第一种汉克函数就够了。

现在进一步考察 $H_m^{(1)}(ix)$. 根据(48.10)和(46.28)，

$$H_m^{(1)}(ix)=\frac{e^{-i\pi m}J_m(ix)-J_{-m}(ix)}{-i\sin m\pi}$$

$$=\frac{e^{-i\pi m}i^{m}I_m(x)-i^{-m}I_{-m}(x)}{-i\sin m\pi}$$

$$=\frac{e^{-i\frac{\pi}{2}m}}{-i}\,\frac{I_m(x)-I_{-m}(x)}{\sin m\pi}.$$

乘以 $\frac{\pi}{2}ie^{i\frac{\pi}{2}m}$，成为实函数 $\frac{I_{-m}(x)-I_m(x)}{\sin m\pi}$. 通常把它记作 $K_m(x)$，

$$K_m(x)=\frac{\pi}{2}\,\frac{I_{-m}(x)-I_m(x)}{\sin m\pi}. \tag{48.24}$$

平常说到虚宗量汉克函数就是指的(48.24)。

(五) 平面波展开为球面波的叠加

研究波(声波、电磁波、量子力学的波函数)的散射问题，常常需要把平面波展开为球面波的叠加。

函数 $v=e^{ikz}$ 显然满足亥姆霍兹方程 $\Delta_3 v+k^2v=0$，因而代表波动。事实上，补上时间因子(40.25)，它就成为 $e^{ik(z\pm at)}$，这是沿 z 轴负和正方向传播的平面波。改用球坐标，这平面波可表为

$$v(r,\theta)=e^{ikr\cos\theta}. \qquad (48.25)$$

在球坐标系中，亥姆霍兹方程 $\Delta_3 v+k^2v=0$ 的分离变数形式而又在 $r=0$ 为有限的解是

$$j_l(kr)P_l^m(\cos\theta)\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{Bmatrix}. \qquad (48.26)$$

这是各种模式的球面波。平面波(48.25)，作为亥姆霍兹方程的解，必可表为(48.26)的线性叠加。考虑到(48.25)跟 φ 无关，应限制 $m=0$。这样，

$$e^{ikr\cos\theta}=\sum_{l=0}^{\infty}A_l j_l(kr)P_l(\cos\theta). \qquad (48.27)$$

问题在于确定展开式(48.27)的系数 A_l。

应用系数公式(44.13)，

$$A_l j_l(kr)=\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{+1}e^{ikrx}P_l(x)dx, \qquad (48.28)$$

式中按照惯例把 $\cos\theta$ 写成 x(x 并不是直角坐标)。只要算出(48.28)右边的积分，就可确定 A_l。

这里不准备硬算。试比较(48.28)两边在 $r\to\infty$ 时的渐近公式。于 $r\to\infty$，(48.28)的左边

$$A_l j_l(kr)=A_l\sqrt{\frac{\pi}{2kr}}J_{l+\frac{1}{2}}(kr)\sim A_l\frac{1}{kr}\cos\left(kr-\frac{(l+1)\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{A_l}{2ikr}\left(e^{ikr-i\frac{l}{2}\pi}-e^{-ikr+i\frac{l}{2}\pi}\right).$$

再看(48.28)的右边，

$$\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{+1}e^{ikrx}P_l(x)dx=\frac{2l+1}{2ikr}\int_{-1}^{+1}P_l(x)de^{ikrx}$$

$$=\frac{2l+1}{2ikr}[P_l(x)e^{ikrx}]_{-1}^{+1}-\frac{2l+1}{2ikr}\int_{-1}^{+1}e^{ikrx}P_l'(x)dx.$$

于 $r\to\infty$，上式右边已积出部分为 $1/r$ 的数量级，尚未积出部分如仿照上面分部积分一次可知为 $1/r^2$ 的数量级。因此，于 $r\to\infty$，(48.28)的右边

$$\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{+1}e^{ikrx}P_l(x)dx\sim\frac{2l+1}{2ikr}[P_l(1)e^{ikr}-P_l(-1)e^{-ikr}]$$

$$=\frac{2l+1}{2ikr}[e^{ikr}-e^{-ikr}(-1)^l]=\frac{2l+1}{2ikr}e^{i\frac{l}{2}\pi}(e^{ikr-i\frac{l}{2}\pi}-e^{-ikr+i\frac{l}{2}\pi}).$$

比较两边的渐近公式即知

$$A_l=(2l+1)e^{i\frac{l}{2}\pi}=(2l+1)i^l.$$

把这代回(48.28)就得到平面波展开为球面波的叠加的公式

$$e^{ikr\cos\theta}=\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^lj_l(kr)P_l(\cos\theta). \qquad (48.29)$$

习 题

1. 半径为 ρ_0 的长圆柱面上一条母线作谐振动，即柱面径向速度为 $v=v_0\delta(\varphi-\varphi_0)\cos\omega t$. 试求解这个长圆柱在空气中辐射出去的声场中的速度势，设 $\rho_0\ll\lambda$.

2. 半径为 r_0 的球面径向速度分布为 $v=v_0\frac{3}{2}(1-\cos2\theta)\sin2\varphi\cos\omega t$. 试求解这个球在空气中辐射出去的声场中的速度势，设 $r_0\ll\lambda$. 本题是非轴对称的四极声源。

§49. 开耳芬函数及其他

在物理学中，常常(举一个例子，研究高频交变电流的趋肤效应时，参看附录二十)会遇到**开耳芬方程**

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-(i\beta^2x^2+m^2)y=0. \tag{49.1}$$

它不是别的，正是以$\sqrt{-i}\beta x$为宗量的贝塞耳方程，它的解当然也就是以$\sqrt{-i}\beta x$为宗量的柱函数。这些函数的值是复数，其实部和虚部亦分别满足方程(49.1)。通常把$J_m(\sqrt{-i}\beta x)$, $H_m^{(1)}(\sqrt{-i}\beta x)$和$K_m(\sqrt{-i}\beta x)$的实部和虚部分开，并分别给以一定的符号，

$$\begin{aligned}
\mathrm{ber}_m(\beta x)&=\mathrm{Re}J_m(\sqrt{-i}\beta x),\\
\mathrm{bei}_m(\beta x)&=\mathrm{Im}J_m(\sqrt{-i}\beta x),\\
\mathrm{her}_m(\beta x)&=\mathrm{Re}H_m^{(1)}(\sqrt{-i}\beta x),\\
\mathrm{hei}_m(\beta x)&=\mathrm{Im}H_m^{(1)}(\sqrt{-i}\beta x),\\
\mathrm{ker}_m(\beta x)&=\mathrm{Re}K_m(\sqrt{-i}\beta x),\\
\mathrm{kei}_m(\beta x)&=\mathrm{Im}K_m(\sqrt{-i}\beta x).
\end{aligned}$$

这些叫作**开耳芬函数**。

例如，具体写出$\mathrm{ber}_0(\beta x)$和$\mathrm{bei}_0(\beta x)$，

$$\begin{aligned}
\mathrm{ber}_0(\beta x)&=\mathrm{Re}J_0(\sqrt{-i}\beta x)\\
&=1-\frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{\beta x}{2}\right)^4+\frac{1}{(4!)^2}\left(\frac{\beta x}{2}\right)^8-\cdots\\
&\quad+(-1)^{k-1}\frac{1}{[(2k-2)!]^2}\left(\frac{\beta x}{2}\right)^{4(k-1)}+\cdots
\end{aligned} \tag{49.2}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{bei}_0(\beta x)&=\mathrm{Im}J_0(\sqrt{-i}\beta x)\\
&=\frac{1}{(1!)^2}\left(\frac{\beta x}{2}\right)^2-\frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{\beta x}{2}\right)^6+\cdots\\
&\quad+(-1)^{k-1}\frac{1}{[(2k-1)!]^2}\left(\frac{\beta x}{2}\right)^{4k-2}+\cdots.
\end{aligned} \tag{49.3}$$

下面列举一些方程，它们可以化为贝塞耳方程，记号 Z_m 表示 m 阶柱函数。

① $y''+\frac{1-2\alpha}{x}y'+\left[(\beta\gamma x^{\gamma-1})^2+\frac{\alpha^2-m^2\gamma^2}{x^2}\right]y=0$,

则 $y=x^{\alpha}Z_m(\beta x^{\gamma})$.

② $y''+\frac{1-2\alpha}{x}y'+\left(\beta^2+\frac{\alpha^2-m^2}{x^2}\right)y=0$, 则 $y=x^{\alpha}Z_m(\beta x)$.

③ $y''+\frac{1}{x}y'+\left[(\beta\gamma x^{\gamma-1})^2-\left(\frac{m\gamma}{x}\right)^2\right]y=0$, 则 $y=Z_m(\beta x^{\gamma})$.

④ $y''+\frac{1}{x}y'+\left(i-\frac{m^2}{x^2}\right)y=0$, 则 $y=Z_m(x\sqrt{i})$.

⑤ $y''+\frac{1}{x}y'-\left(i+\frac{m^2}{x^2}\right)y=0$, 则 $y=Z_m(x\sqrt{-i})$.

⑥ $y''+\frac{1}{x}y'-\left[\frac{1}{x}+\left(\frac{m}{2x}\right)^2\right]y=0$, 则 $y=Z_m(2i\sqrt{x})$.

⑦ $y''+bx^m y=0$, 则 $y=\sqrt{x}Z_{1/(m+2)}\left(\frac{2\sqrt{b}}{m+2}x^{(m+2)/2}\right)$.

⑧ $$y''+\left(\frac{1-2\alpha}{x}\mp 2\beta\gamma i x^{\gamma-1}\right)y'$$
$$+\left[\frac{\alpha^2-m^2\gamma^2}{x^2}\mp\beta\gamma(\gamma-2\alpha)ix^{\gamma-2}\right]y=0,$$

则 $y=x^{\alpha}e^{\pm i\beta x^{\gamma}}Z_m(\beta x^{\gamma})$.

⑨ $y''+\left(\frac{2m+1}{x}-k\right)y'-\frac{2m+1}{2x}ky=0$,

则 $y=\frac{1}{x^m}e^{kx/2}Z_m\left(\frac{ikx}{2}\right)$.

⑩ $y''+\left(\frac{1}{x}-2\mathrm{tg}x\right)y'-\left(\frac{m^2}{x^2}+\frac{\mathrm{tg}x}{x}\right)y=0$,

则 $y=\frac{1}{\cos x}Z_m(x)$.

⑪ $y''+\left(\frac{1}{x}+2\operatorname{tg}x\right)y'-\left(\frac{m^2}{x^2}-\frac{\operatorname{ctg}x}{x}\right)y=0$,

则 $y=\frac{1}{\sin x}Z_m(x)$.

⑫ $y''+\left(\frac{1}{x}-2u\right)y'+\left(1-\frac{m^2}{x^2}+u^2-u'-\frac{u}{x}\right)y=0$,

则 $y=e^{\int u dx}Z_m(x)$.

第十五章　数学物理方程的解的积分公式

第十章—第十四章研究的是分离变数法。分离变数法确是一个重要方法，可应用于十分广泛的各类定解问题。用分离变数法得到的解一般是无穷级数。本章的积分公式则用有限的形式表出数学物理方程的解。

§ 50. 格林公式应用于拉普拉斯方程和泊松方程

拉普拉斯方程或泊松方程与第一类边界条件构成的定解问题叫作**第一边值问题**或**狄里希利问题**；方程与第二类边界条件构成的定解问题叫作**第二边值问题**或**诺埃曼问题**。

设 $u(r)$ 和 $v(r)$ 在区域 T 直到其边界 Σ 上具有连续一阶导数，而在 T 中具有连续二阶导数，应用矢量分析的高斯-奥斯特洛格拉德斯基定理于曲面积分

$$\iint_{\Sigma} u\nabla v\cdot d\boldsymbol{S},$$

把它化为体积积分，

$$\iint_{\Sigma} u\nabla v\cdot d\boldsymbol{S}=\iiint_{T}\nabla\cdot(u\nabla v)dV$$

$$=\iiint_{T} u\Delta v dV+\iiint_{T}\nabla u\cdot\nabla v dV. \qquad (50.1)$$

这叫作**第一格林公式**。同理，又有

$$\iint_{\Sigma} v\nabla u\cdot d\boldsymbol{S}=\iiint_{T} v\Delta u dV+\iiint_{T}\nabla u\cdot\nabla v dV. \qquad (50.2)$$

(50.1)与(50.2)两式相减，得

$$\iint_{\Sigma}(u\nabla v-v\nabla u)\cdot d\boldsymbol{S}=\iiint_{T}(u\Delta v-v\Delta u)dV,$$

亦即

$$\iint_{\Sigma}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS=\iiint_{T}(u\Delta v-v\Delta u)dV \quad (n\text{为外法向})。\qquad (50.3)$$

这叫作第二格林公式。

今取 $v(\boldsymbol{r})$ 为泊松方程的格林函数 $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_0)$. 对于三维空间，最简单的办法是选取球对称的格林函数(37.34)

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_0)=-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{R}$$

$$\left(R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}\right). \qquad (50.4)$$

$\boldsymbol{r}_0$ 是区域 T 中某个特定的点，它作为参数而进入格林函数的表达式(50.4)。

但是，格林函数并不能直接作为 $v(\boldsymbol{r})$ 代入第二格林公式(50.3)，这是因为格林函数在区域里的点 $\boldsymbol{r}_0$ 成为无限大，$G|_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0}=\infty$，从而高斯-奥斯特洛格拉德斯基定理不适用。为此，以点 $\boldsymbol{r}_0$ 为球心作出半径为 ε 的球面 Σ_ε，把 Σ_ε 所围的体积 K_ε 从 T 挖去（图80）。对于剩下的体积 $T-K_\varepsilon$，格林公式(50.3)又能成立：

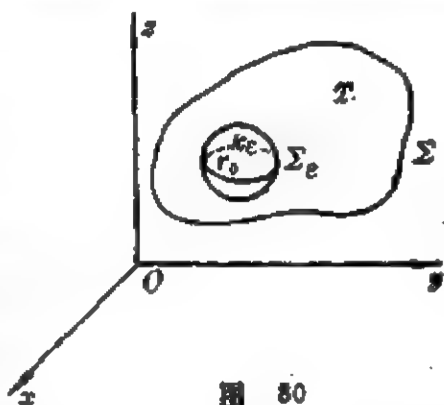


图 80

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_\varepsilon}\left[u\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{R}-\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n}\right]dS=\iiint_{T-K_\varepsilon}\left(u\Delta\frac{1}{R}-\frac{1}{R}\Delta u\right)dV.$$

泊松方程的格林函数 $1/R$ 只是在点 $\boldsymbol{r}_0$ 有“点电荷”，因而在除去点

r_0的体积$T-K_\varepsilon$中满足拉普拉斯方程。这样，上式简化为

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_\varepsilon}\left(u\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{R}-\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS=-\iiint\limits_{T-K_\varepsilon}\frac{1}{R}\Delta u dV. \tag{50.5}$$

注意，所有微分和积分运算都是对点r的坐标(x,y,z)进行的，点r_0的坐标(x_0,y_0,z_0)只是作为参数出现于(50.5)。

令$\varepsilon\to 0$，考察(50.5)。

右边$\to -\iiint\limits_T\frac{1}{R}\Delta u dV$，

左边的$\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon}u\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{R}dS=-\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon}u\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{R}dS=\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon}u\frac{1}{R^2}dS$

$$=\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon}u\frac{1}{\varepsilon^2}dS=\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon}ud\Omega\to u(r_0)\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon}d\Omega=4\pi u(r_0)$$

式中Ω是立体角。

左边的$\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon}\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n}dS=\varepsilon\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial n}\frac{1}{\varepsilon^2}dS=\varepsilon\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial n}d\Omega$

$$\to\varepsilon\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{r=r_0}\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon}d\Omega=4\pi\varepsilon\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{r=r_0}\to 0.$$

这样，(50.5)成为

$$u(r_0)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{R}\right)dS-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_T\frac{\Delta u}{R}dV. \tag{50.6}$$

对于泊松方程$\Delta u=f$，(50.6)即

$$u(r_0)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{R}\right)dS-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_T\frac{f}{R}dV. \tag{50.7}$$

这不妨叫作泊松方程的**基本积分公式**。

对于拉普拉斯方程 $\Delta u=0$，(50.6)即

$$u(\boldsymbol{r}_0)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{R}\right)dS. \tag{50.8}$$

这叫作调和函数论的**基本积分公式**。

对于二维空间，格林函数(37.34)应代之以(37.35)

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_0)=-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{R}$$

$$(R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}). \tag{50.9}$$

同理可导出二维空间中的**基本积分公式**

$$u(\boldsymbol{r}_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Sigma}\left[\left(\ln\frac{1}{R}\right)\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{R}\right)\right]ds$$

$$-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{T}\Delta u\ln\frac{1}{R}dS. \tag{50.10}$$

以上各个积分公式要求 u 和$\frac{\partial u}{\partial n}$在边界 Σ 上的值都是已知的。可是在第一边值问题中，已知的只是 u 在边界 Σ 上的值；在第二边值问题中，已知的只是$\frac{\partial u}{\partial n}$在边界 Σ 上的值。这样看来，这些积分公式既不足以解决第一边值问题，也不足以解决第二边值问题。

其实，这里距离问题的解决已经很近了。原来，上面选取格林函数(50.4)和(50.9)时只着眼于简单，完全没有考虑边界 Σ 的存在。如果改取在边界 Σ 上为零的格林函数 $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_0)$，对于三维空间，这是说，

$$\begin{cases}\Delta_3 G=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0),\\ G|_{\Sigma}=0,\end{cases} \tag{50.11}$$

则代替(50.6)的是

$$u(\boldsymbol{r}_0)=\iint\limits_{\Sigma}\left(u\frac{\partial G}{\partial n}-G\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS+\iiint\limits_{T}G\Delta u dV$$

$$=\iint_{\Sigma} u(r)\frac{\partial G}{\partial n}(r;r_0)dS+\iiint_{T} G(r;r_0)\Delta u dV. \qquad (50.12)$$

由于$G|_{\Sigma}=0$，在(50.12)中不再出现$\frac{\partial u}{\partial n}$，从而(50.12)并不需要知道$\frac{\partial u}{\partial n}$在$\Sigma$上的值，它就是**第一边值问题的解的积分公式**。(50.11)的$G(r;r_0)$则叫作**第一边值问题的格林函数**。

对于二维空间，也可以取在边界Σ上为零的格林函数$G(r;r_0)$，

$$\begin{cases}\Delta_2 G=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0),\\ G|_{\Sigma}=0,\end{cases} \qquad (50.13)$$

则代替(50.10)的是

$$u(r_0)=\int_{\Sigma} u(r)\frac{\partial G}{\partial n}(r;r_0)ds+\iint_{T} G(r;r_0)\Delta u dS. \qquad (50.14)$$

(50.13)叫作**第一边值问题的格林函数**，(50.14)是**第一边值问题的解的积分公式**。

积分公式(50.12)和(50.14)的物理解释有一个困难。公式左边u的宗量r_0表明观测点在r_0，右边的积分是对r进行的，这表明r是源点的矢径；可是，格林函数$G(r;r_0)$里的r_0却是源点的矢径，而r却是观测点的矢径。看来，这两者无法协调。这个困难是可以解决的。原来，格林函数具有对称性$G(r;r_0)=G(r_0;r)$，完全可以把r_0当作观测点而r当作源点。这样一来，积分公式的物理解释就不存在困难了。

现在来证明格林函数的对称性。在T中任取两个定点r_1和r_2。以这两点为中心，各作半径为ε的球面Σ_1和Σ_2。从T挖去Σ_1和Σ_2所围的球K_1和K_2。在剩下的区域$T-K_1-K_2$上，$G(r;r_1)$和$G(r;r_2)$并无奇点。以$u=G(r;r_1)$，$v=G(r;r_2)$代入格林公式(50.3)

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS=\iiint_{T-K_1-K_2}(u\Delta v-v\Delta u)dV.$$

由于 $G(r;r_1)$ 和 $G(r;r_2)$ 是调和函数，上式右边为零。又由于格林函数的边界条件，上式左边 $\iint_{\Sigma}=0$. 这样

$$\iint_{\Sigma_1}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS+\iint_{\Sigma_2}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS=0.$$

令 $\varepsilon\to 0$, 上式成为 $0-4\pi v(r_1)+4\pi u(r_2)-0=0$, 即 $G(r_1;r_2)=G(r_2;r_1)$.

至于第二边值问题，表面看来，似乎可以仿照第一边值问题，取法向导数在 Σ 上为零的格林函数 $G(r;r_0)$. 对于三维空间，这是说，

$$\begin{cases}\Delta_3 G=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0),\\ \left.\dfrac{\partial G}{\partial n}\right|_{\Sigma}=0,\end{cases}\tag{50.15}$$

则代替(50.6)的是 $u(r_0)=-\iint_{\Sigma}\frac{\partial u}{\partial n}GdS+\iiint_{T}G\Delta udV$. 对于二维空间，这是说

$$\begin{cases}\Delta_2 G=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0),\\ \left.\dfrac{\partial G}{\partial n}\right|_{\Sigma}=0,\end{cases}\tag{50.16}$$

则代替(50.10)的是 $u(r_0)=-\int_{\Sigma}\frac{\partial u}{\partial n}Gds+\iint_{T}G\Delta udV$.

可是，拉普拉斯方程和泊松方程的(50.15)和(50.16)这种形式的格林函数并不存在。这在物理上是容易看出来的。不妨把这格林函数看作稳定温度分布，泛定方程右边的 δ 函数表明在 Σ 所围区域 T 里有一个点热源，边界条件表明边界是绝热的。点热源不停地放出热量，而热量又不能经由边界散发出去，T 里的温度必然要不停地升高，温度的分布不可能是稳定的。这种情况下，代替格林函数(50.15)和(50.16)的应是**推广的格林函数**。对于三维空间，

$$\begin{cases}\Delta_3 G=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)-\dfrac{1}{V_T},\\ \left.\dfrac{\partial G}{\partial n}\right|_\Sigma=0,\end{cases}\tag{50.17}$$

式中 V_T 是 T 的体积。对于二维空间，

$$\begin{cases}\Delta_2 G=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)-\dfrac{1}{A_T},\\ \left.\dfrac{\partial G}{\partial n}\right|_\Sigma=0,\end{cases}\tag{50.18}$$

式中 A_T 是 T 的面积。方程右边添加的项是均匀分布的热汇密度，这些热汇的总体恰好吸收了点热源所放出的热量，不多也不少。

求格林函数的问题(50.11)和(50.13)本身也是边值问题。但这是特殊的边值问题，一旦解出这特殊的边值问题，运用解的积分公式就得到一般的边值问题的解。

某些情况下，格林函数可用电像法求得，参看§37例7和例8。

例1 在球 $r=a$ 内求解拉普拉斯方程的第一边值问题

$$\begin{cases}\Delta_3 u=0 \quad (r<a),\\ u|_{r=a}=f(\theta,\varphi).\end{cases}$$

解 §37例7已用电像法求得球的第一边值问题的格林函数

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_0)=-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}+\frac{a}{r_0}\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|},$$

把它代入第一边值问题的解的积分公式(50.12)就行了。

为了把 $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_0)$ 代入(50.12)，还必须先算出 $\left.\dfrac{\partial G}{\partial n}\right|_\Sigma$. 引用球坐标系，极点就取在球心。

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}=\frac{1}{\sqrt{r^2-2rr_0\cos\Theta+r_0^2}},\tag{50.19}$$

其中 Θ 是矢径 $\boldsymbol{r}$ 跟 $\boldsymbol{r}_0$ 之间的夹角，

$$\cos\Theta=\cos\theta\cos\theta_0+\sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0).\tag{50.20}$$

计算法向导数

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}=\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{\sqrt{r^2-2rr_0\cos\Theta+r_0^2}}$$

$$=-\frac{r-r_0\cos\Theta}{(r^2-2rr_0\cos\Theta+r_0^2)^{3/2}}$$

分子里的 $\cos\Theta$ 可利用(50.19)消去,

$$\left[\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}\right]_\Sigma=\frac{r_0^2-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^2-r^2}{2r|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3}\bigg|_\Sigma=\frac{r_0^2-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^2-a^2}{2a|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3}\bigg|_\Sigma.$$

同理,

$$\left[\frac{a}{r_0}\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}\right]_\Sigma=\frac{a}{r_0}\frac{r_1^2-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|^2-a^2}{2a|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|^3}\bigg|_\Sigma$$

$$=\frac{\dfrac{a^4}{r_0^2}-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^2\dfrac{a^2}{r_0^2}-a^2}{2r_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3\dfrac{a^3}{r_0^3}}\Bigg|_\Sigma=\frac{a^2-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^2-r_0^2}{2a|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3}\bigg|_\Sigma.$$

于是

$$\frac{\partial G}{\partial n}\bigg|_\Sigma=-\frac{1}{4\pi}\frac{r_0^2-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^2-a^2}{2a|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3}\bigg|_\Sigma$$

$$+\frac{1}{4\pi}\frac{a^2-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^2-r_0^2}{2a|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3}\bigg|_\Sigma=\frac{1}{4\pi}\frac{a^2-r_0^2}{a|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3}\bigg|_\Sigma.$$

代入(50.12),得到球的第一边值问题的解的积分公式

$$u(r_0,\theta_0,\varphi_0)=\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}f(\theta,\varphi)\frac{1}{4\pi}\frac{a^2-r_0^2}{a|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3}\bigg|_\Sigma a^2\sin\theta d\theta d\varphi$$

$$=\frac{a}{4\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}f(\theta,\varphi)\frac{a^2-r_0^2}{(a^2-2ar_0\cos\Theta+r_0^2)^{3/2}}\sin\theta d\theta d\varphi. \quad (50.21)$$

这叫作球的泊松积分。

例2 在半空间 $z>0$ 内求解拉普拉斯方程的第一边值问题

$$\begin{cases}\Delta_3 u=0 \quad (z>0),\\ u|_{z=0}=f(x,y).\end{cases}$$

解 先求格林函数 $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_0)$,

$$\begin{cases}\Delta_3 G=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0),\\ G|_{z=0}=0.\end{cases}$$

这相当于接地导体平面 $z=0$ 上方的电势，在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 放置着电量为 $-e_0$ 的点电荷。这电势可用电像法求得。

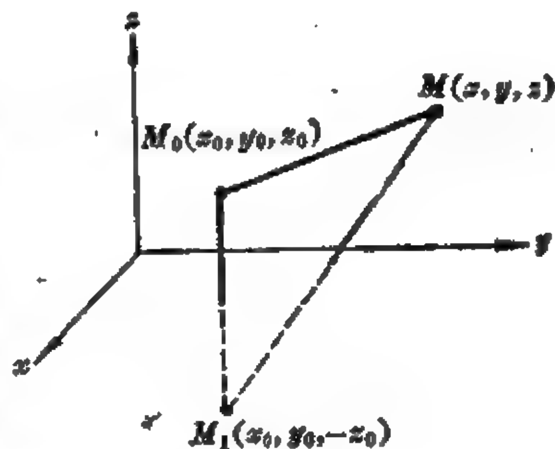


图 81

设想在 M_0 的对称点 $M_1(x_0,y_0,-z_0)$ 放置电量为 $+e_0$ 的点电荷，不难验证，在两个点电荷的电场中，平面 $z=0$ 上的电势确实是零。在点 M_1 的点电荷就是电像。格林函数

$$\begin{aligned}G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_0)&=-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}+\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}\\&=-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}\\&\quad+\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}.\end{aligned}\tag{50.22}$$

为了把 $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}_0)$ 代入第一边值问题的解的积分公式 (50.12)，需要先计算 $\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{z=0}$ 即 $-\left.\frac{\partial G}{\partial z}\right|_{z=0}$。

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{z=0}&=\left[\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}\right.\\&\quad\left.-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}\right]_{z=0}\\&=\frac{1}{2\pi}\frac{z_0}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2]^{3/2}}.\end{aligned}$$

代入(50.12)即得半空间的第一边值问题的解的积分公式

$u(x_0,y_0)$

$$=\frac{z_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\frac{1}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2]^{3/2}}dxdy. \tag{50.23}$$

这叫作半空间的泊松积分。

例 3 在圆 $\rho=a$ 内求解拉普拉斯方程的第一边值问题

$$\begin{cases}\Delta_2 u=0 \ (\rho<a),\\ u|_{\rho=a}=f(\varphi).\end{cases}$$

答案

$$u(\rho_0,\varphi_0)=\frac{a^2-\rho_0^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{a^2-2a\rho_0\cos(\varphi-\varphi_0)+\rho_0^2}f(\varphi)d\varphi. \tag{50.24}$$

例 4 在半平面 $y>0$ 内求解拉普拉斯方程的第一边值问题

$$\begin{cases}\Delta_2 u=0 \ (y>0),\\ u|_{y=0}=f(x).\end{cases}$$

答案 $$u(x_0,y_0)=\frac{y_0}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x-x_0)^2+y_0^2}f(x)dx. \tag{50.25}$$

习　题

1. 在圆 $\rho=a$ 内求解拉普拉斯方程的第一边值问题 $\Delta_2 u=0(\rho<a)$，$u|_{\rho=a}=f(\varphi)$.

2. 在半平面 $y>0$ 内求解拉普拉斯方程的第一边值问题 $\Delta_2 u=0(y>0)$，$u|_{y=0}=f(x)$.

3. 在圆形域 $\rho\leqslant a$ 上求解 $\Delta u=0$ 使满足边界条件①$u|_{\rho=a}=A\cos\varphi$，②$u|_{\rho=a}=A+B\sin\varphi$.

4. 对于一般的 $f(\varphi)$，积分公式(50.24)里的积分可能不那么容易计算。试把 $1/[a^2-2a\rho_0\cos(\varphi-\varphi_0)+\rho_0^2]$展开为傅里叶级数[展开方法可参看§25习题(1)的提示]，然后逐项积分。

作为对照，再用分离变数法求解圆的第一边值问题。

5. 试求层状空间 $0<z<H$ 第一边值问题的格林函数。

§ 51. 推广的格林公式及其应用

把格林公式加以推广，可以应用于各种类型的数学物理方程。为简便起见，本节只讨论两个自变数的情况。至于多变数的情况，处理方法是类似的，对某些不同的地方将作简略说明。

两个自变数的二阶线性偏微分方程

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu=0$$

可记作 $Lu=0$，L 是算符

$$L=a_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+b_1\frac{\partial}{\partial x}+b_2\frac{\partial}{\partial y}+c. \qquad (51.1)$$

设有两个算符 L 和 M，如果 $vLu-uMv$ 是某种"散度"，即 $vLu-uMv=\dfrac{\partial X}{\partial x}+\dfrac{\partial Y}{\partial y}$，则算符 L 和 M 互称为**伴随算符**。如 $L=M$，则叫作**自伴算符**。

不难验证，算符 L(51.1)的伴随算符 M 由下式给出：

$$\begin{aligned}Mv=&\frac{\partial^2}{\partial x^2}(a_{11}v)+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(a_{12}v)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(a_{22}v)\\&-\frac{\partial}{\partial x}(b_1v)-\frac{\partial}{\partial y}(b_2v)+cv,\end{aligned} \qquad (51.2)$$

这是因为 $vLu-uMv$ 确是"散度" $\dfrac{\partial X}{\partial x}+\dfrac{\partial Y}{\partial y}$，其中

$$\left\{\begin{aligned}X=&a_{11}(vu_x-uv_x)+a_{12}(vu_y-uv_y)\\&+\left(b_1-\frac{\partial a_{11}}{\partial x}-\frac{\partial a_{12}}{\partial y}\right)uv,\\Y=&a_{12}(vu_x-uv_x)+a_{22}(vu_y-uv_y)\\&+\left(b_2-\frac{\partial a_{12}}{\partial x}-\frac{\partial a_{22}}{\partial y}\right)uv.\end{aligned}\right. \qquad (51.3)$$

设在 xy 平面上有区域 T，其境界线为 Σ. 只要函数 u 和 v 在区域 T 充分光滑，按照高斯-奥斯特洛格拉德斯基定理，

$$\iint_T (vLu-uMv)dS=\int_\Sigma [X\cos(n,x)+Y\cos(n,y)]ds, \quad (51.4)$$

其中 $\cos(n,x)$和 $\cos(n,y)$是外法向 n 的方向余弦。(51.4) 就是**推广的格林公式**。

在区域 T 上任取矢径为 r_0 的一点。我们希望仿照上节导出二阶线性偏微分方程的解的积分公式,就是说,把 $u(r_0)$表为 u 或$\frac{\partial u}{\partial n}$在$\Sigma$上的积分。下面按照方程类型的不同分别进行推导。

(一) 椭圆型方程

$$Lu=f. \quad (51.5)$$

引入函数 $v(r)$,它在区域 T 上除点 r_0 以外处处满足 $Mv=0$,而在点 r_0 具有单位源。所谓单位源是说,以点 r_0 为圆心作半径为 ε 的很小的圆周 Σ_ε,就有

$$-\int_{\Sigma_\varepsilon}\frac{\partial v}{\partial n}ds=1, \quad (51.6)$$

式中 n 是外法向。(51.6)规定了函数 $v(r;r_0)$在点 r_0 附近可表为

$$\begin{cases} v(r;r_0)=f_1(r)\ln\dfrac{1}{|r-r_0|}+f_2(r) \quad (r\approx r_0), \\ \lim\limits_{r\to r_0} f_1(r)=\dfrac{1}{2\pi}. \end{cases} \quad (51.7)$$

这样的函数 $v(r;r_0)$叫作 $Mv=0$ 的**基本解**。

函数 $v(r;r_0)$在点 r_0 为无限大,格林公式(51.4)不适用。但如把 Σ_ε 所围的圆 K_ε 从 T 挖去,格林公式(51.4)又能适用,

$$\iint_{T-K_\varepsilon}(vLu-uMv)dS=\int_{\Sigma+\Sigma_\varepsilon}[X\cos(n,x)+Y\cos(n,y)]ds. \quad (51.8)$$

为简便起见,不妨认为方程(51.5)已化为标准形式(33.18),即 $a_{11}=a_{22}=1, a_{12}=0$. (51.8)简化为

$$\iint_{T-K_\varepsilon}(vLu-uMv)dS$$

$$=\int_{\Sigma+\Sigma_\varepsilon}\left[v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}+b_1\cos(n,x)uv+b_2\cos(n,y)uv\right]ds.$$

在 $T-K_\varepsilon$ 上，v 是 $Mv=0$ 的解，上式简化为

$$\iint_{T-K_\varepsilon}vLudS$$

$$=\int_{\Sigma+\Sigma_\varepsilon}\left[v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}+b_1\cos(n,x)uv+b_2\cos(n,y)uv\right]ds. \tag{51.9}$$

令 $\varepsilon\to0$. 仿照上节，

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\Sigma_\varepsilon}\left[v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}+b_1\cos(n,x)uv+b_2\cos(n,y)uv\right]ds$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\Sigma_\varepsilon}-u\frac{\partial v}{\partial n}ds.$$

对于挖去圆 K_ε 后的区域 T-K_ε 而言，在境界线 Σ_ε 上的外法向 n 指向圆心 r_0，跟(51.6)里的 n 恰好相反。引用(51.6)并注意到 n 恰好相反，即得

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\Sigma_\varepsilon}\left[v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}+b_1\cos(n,x)uv+b_2\cos(n,y)uv\right]ds=-u(r_0).$$

于是，(51.9)给出

$$u(r_0)=\int_{\Sigma}\left[v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}+b_1\cos(n,x)uv+b_2\cos(n,y)uv\right]ds$$

$$-\iint_T vLudS. \tag{51.10}$$

这是(50.6)的推广。(51.10)要求 u 和$\frac{\partial u}{\partial n}$在 Σ 上的值都是已知的，所以它既不足以解决第一边值问题，也不足以解决第二边值问题。

原来，上面选取基本解的时候完全没有考虑边界条件。现在，

选取基本解 v 使

$$v|_{\Sigma}=0, \tag{51.11}$$

这样的 v 叫作第一边值问题的格林函数。把它记作 $G(r;r_0)$，(51.10)成为

$$u(r_0)=-\int_{\Sigma} u\frac{\partial G}{\partial n}ds-\iint_{T} GLudS. \tag{51.12}$$

这就是方程(51.5)的第一边值问题的解的积分公式，它是(50.15)的推广。又，选取基本解 v 使

$$\left[\frac{\partial v}{\partial n}-b_1\cos(n,x)v-b_2\cos(n,y)v\right]_{\Sigma}=0, \tag{51.13}$$

这样的 v 叫作第二边值问题的格林函数。把它记作 $G(r;r_0)$，(51.10)成为

$$u(r_0)=\int_{\Sigma} G\frac{\partial u}{\partial n}ds-\iint_{T} GLudS. \tag{51.14}$$

这就是方程(51.5)的第二边值问题的解的积分公式，如果满足(51.13)的格林函数存在。

在多个自变数的情况下，单位源的定义(51.6)需作相应的修改。例如，对于三个自变数，(51.6)应改为

$$-\iint_{K_\varepsilon}\frac{\partial v}{\partial n}dS=1, \tag{51.15}$$

式中 K_ε 是以 r_0 为球心而半径为 ε 的很小的球面。这就规定了 v 在点 r_0 附近的值

$$\begin{cases} v(r;r_0)=f_1(r)\dfrac{1}{|r-r_0|}+f_2(r) \quad (r\approx r_0), \\ \lim\limits_{r\to r_0} f_1(r)=\dfrac{1}{4\pi}. \end{cases} \tag{51.16}$$

考察三维空间中谐变振源发出的波动

$$U_{tt}-a^2\Delta_3 U=-f(r)e^{i\omega t}.$$

以 $U(r,t)=u(r)e^{i\omega t}$ 代人，以分离空间坐标和时间变数，得到三维亥姆霍兹方程

$$Lu\equiv\Delta_3 u+\frac{\omega^2}{a^2}u=f(r). \tag{51.17}$$

这个椭圆型方程是自伴的，$Mv=0$ 即 $Lv=0$ 的基本解是

$$v(r;r_0)=\frac{1}{4\pi}e^{i\frac{\omega}{a}|r-r_0|}\frac{1}{|r-r_0|}. \tag{51.18}$$

仿照(51.10)可导出

$$u(r_0)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma}\left[\frac{e^{i\frac{\omega}{a}|r-r_0|}}{|r-r_0|}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{i\frac{\omega}{a}|r-r_0|}}{|r-r_0|}\right]dS$$

$$-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{T}\frac{e^{i\frac{\omega}{a}|r-r_0|}}{|r-r_0|}fdV. \tag{51.19}$$

这就是单色光衍射理论中著名的基尔霍夫公式。

方程(51.17)已是标准形式的椭圆型方程。一般说来，如§33指出，多个自变数的方程不一定能在区域T上所有各点同时化为标准形式。但在点 r_0 是可以化为标准形式的，也就是说，在内边界 Σ_ε 上可以化为标准形式，这使得仍然可以按上面的方式导出解的积分公式。

（二）抛物型方程

$$Lu\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial y}=f\ \ (y=a^2t). \tag{51.20}$$

算符 L 的伴随算符M是

$$M=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y}. \tag{51.21}$$

在这里，推广的格林公式可具体地写成

$$\iint\limits_{T}(vLu-uMv)dS$$

$$=\int_{\Sigma}[(vu_x-uv_x)\cos(n,x)-uv\cos(n,y)]ds. \tag{51.22}$$

既然 $y=a^2t$ 是时间变数，Σ 应由四条直线 $y=0, y=a^2t_0, x=x_1$ 和 x_2 构成（图 82）。初始条件在图 82 上也表现为边界 Σ 上的"边界条件"。

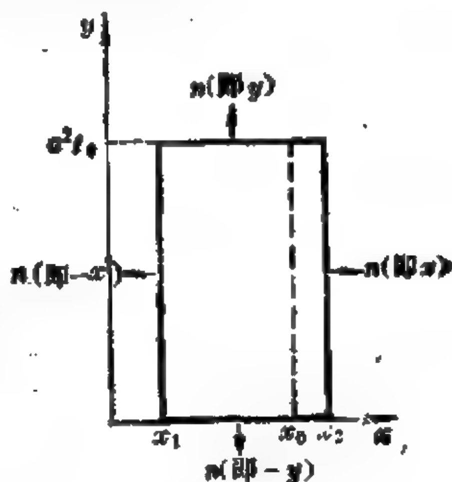


图 82

引入 $Mv=0$ 的基本解 v，它在区域 T 上除点 (x_0, at_0) 以外满足 $Mv=0$，而在点 (x_0, at_0) 有瞬时点源，这是说

$$a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}v+\frac{\partial}{\partial t}v=\delta(x-x_0)\delta(t-t_0),$$

这个方程的解(参考 §39 例 5)是

$$v(x,t;x_0,t_0)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi(t_0-t)}}e^{-(x-x_0)^2/4a^2(t_0-t)} & (t_0>t),\\ 0 & (t_0<t).\end{cases} \tag{51.23}$$

按照 δ 函数的定义(29.1)和(29.2)，不难验证，(51.23)在 $t=t_0$ 是 δ 函数，

$$v|_{t=t_0}=\delta(x-x_0).$$

把(51.23) 代入推广的格林公式 (51.22)。这里特别说一说 $\int_{\Sigma}$ 的一部分，即沿直线 $y=a^2t_0$ 从 $x=x_2$ 到 $x=x_1$ 的那一段上的积分

$$\int_{x_2}^{x_1}\left[(vu_x-uv_x)\cos\frac{\pi}{2}-uv\cos 0\right]_{t=t_0}d(-x)$$

$$=-\int_{x_1}^{x_2}u(x,t_0)\delta(x-x_0)dx=-u(x_0,t_0).$$

这样，(51.23)代入(51.22)的结果是

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_0^{a^2t_0}\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t_0-t)}}e^{-(x-x_0)^2/4a^2(t_0-t)}f(x,t)dxdy$$

$$=\int_{x_1}^{x_2} u(x,0)\frac{1}{2a\sqrt{\pi t_0}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t_0}}dx$$

$$+\int_0^{a^2t_0}\left[v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}\right]_{x=x_2}dy-u(x_0,t_0)$$

$$-\int_0^{a^2t_0}\left[v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}\right]_{x=x_1}dy,$$

即

$$u(x_0,t_0)=-\int_{x_1}^{x_2}\int_0^{a^2t_0}\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t_0-t)}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2(t_0-t)}}f(x,t)dxdy$$

$$+\int_{x_1}^{x_2} u(x,0)\frac{1}{2a\sqrt{\pi t_0}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t_0}}dx$$

$$+\int_0^{a^2t_0}\left[vu_x-uv_x\right]_{x_1}^{x_2}dy. \tag{51.24}$$

(51.24)要求 u 和 u_x 在两端($x=x_1$ 和 $x=x_2$) 都是已知的，因而(51.24)并不足以解决问题。

改进的办法仍然在于适当选取 v. 选取基本解 v,使

$$v|_{x=x_1}=0,\quad v|_{x=x_2}=0.$$

把这样的 v 记作 $G(x,t;x_0,t_0)$,则(51.22)成为

$$u(x_0,t_0)=-\int_{x_1}^{x_2}\int_0^{a^2t_0}G(x,t;x_0,t_0)f(x,t)dxdy$$

$$+\int_{x_1}^{x_2} u(x,0)G(x,0;x_0,t_0)dx$$

$$+\int_0^{a^2t_0}\left[-u\frac{\partial G}{\partial x}\right]_{x_1}^{x_2}dy. \tag{51.25}$$

选取基本解 v,使

$$v_x|_{x=x_1}=0,\qquad v_x|_{x=x_2}=0.$$

把这样的 v 记作 $G(x,t;x_0,t_0)$,则(51.22)成为

$$u(x_0,t_0)=-\int_{x_1}^{x_2}\int_0^{a^2t_0}G(x,t;x_0,t_0)f(x,t)dxdy$$

$$+\int_{x_1}^{x_2} u(x,0)\, G(x,0;x_0,t_0)dx+\int_0^{a^2 t_0}\left[G\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x_1}^{x_2} dy.$$

(51.26)

(三) 双曲型方程

$$Lu\equiv u_{xx}-u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu=f. \tag{51.27}$$

算符L的伴随算符M由下式给出:

$$Mv=v_{xx}-v_{yy}-(b_1v)_x-(b_2v)_y+cv. \tag{51.28}$$

在这里,推广的格林公式可具体地写成

$$\iint_T (vLu-uMv)dS=\int_\Sigma [X\cos(n,x)+Y\cos(n,y)]ds, \tag{51.29}$$

其中

$$\begin{cases} X=vu_x-uv_x+b_1uv=(uv)_x-(2v_x-b_1v)u \\ \quad =-(uv)_x+(2u_x+b_1u)v, \\ Y=uv_y-vu_y+b_2uv=-(uv)_y+(2v_y+b_2v)u \\ \quad =(uv)_y-(2u_y-b_2u)v. \end{cases} \tag{51.30}$$

必须指出,像前面那样选取 $Mv=0$ 的一个解 v, 要它在孤立的点 r_0 为无限大,对于双曲型方程是不可能的。请读者回忆达朗伯公式一节,波动方程的通解为 $f_1(x-at)+f_2(x-at)$,这说明波动沿着特征线"$x-at=$常数"和"$x+at=$常数"传播。一般地说,如果双曲型方程 $Mv=0$ 的解 v 在点 r_0 为无限大,它必然在通过 r_0 的两根特征线上各点都是无限大。因此,对于双曲型方程,函数 v 以及区域 T 的选取方法都不同于前面的选取方法。

双曲型方程的定解条件往往是这样提的:在 xy 平面的某根曲线 l(图 83)上给定 u 和$\frac{\partial u}{\partial n}$的值。$l$ 的一个特例是直线 $y=0$, 在这直线上的 u 和$\frac{\partial u}{\partial n}$即是 $u|_{y=0}$ 和 $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{y=0}$. 这正是以前常用的初始位

移和初始速度。

在 xy 平面上取一点 $M_0(x_0, y_0)$，我们希望找到 $u(x_0, y_0)$ 的积分公式。过点 M_0 作两根特征线：

$$x-y=\text{常数},$$

$$x+y=\text{常数},$$

它们各自跟 l 相交于点 $M_1(x_1, y_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2)$。

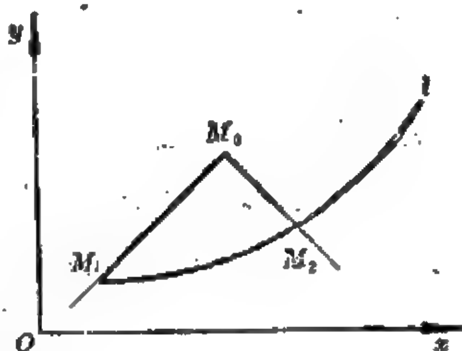


图 83

把推广的格林公式(51.29) 应用于曲线三角形 $M_0M_1M_2$. 考虑到 M_0M_1 段上的

$$\cos(n, x)=-\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos(n, y)=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$dx=-\frac{1}{\sqrt{2}}ds, \quad dy=-\frac{1}{\sqrt{2}}ds,$$

因而

$$\int_{M_0M_1}[X\cos(n,x)+Y\cos(n,y)ds$$

$$=\int_{M_0M_1}\Big\{[(uv)_x-(2v_x-b_1v)u]\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)$$

$$+[-(uv)_y+(2v_y+b_2v)u]\frac{1}{\sqrt{2}}\Big\}ds$$

$$=\int_{M_0M_1}\Big\{(uv)_xdx-2v_xudx-\frac{b_1}{\sqrt{2}}vuds-(uv)_y(-dy)$$

$$+2v_yu(-dy)+\frac{b_2}{\sqrt{2}}uvds\Big\}$$

$$=\int_{M_0M_1}\Big\{d(uv)-2\frac{\partial v}{\partial s}uds+\frac{b_2-b_1}{\sqrt{2}}vuds\Big\}$$

$$=u(x_1,y_1)v(x_1,y_1)-u(x_0,y_0)v(x_0,y_0)$$

$$-\int_{M_0M_1}\Big(2\frac{\partial v}{\partial s}-\frac{b_2-b_1}{\sqrt{2}}v\Big)uds.$$

同理，

$$\int_{M_2M_0}[X\cos(n,x)+Y\cos(n,y)]ds$$

$$=-u(x_0,y_0)v(x_0,y_0)+u(x_2,y_2)v(x_2,y_2)$$

$$+\int_{M_2M_0}\left(2\frac{\partial v}{\partial s}+\frac{b_2+b_1}{\sqrt{2}}v\right)uds.$$

因此，推广的格林公式应用于曲线三角形 $M_0M_1M_2$ 的结果是

$$\iint\limits_{M_0M_1M_2}(vLu-uMv)dS$$

$$=-u(x_0,y_0)v(x_0,y_0)+u(x_2,y_2)v(x_2,y_2)$$

$$+\int_{M_2M_0}\left(2\frac{\partial v}{\partial s}+\frac{b_2+b_1}{\sqrt{2}}v\right)uds+u(x_1,y_1)v(x_1,y_1)$$

$$-u(x_0,y_0)v(x_0,y_0)-\int_{M_0M_1}\left(2\frac{\partial v}{\partial s}-\frac{b_2-b_1}{\sqrt{2}}v\right)uds$$

$$+\int_{M_1M_2}[X\cos(n,x)+Y\cos(n,y)]ds,$$

即

$$u(x_0,y_0)v(x_0,y_0)=\frac{1}{2}[u(x_1,y_1)v(x_1,y_1)+u(x_2,y_2)v(x_2,y_2)]$$

$$+\int_{M_2M_0}\left(\frac{\partial v}{\partial s}+\frac{b_2+b_1}{2\sqrt{2}}v\right)uds-\int_{M_0M_1}\left(\frac{\partial v}{\partial s}-\frac{b_2-b_1}{2\sqrt{2}}v\right)uds$$

$$+\frac{1}{2}\int_{M_1M_2}[X\cos(n,x)+Y\cos(n,y)]ds$$

$$-\frac{1}{2}\iint\limits_{M_0M_1M_2}(vLu-uMv)dS. \tag{51.31}$$

这当然还不足以解决所提出的定解问题。

现在选取这样的函数 v，它是 $Mv=0$ 的解，而且

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial s}+\dfrac{b_2+b_1}{2\sqrt{2}}v=0 & (\text{在 } M_2M_0 \text{ 上}),\\ \dfrac{\partial v}{\partial s}-\dfrac{b_2-b_1}{2\sqrt{2}}v=0 & (\text{在 } M_0M_1 \text{ 上}),\\ v(x_0,y_0)=1.\end{cases}$$

换句话说，

$$
\begin{cases}
v=e^{\int_{s_0}^{s}-\frac{b_1+b_2}{2\sqrt{2}}ds} & (\text{在 } M_2M_0 \text{ 上}), \\
v=e^{\int_{s_0}^{s}\frac{b_1-b_2}{2\sqrt{2}}ds} & (\text{在 } M_0M_1 \text{ 上}).
\end{cases}
\tag{51.32}
$$

这样的函数称为算符 L 的里曼函数。以里曼函数代入 (51.31) 即得

$$
\begin{aligned}
u(x_0,y_0)=&\frac{1}{2}[u(x_1,y_1)v(x_1,y_1)+u(x_2,y_2)v(x_2,y_2)] \\
&+\frac{1}{2}\int_{M_1M_2}[X\cos(n,x)+Y\cos(n,y)]ds \\
&-\frac{1}{2}\iint\limits_{M_0M_1M_2}v(x,y,z;x_0,y_0,z_0)f(x,y,z)dS.
\end{aligned}
\tag{51.33}
$$

这就是所提出的定解问题的解的积分公式。

可以证明里曼函数具有对称性：

$$v(x,y;x_0,y_0)=v(x_0,y_0;x,y).$$

为了阐明里曼函数的物理意义，设“初始”位移 $u\Big|_l$ 和速度 $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_l$ 都是零，而 $f=-2\delta(x-\xi)\delta(t-\tau)$，则(51.33)给出

$$
\begin{aligned}
u(x_0,y_0)&=-\frac{1}{2}\iint-2v(x,t;x_0,t_0)\delta(x-\xi)\delta(t-\tau)dxdt \\
&=v(\xi,\tau;x_0,t_0)=v(x_0,t_0;\xi,\tau).
\end{aligned}
$$

因此可以说，里曼函数就是作用于一点的“单位”冲力的影响函数。

习　题

1. 求解 $u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t)$，$u|_{t=0}=\varphi(x)$，$u_t|_{t=0}=\psi(x)$。
2. 求解 $x^2u_{xx}-t^2u_{tt}=0$，$u|_{t=1}=\varphi(x)$，$u_t|_{t=1}=\psi(x)$。

第十六章　拉普拉斯变换法

§52. 拉普拉斯变换法

读者在第五章已经熟悉常微分方程的拉普拉斯变换解法。对常微分方程施行拉普拉斯变换，常微分方程转化为代数方程，而且初始条件也一并考虑进去了。解出代数方程之后进行反演就得到原来那个常微分方程的解。

这个方法也可用于求解一维空间的数学物理偏微分方程的定解问题。对偏微分方程施行拉普拉斯变换，偏微分方程转化为常微分方程，而且初始条件也一并考虑到。解出常微分方程之后进行反演就得到原来那个定解问题的解。

跟分离变数法不同，拉普拉斯变换法并不要求边界条件是齐次的。不管边界条件是否齐次的，也不管泛定方程是否齐次的，拉普拉斯变换法用同样的办法处理它们。

例1　求解硅片的恒定表面浓度扩散问题。把硅片的厚度当作无限大，这是半无界空间的定解问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0 \quad (x>0), \\ u|_{x=0} = N_0, \\ u|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

解　对泛定方程和边界条件施行拉普拉斯变换，至于初始条件则通过导数变换规则(21.13)而考虑到。变换的结果是

$$\begin{cases} p\bar{u} - a^2 \bar{u}_{xx} = 0 \quad (x>0), \\ \bar{u}|_{x=0} = N_0 \dfrac{1}{p}. \end{cases}$$

式中 $\overline{u}$ 是 x 的函数，p 则作为参数而进入 $\overline{u}$，即 $\overline{u}=\overline{u}(x;p)$

这个常微分方程的通解是

$$\overline{u}(x;p)=Ae^{-\sqrt{p}x/a}+Be^{\sqrt{p}x/a}.$$

考虑到 $\lim\limits_{x\to\infty}\overline{u}$ 不应为无限大，积分常数 B 定为零。又，利用边界条件定出积分常数 $A=N_0\dfrac{1}{p}$. 于是，

$$\overline{u}(x;p)=N_0\frac{1}{p}e^{-\sqrt{p}x/a}.$$

进行反演。由附录一的公式 18，得

$$u(x,t)=N_0\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right).$$

本例即 § 38 例 4，可对照。

例 2 求解无界弦的振动

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=0,$$

$$u|_{t=0}=\varphi(x),\qquad u_t|_{t=0}=\psi(x).$$

解 对泛定方程施行拉普拉斯变换，初始条件通过二阶导数变换规则(21.15)而考虑到。变换的结果是

$$p^2\overline{u}-p\varphi-\psi-a^2\overline{u}_{xx}=0.$$

这个非齐次常微分方程的通解是

$$\overline{u}(x;p)=Ae^{px/a}+Be^{-px/a}-\frac{1}{2a}e^{px/a}\int^{(x)}\frac{e^{-p\xi/a}}{p}[\psi(\xi)+p\varphi(\xi)]d\xi+\frac{1}{2a}e^{-px/a}\int^{(x)}\frac{e^{p\xi/a}}{p}[\psi(\xi)+p\varphi(\xi)]d\xi.$$

考虑到 $\lim\limits_{x\to\infty}\overline{u}$ 不应为无限大，积分常数 A 定为零；$\lim\limits_{x\to-\infty}\overline{u}$ 也不应为无限大，积分常数 B 也定为零。为了保证积分收敛，第一个积分的下限取为∞，第二个积分的下限则取为 $-\infty$. 这样，

$$\overline{u}(x;p)=-\frac{1}{2a}\int_{\infty}^{x}\frac{e^{-p(\xi-x)/a}}{p}[\psi(\xi)+p\varphi(\xi)]d\xi$$

$$+\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{x}\frac{e^{-p(x-\xi)/a}}{p}[\psi(\xi)+p\varphi(\xi)]d\xi$$

$$=\left[\frac{1}{2a}\int_{x}^{\infty}\frac{e^{-p(\xi-x)/a}}{p}\psi(\xi)d\xi+\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{x}\frac{e^{-p(x-\xi)/a}}{p}\psi(\xi)d\xi\right]$$

$$+\left[\frac{1}{2a}\int_{x}^{\infty}\frac{e^{-p(\xi-x)/a}}{p}p\varphi(\xi)d\xi\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{x}\frac{e^{-p(x-\xi)/a}}{p}p\varphi(\xi)d\xi\right].$$

第二个[ ]跟第一个[ ]相比较，$\varphi(\xi)$代替了$\psi(\xi)$，并且多一个因子p. 因此，先对第一个[ ]进行反演，得到原函数之后，把ψ改为φ并对t求导就得第二个[ ]的原函数。

运用延迟定理于$\frac{1}{p}\doteqdot H(t)$，

$$\frac{e^{-p(\xi-x)/a}}{p}\doteqdot H\left(t-\frac{\xi-x}{a}\right)=\begin{cases}1 & (\xi<x+at),\\ 0 & (\xi>x-at).\end{cases}$$

于是，

$$\frac{1}{2a}\int_{x}^{\infty}\frac{e^{-p(\xi-x)/a}}{p}\psi(\xi)d\xi\doteqdot\frac{1}{2a}\int_{x}^{x+at}\psi(\xi)d\xi.$$

同理，

$$\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{x}\frac{e^{-p(x-\xi)/a}}{p}\psi(\xi)d\xi\doteqdot\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x}\psi(\xi)d\xi.$$

这样，完成反演

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi+\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi(\xi)d\xi\right]$$

$$=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi+\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)].$$

这就是达朗伯公式(34.6)。

例3　求解无限长传输线上的电报方程

$$\begin{cases}RGU+(LG+RC)U_t+LCU_{tt}-U_{xx}=0,\\ U|_{t=0}=\Phi(x),\quad U_t|_{t=0}=\Psi(x).\end{cases}$$

解 象§33末尾那样，作函数变换

$$U(x,t)=e^{-\frac{LG+RC}{2LC}t}u(x,t),$$

定解问题转化为

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}-b^2u=0,\\ u|_{t=0}=\varphi(x),u_t|_{t=0}=\psi(x),\end{cases}$$

其中

$$a^2=\frac{1}{LC},\quad b=\frac{1}{2}(LG-RC)_{s},\quad \varphi(x)=e^{\frac{LG+RC}{LC}t}\Phi(x),$$

$$\psi(x)=e^{\frac{LG+RC}{LC}t}\Psi(x).$$

对泛定方程施行拉普拉斯变换，初始条件通过导数变换规则(21.15)而考虑到。变换的结果是

$$p^2\bar{u}-p\varphi-\psi-a^2\bar{u}_{xx}-b^2\bar{u}=0.$$

这个非齐次常微分方程的通解是

$$\bar{u}(x;p)=Ae^{x\sqrt{p^2-b^2}/a}+Be^{-x\sqrt{p^2-b^2}/a}$$

$$-\frac{1}{2a}\int^{(x)}\frac{e^{-\frac{\xi-x}{a}\sqrt{p^2-b^2}}}{\sqrt{p^2-b^2}}[\psi(\xi)+p\varphi(\xi)]d\xi$$

$$+\frac{1}{2a}\int^{(x)}\frac{e^{-\frac{x-\xi}{a}\sqrt{p^2-b^2}}}{\sqrt{p^2-b^2}}[\psi(\xi)+p\varphi(\xi)]d\xi.$$

考虑到 $\lim\limits_{x\to\infty}\bar{u}$ 不应为无限大，积分常数 A 定为零；$\lim\limits_{x\to-\infty}\bar{u}$ 也不应为无限大，积分常数 B 也定为零。为了保证积分收敛，第一个积分的下限取为∞，第二个积分的下限取为$-\infty$。这样，

$$\bar{u}(x;p)=-\frac{1}{2a}\int_{\infty}^{x}\frac{e^{-\frac{\xi-x}{a}\sqrt{p^2-b^2}}}{\sqrt{p^2-b^2}}[\psi(\xi)+p\varphi(\xi)]d\xi$$

$$+\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{x}\frac{e^{-\frac{x-\xi}{a}\sqrt{p^2-b^2}}}{\sqrt{p^2-b^2}}[\psi(\xi)+p\varphi(\xi)]d\xi$$

$$=\left[\frac{1}{2a}\int_x^{\infty}\frac{e^{-\frac{\xi-x}{a}\sqrt{p^2-b^2}}}{\sqrt{p^2-b^2}}\psi(\xi)d\xi+\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{x}\frac{e^{-\frac{x-\xi}{a}\sqrt{p^2-b^2}}}{\sqrt{p^2-b^2}}\psi(\xi)d\xi\right]$$

$$+\left[\frac{1}{2a}\int_x^{\infty}\frac{e^{-\frac{\xi-x}{a}\sqrt{p^2-b^2}}}{\sqrt{p^2-b^2}}p\varphi(\xi)d\xi\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{x}\frac{e^{-\frac{x-\xi}{a}\sqrt{p^2-b^2}}}{\sqrt{p^2-b^2}}p\varphi(\xi)d\xi\right].$$

第二个[ ]跟第一个[ ]相比较，$\varphi(\xi)$代替了$\psi(\xi)$，并且多一个因子p。因此，先对第一个[ ]进行反演，得到原函数之后，把ψ改为φ并对t求导就得第二个[ ]的原函数。

由附录一的公式30，

$$\frac{e^{-\frac{\xi-x}{a}\sqrt{p^2-b^2}}}{\sqrt{p^2-b^2}}\doteqdot I_0\left(b\sqrt{t^2-\frac{(x-\xi)^2}{a^2}}\right)H\left(t-\frac{\xi-x}{a}\right)$$

于是，

$$\frac{1}{2a}\int_x^{\infty}\frac{e^{-\frac{\xi-x}{a}\sqrt{p^2-b^2}}}{\sqrt{p^2-b^2}}\psi(\xi)d\xi$$

$$\doteqdot\frac{1}{2a}\int_x^{x+at}I_0\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2t^2-(x-\xi)^2}\right)\psi(\xi)d\xi.$$

同理，

$$\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{x}\frac{e^{-\frac{x-\xi}{a}\sqrt{p^2-b^2}}}{\sqrt{p^2-b^2}}\psi(\xi)d\xi$$

$$\doteqdot\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x}I_0\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2t^2-(x-\xi)^2}\right)\psi(\xi)d\xi.$$

这样，完成反演

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}I_0\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2t^2-(x-\xi)^2}\right)\psi(\xi)d\xi$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}I_0\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2t^2-(x-\xi)^2}\right)\varphi(\xi)d\xi\right]$$

$$=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}I_0\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2t^2-(x-\xi)^2}\right)\psi(\xi)d\xi$$

$$+\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]$$

$$+\frac{bt}{2}\int_{x-at}^{x+at}\frac{1}{\sqrt{a^2t^2-(x-\xi)^2}}I_0'\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2t^2-(x-\xi)^2}\right)\varphi(\xi)d\xi。$$

习　　题

1．求解一维无界空间中的扩散问题即 $u_t-a^2u_{xx}=0, u|_{t=0}=\varphi(x)$．[本题即§38 例 2，可对照。]

2．求解硅片的限定源扩散问题。把硅片的厚度当作无限大，这是半无界空间的定解问题 $u_t-a^2u_{xx}=0$，$u_x|_{x=0}=0$，$u|_{t=0}=\Phi_0\delta(x-0)$．[本题即§38 例 3，可对照。]

3．求解一维无界空间的有源输运问题 $u_t-a^2u_{xx}=f(x, t)$，$u|_{t=0}=0$．[本题即§39 例 2，可对照。]

4．求解一维半无界空间的输运问题 $u_t-a^2u_{xx}=0, u|_{t=0}=0$，边界条件是 $v|_{x=0}=f(t)$。[本题为§39 习题 2 的一部分，可对照。]

5．求解无界弦的受迫振动 $u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x, t)$，$u|_{t=0}=\varphi(x)$，$u_t|_{t=0}=\psi(x)$。

第十七章　保角变换法

§6 研究过用解析函数描写平面标量场的问题。不过，在那里只是先任意提出一个解析函数，然后阐明它描写什么样的平面标量场，或者说，它是什么样的平面标量场的复势。但实际上，更重要的问题却是根据给定的边界条件求出平面标量场的复势。这当然可以考虑用分离变数法或利用解的积分公式来解决。但是，如果边界的形状比较复杂，分离变数法或积分公式用起来都有困难。本章提供一种化难为易的办法，把边界形状比较复杂的平面标量场转化为边界形状比较简单的平面标量场再去求解。

§53．保角变换的基本性质

平面标量场的拉普拉斯方程

$$u_{xx}+u_{yy}=0 \tag{53.1}$$

是椭圆型的，它有两族复数共轭特征线

$$x+iy=\text{常数},\quad x-iy=\text{常数}.$$

取 $\xi=x+iy$ 和 $\eta=x-iy$ 作为新的自变数，方程(53.1)化为

$$u_{\xi\eta}=0. \tag{53.2}$$

先对 η 积分，得

$$u_\xi=f(\xi),$$

其中 f 是任意函数。再对 ξ 积分，得到通解

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int f(\xi)d\xi+f_2(\eta)=f_1(\xi)+f_2(\eta)\\&=f_1(x+iy)+f_2(x-iy),\end{aligned} \tag{53.3}$$

其中 f_1 和 f_2 都是任意函数。

读者可把(53.3)的推导过程跟弦振动方程的通解(34.5)即 $u(x,t)=f_1(x+at)+f_2(x-at)$ 的推导过程加以对照。事实上，把弦振动方程里的 t 改记为 y，并把 a 换作 i，就得到二维拉普拉斯方程，而弦振动方程的通解(34.5)也就成了二维拉普拉斯方程的通解(53.3)。

物理量的值应该是实数，因此，(53.3)的函数 f_1 和 f_2 应该是共轭复函数，从而

$$u=\mathrm{Re}f(z) \quad 或 \quad u=\mathrm{Im}f(z). \tag{53.4}$$

这是说，二维拉普拉斯方程的通解是任意解析函数的实部或虚部。

但是，我们所要解的问题一般说来并不是抽象的平面标量场，而是带有具体的边界条件的平面标量场。所以，重要的事情在于根据具体的边界条件确定(53.4)里的解析函数即复势。

读者想必还记得，弦振动方程的通解(34.5)里的函数 f_1 和 f_2 很容易用初始条件加以确定，其结果即达朗伯公式(34.6)。可是用边界条件确定二维拉普拉斯方程的通解(53.4)的函数 f 却十分困难，除非边界的形状很简单。

那么，用适当的代换

$$\zeta=\zeta(z), \qquad z=z(\zeta) \tag{53.5}$$

即

$$\begin{cases}\xi=\xi(x,y),\\ \eta=\eta(x,y);\end{cases} \qquad \begin{cases}x=x(\xi,\eta),\\ y=y(\xi,\eta)\end{cases} \tag{53.6}$$

把形状复杂的边界变换为形状简单的边界，行不行呢？把边界形状从复杂化为简单，这确实是好的。但还得研究一下，经过这样的代换，平面标量场的拉普拉斯方程变成了什么样子。事实上，经过代换(53.5)即(53.6)，拉普拉斯方程(53.1)化为

$$(\xi_x^2+\xi_y^2)u_{\xi\xi}+2(\xi_x\eta_x+\xi_y\eta_y)u_{\xi\eta}+(\eta_x^2+\eta_y^2)u_{\eta\eta}$$

$$+(\xi_{xx}+\xi_{yy})u_\xi+(\eta_{xx}+\eta_{yy})u_\eta=0. \qquad (53.7)$$

如果新的自变数 ζ 在所研究的区域上是 z 的解析函数，则根据(4.1),(4.2),(4.3),(5.1),(5.2)和(5.3),

$$\xi_x^2+\xi_y^2=|\zeta'(z)|^2, \qquad \eta_x^2+\eta_y^2=|\zeta'(z)|^2,$$

$$\xi_x\eta_x+\xi_y\eta_y=0, \quad \xi_{xx}+\xi_{yy}=0, \quad \eta_{xx}+\eta_{yy}=0,$$

而(53.7)就成为

$$|\zeta'(z)|^2(u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta})=0. \qquad (53.8)$$

这是说，如果 $\zeta(z)$ 是解析函数，则除了 $\zeta'(z)=0$ 的点之外，z 平面某个区域上的调和函数经过代换(53.5)即(53.6)之后成为 ζ 平面相应区域上的调和函数。

总起来说，设在 z 平面某个区域 B 上求解二维拉普拉斯方程的边值问题，如果区域的边界形状比较复杂因而求解有困难，我们可以利用解析函数 $\zeta=\zeta(z)$ 把区域 B 变换为 ζ 平面上的区域 β，把 B 的边界条件加在 β 的相应的边界上，只要 $\zeta=\zeta(z)$ 选得适当，β 的边值问题可以比较容易地解出，而求得 $u(\xi,\eta)$ 或复势 $w(\zeta)$，那么回到原自变数 z, $u[\xi(x,y),\eta(x,y)]$ 就是原问题的解，$w[\zeta(z)]$ 就是原问题的复势。这岂不是化难为易吗？

这个办法也可用来求解二维泊松方程

$$u_{xx}+u_{yy}=f(x,y) \qquad (53.9)$$

的边值问题。事实上，在解析函数 $\zeta=\zeta(z)$ 的代换(53.5)下，泊松方程(53.9)变为

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=\frac{1}{|\zeta'(z)|^2}f[x(\xi,\eta),y(\xi,\eta)]. \qquad (53.10)$$

仍然是泊松方程，只是"源"的强度(对于静电场来说，即电荷密度)变为 $1/|\zeta'(z)|^2$ 倍。注意这个倍数一般说来不是常数而是逐点而异的。

现在着重研究一下由解析函数 $\zeta=\zeta(z)$ 所表征的自变数代换

的基本性质。

在 z 平面上每给定一点，ζ 平面必有一点 $\zeta=\zeta(z)$ 跟它相对应。这样，在 z 平面上每给定一根曲线，ζ 平面必有一根对应的曲线(图 84)。在相应的两曲线上各截取相应的一小段 $(z, z+\Delta z)$ 和



图 84

$(\zeta, \zeta+\Delta\zeta)$。这两小段的长度 $|\Delta\zeta|$ 和 $|\Delta z|$ 之比为

$$\frac{|\Delta\zeta|}{|\Delta z|}=\left|\frac{\Delta\zeta}{\Delta z}\right|.$$

如果这两小段很短，则长度比可认为是

$$\lim_{\Delta z\to 0}\left|\frac{\Delta\zeta}{\Delta z}\right|=|\zeta'(z)|. \qquad (53.11)$$

这是说，线段长度放大率为 $|\zeta'(z)|$。(放大率可以 >1 也可以 <1，后一情况实际上是缩小。)注意这长度放大率一般说来并非常数，而是逐点而异的。因此，z 平面的图象变换到 ζ 平面上，各处以不同的放大率被放大，图象的形状大大改观。这正是我们所希望的，因为如果变换后的图象同于变换前的图象，那有什么意思呢？

再看相应的小段曲线的方向。z 平面上 $(z, z+\Delta z)$ 段跟实轴夹角为 $\arg\Delta z$，而 ζ 平面相应的段跟实轴夹角为 $\arg\Delta\zeta$，两者相差

$$\arg\Delta\zeta-\arg\Delta z=\arg\frac{\Delta\zeta}{\Delta z}.$$

如果这两小段很短，则上述角度差可认为是

$$\lim_{\Delta z\to 0}\arg\frac{\Delta\zeta}{\Delta z}=\arg\zeta'(z). \qquad (53.12)$$

这是说，把 z 点附近的小段曲线逆时针方向旋转角度 $\arg\zeta'(z)$，就得到在相应的点 ζ 附近的相应小段曲线的方向。

如果在 z 平面上有两根曲线相交于点 z，则在 z 平面上也有相应的两根曲线相交于相应的点 ζ。从 z 平面到 ζ 平面，两曲线都是逆时针方向旋转 $\arg\zeta'(z)$，所以两曲线交角不变。因此，解析函数 $\zeta=\zeta(z)$ 所表征的代换叫作保角变换。

交角不变的性质也可从(53.11)看出来。事实上，通过同一点的各个微小弧段以同样的放大率 $|\zeta'(z)|$ 被放大，任一微小几何图形必变为其相似形，从而交角不变。

复数"零"的辐角没有明确意义。在 $\zeta'(z)=0$ 的点，(53.12)失去意义，也就谈不上交角不变。

如果 ζ 是 z^* 的解析函数，则两曲线的交角大小也保持不变，但由于 z^* 是 z 对 x 轴的反映，交角的方向反转，顺时针变为逆时针，逆时针变为顺时针。通常把这类变换称为**第二类保角变换**。

设在 z 平面上有闭曲线 l，在保角变换下，闭曲线 l 变为 ζ 平面上的闭曲线 λ。在这两个闭曲线上沿着相应的方向前进，则左侧的区域 B 对应于左侧的区域 β，右侧的区域 C 对应于右侧的区域 γ，如图 85.

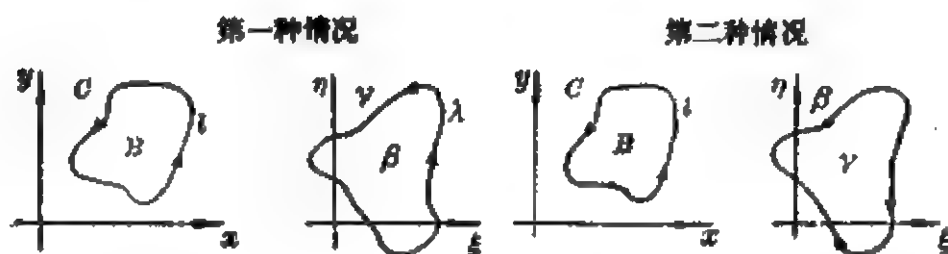


图 85

利用辐角原理(§ 19)，还可以证明，如果 $\zeta(z)$ 是区域 B 上的解析函数，则发生图 85 的第一种情况，即 l 的内域 B 变为 λ 的内域 β，l 的外域 C 变为 λ 的外域 γ；如 $\zeta(z)$ 是区域 B 上的解析函数，但要除去一个孤立的一阶极点，

则发生图85的第二种情况，即 l 的内域 B 变为 λ 的外域 β，l 的外域 C 变为 λ 的内域 γ。其实，只要在区域 B 内任取一点 z，按照 $\zeta=\zeta(z)$ 算出相应的点 ζ，就可判断究竟发生第一种情况还是第二种情况。

可以证明，任意一个单通区域必可通过某个保角变换变为另一个任意给定的单通区域，这叫作里曼定理。不过，对我们说来，更重要的是，在各个具体问题中找到适当的保角变换。下一节将介绍某些常用的保角变换。

保角变换法应用于柱状电容器的电容量的计算尤其具有显著优点。事实上，为研究柱状电容器，只需研究它的横剖面，这是平面场问题。通过保角变换，可把电容器的横剖面形状变得较为简单。在保角变换下，ζ 平面的电荷密度如(53.10)指出变为 $1/|\zeta'(z)|^2$ 倍，而 ζ 平面的线段长度如(53.11)指出变为 $|\zeta'(z)|$ 倍，从而面积变为 $|\zeta'(z)|^2$ 倍。这样，ζ 平面上某一区域里的电量为 z 平面相应区域里的电量的 $\frac{1}{|\zeta'(z)|^2}|\zeta'(z)|^2$ 倍即1倍，亦即两者相等。因此，保角变换前后的电容器的电容量相等，所以只要在 ζ 平面求电容量，无需回到 z 平面去。

§54. 某些常用的保角变换

(一) 线性变换

线性函数

$$\zeta(z)=az+b \quad (a\text{ 和 }b\text{ 是复常数}) \qquad (54.1)$$

的导数

$$\zeta'(z)=a$$

是常数。这是说，长度放大率是常数，图形的各个部分按同样比例放大因而形状不变。

事实上，

$$\zeta(z)=az+b=a\left(z+\frac{b}{a}\right)=|a|e^{i\arg a}\left(z+\frac{b}{a}\right),$$

这可以分解为

$$z_1=z+\frac{b}{a},\quad z_2=e^{i\arg a}z_1,\quad \zeta=|a|z_2.$$

从 z 平面到 z_1 平面，图象作为整体而平动，位移矢量对应于复数 b/a；从 z_1 平面到 z_2 平面，图象绕原点旋转 $\arg a$；从 z_2 平面到 ζ 平面，图象放大到 $|a|$ 倍。形状确实保持不变，或者说，线性变换只是把图象变为它的相似形。

既然图象在线性变换下保持形状不变，那么线性变换如果单独使用，对于研究平面场并无帮助。但线性变换跟其他保角变换联合使用可能还是有作用的（参看例 2）。

（二）幂函数和根式

幂函数

$$\zeta(z)=z^n \tag{54.2}$$

的导数

$$\zeta'(z)=nz^{n-1}.$$

在原点，导数 $\zeta'(0)=0$，交角并不保持不变。事实上，

$$\arg\zeta=\arg(z^n)=n\arg z,$$

这是说，在原点的交角放大为 n 倍。在原点以外任一有限远点，交角保持不变。

根式

$$\zeta(z)=\sqrt[n]{z} \tag{54.3}$$

是 (54.2)的逆变换，在原点的交角缩小为 $1/n$ 倍。

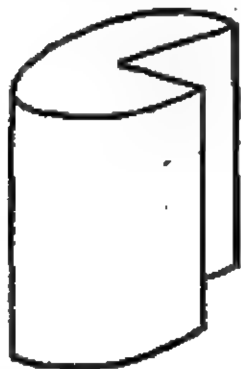


图 86

例 1 一个甚大金属导体，挖去一个二面角，角的大小为 60°（图 86）。让导体充电到电

势 V_0，试求二面角内电场中的电势分布。

解 把导体看作无限长，只须研究一个横截面，把这横截面叫作 z 平面。在 z 平面上，二面角表现为顶角 $\pi/3$ 的角域(图 87)。

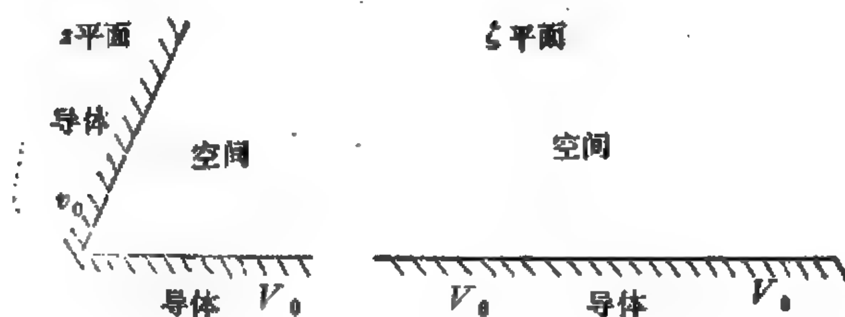


图 87

把顶角放大到三倍则成为 π，而顶角为 π 的角域即半平面，问题容易解得多。

由此可见，应作变换 $\zeta=z^3$. 在 ζ 平面，下半平面是导体，上半平面是空间。在上半平面的电势分布易于解出为

$$u=V_0+C\eta,$$

常数 C 取决于导体表面的电荷面密度。回到 z 平面，角域中的电势分布是

$$u=V_0+C\eta=V_0+C\operatorname{Im}\zeta=V_0+C\operatorname{Im}z^3=V_0+C(3x^2y-y^3).$$

例 2 研究平底水槽中的水的流动，槽底有一竖立的薄片阻挡水流(图 88a)。

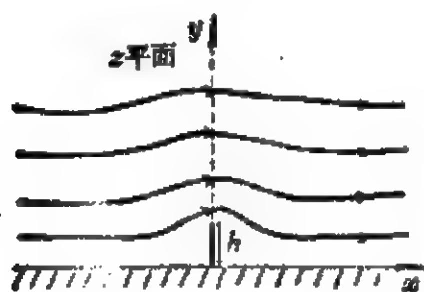


图 88a

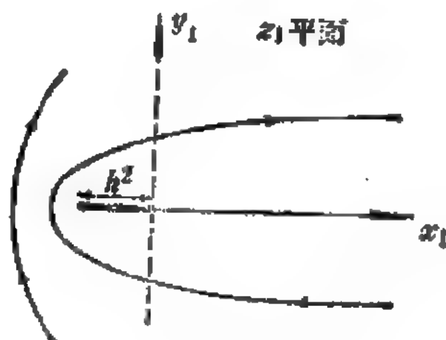


图 88b

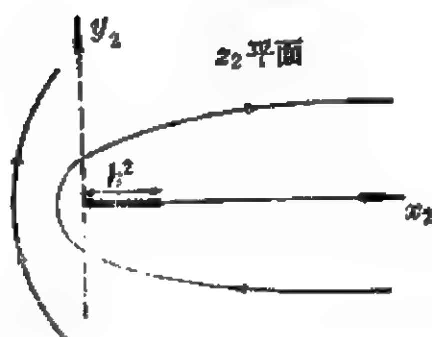


图 88c



图 88d

解 这个问题的困难来自槽底的薄片，它的特征是两边各有一个直角。作变换

$$z_1 = z^2,$$

直角加倍成为平角(即 π) 如图 88b. 整个水槽底加上竖立的薄片变为 z_1 平面的实轴上从 $-h^2$ 经原点向 $+\infty$ 去的割线两岸，这样，问题就容易得多。

z_1 平面的割线端点不在原点，这不大方便。作变换

$$z_2 = z_1 + h^2,$$

割线端点移到原点 (图 88c)。

割线两岸可说是夹角为 2π 的两根直线。作变换

$$\zeta = \sqrt{z_2},$$

夹角变为 1/2 倍，等于 π. 这是说，割线两岸成为 ζ 平面的实轴 (图 88d)。

ζ 平面上的速度势 u 显然是

$$u = C\xi = \mathrm{Re}(C\zeta).$$

回到原来的自变数，

$$\begin{aligned} u &= \mathrm{Re}(C\sqrt{z_2}) = \mathrm{Re}(C\sqrt{z_1+h^2}) = \mathrm{Re}(C\sqrt{z^2+h^2}) \\ &= \mathrm{Re}(C\sqrt{(x^2-y^2+h^2)+i2xy}) \\ &= C\sqrt{\frac{(x^2-y^2+h^2)+\sqrt{(x^2-y^2+h^2)^2+4x^2y^2}}{2}}. \end{aligned}$$

至于在各点的流速 $v=\nabla u$ 不难从 u 算出，但这计算较繁。利用复势 $w(z)=C\sqrt{z^2+h^2}$ 来计算可能方便些，这是因为对应于流速矢量 v 的复数是

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial v}{\partial x}=(w')^*=\left(\frac{d}{dz}C\sqrt{z^2+h^2}\right)^*$$

$$=\left(\frac{Cz}{\sqrt{z^2+h^2}}\right)^*=\frac{Cz^*}{\sqrt{(z^*)^2+h^2}}.$$

既已求得流速，运用流体力学中的伯努利原理还可以计算压强 p.

为了阐明常数 C 的意义，考察远离竖立的薄片的地方的流速 v. 对应于 v 的复数是

$$\lim_{z\to\infty}\frac{Cz^*}{\sqrt{(z^*)^2+h^2}}=\lim_{z\to\infty}\frac{C}{\sqrt{1+(h/z^*)^2}}=C,$$

这是说，流速的 x 分量 v_x 和 y 分量 v_y 分别是

$$v_x=C,\qquad v_y=0.$$

这样，远离竖立的薄片的地方，水是平行于槽底而流动的，流速就是 C.

（三）指数函数和对数函数

指数函数

$$\zeta(z)=e^z=e^xe^{iy}. \tag{54.4}$$

这是说，$|\zeta|=e^x$，$\arg\zeta=y$. 这样，z 平面上平行于实轴的直线"$y=$常数"变为 ζ 平面上的"$\arg\zeta=$常数"，即通过原点的射线。z 平面上平行于虚轴的直线"$x=$常数"变为 ζ 平面上的"$|\zeta|=$常数"，即以原点为圆心的圆。

指数函数 (54.4) 具有纯虚数周期 $i2\pi$. z 平面上 x 相同而 y 相差 2π 的整倍数的那些点变为 ζ 平面上同一点。z 平面上任何一个平行于实轴而宽度为 2π 的带域变为 ζ 的全平面。带域上的直角坐标网变为 ζ 平面上的极坐标网。

对数函数

$$\zeta(z)=\ln z=\ln(|z|e^{i\arg z})=\ln|z|+i\arg z \qquad (54.5)$$

是(54.4)的逆变换。(54.5)亦即 $\mathrm{Re}\zeta=\ln|z|$，$\mathrm{Im}\zeta=\arg z$。这样，z 平面上以原点为圆心的圆"$|z|=$常数"变为 ζ 平面上的"$\mathrm{Re}\zeta=$常数"，即平行于虚轴的直线。z 平面上通过原点的射线"$\arg z=$常数"变为 ζ 平面上的"$\mathrm{Im}\zeta=$常数"，即平行于实轴的直线。z 平面上的极坐标网变为 ζ 平面上的直角坐标网。点 z 的辐角 $\arg z$ 可以加减 2π 的任意整数倍数，所以 ζ 是 z 的多值函数。沿 z 平面的正实轴作割线，把 $\arg z$ 限制在 0 与 2π 之间，就是说，取 ζ 的主值，则 z 的全平面变为 ζ 平面上 $0\leqslant\mathrm{Im}\zeta\leqslant 2\pi$ 的带域。

例 3 两个同轴圆柱构成柱形电容器，内外圆柱的半径分别是 R_1 和 R_2。计算每单位长度圆柱电容器的电容量。

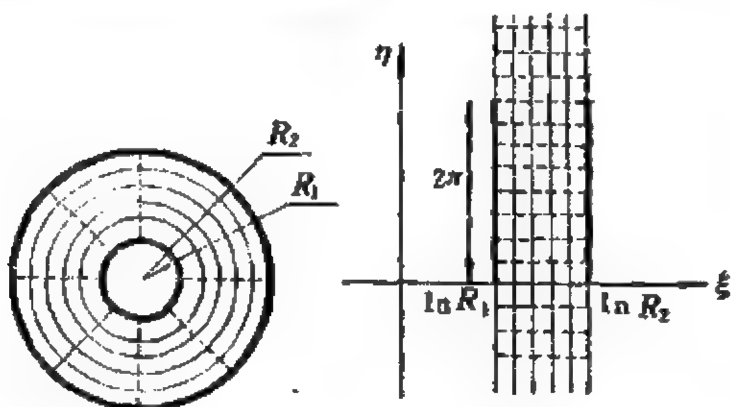


图 89a　　　　图 89b

解 圆柱电容器的横截面见图 89。等势线和电力线构成极坐标网。这提示我们采用对数变换 $\zeta=\ln z=\ln|z|+i\arg z$。对数函数是多值函数，它把内圆柱变为直线 $\xi=\ln R_1$，其主值是 $0\leqslant\eta\leqslant 2\pi$ 的一段；它把外圆柱变为直线 $\xi=\ln R_2$，其主值也是 $0\leqslant\eta\leqslant 2\pi$ 的一段。这样，圆柱形电容器变为平板电容器，两极板的宽度为 2π，相距 $\ln R_2-\ln R_1=\ln(R_2/R_1)$。

用国际单位制，平板电容器的电容量为 $\varepsilon_0 A/d$，其中 A 是极板的面积。(如用高斯单位制，则电容量为 $A/4\pi d$。) 以单位长度计

算，极板的面积 $A=2\pi\times1=2\pi$，电容量

$$C=\frac{\varepsilon_0 A}{d}=\frac{\varepsilon_0 2\pi}{\ln(R_2/R_1)}.$$

这也就是每单位长度圆柱电容器的电容量。

附(同轴线的电感) 把同轴圆柱作为同轴传输线使用，它不仅具有上面算出的电容，而且还有电感。这里计算每单位长度的电感 L。

作为同轴线使用，电流方向垂直于图 89 的图面，设内圆柱上的电流 I 向外，外圆柱上的电流 I 向内。图 89 的同心圆就是磁力线(方向为逆时针的)。在这些同心圆之中取半径为 ρ 的作为代表。运用电磁学的安培回路定律，

$$H2\pi\rho=I,$$

$$H=\frac{I}{2\pi}\frac{1}{\rho}.$$

磁感应强度

$$B=\mu_0 H=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{\rho}.$$

每单位长度传输线内外圆柱之间的磁通量

$$\Phi=\int_{R_1}^{R_2}Bd\rho=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{\rho}d\rho=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}.$$

于是，每单位长度的电感

$$L=\frac{\Phi}{I}=\frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}.$$

§31 导出理想传输线的电报方程(31.15)后，注明 $1/LC=$ 光速平方。这里就是一个例证，因为对于同轴传输线来说

$$\frac{1}{LC}=\frac{1}{(\mu_0/2\pi)\ln(R_2/R_1)}\frac{\ln(R_2/R_1)}{\varepsilon_0 2\pi}=\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}$$

$$=\frac{10^7}{4\pi}\cdot\frac{36\pi10^9}{1}=9\times10^{16}=(3\times10^8\text{ 米/秒})^2=(\text{光速})^2.$$

(四) 分式线性变换

变换

$$\zeta(z)=\frac{az+b}{cz+d} \quad (ad-bc\neq 0) \qquad (54.6)$$

的分子和分母都是线性的，所以叫作分式线性变换。条件 $ad-bc\neq 0$ 是十分必要的，否则 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$，而 $\zeta=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=$常数，根本谈不上 z 平面和 ζ 平面之间的变换。

分式线性变换的重要特点是圆保持为圆(直线作为圆的特例看待)。事实上，分式线性变换(54.6)可化为

$$\zeta=\frac{a}{c}+\frac{b-\frac{ad}{c}}{cz+d}=\frac{a}{c}+\frac{(bc-ad)/c^2}{(z+d/c)},$$

即

$$z_1=z+\frac{d}{c}, \quad z_2=\frac{(bc-ad)/c^2}{z_1}, \quad \zeta=z_2+\frac{a}{c}.$$

变换 $z_1=z+d/c$ 和 $\zeta=z_2+a/c$ 都是整体的平动，圆保持为圆是不成问题的。需要证明的是变换 $z_2=f/z_1$ (常数 f 即上面的 $(bc-ad)/c^2$)使圆保持为圆。设有任意给定的圆

$$A(x_1^2+y_1^2)+2Bx_1+2Cy_1+D=0,$$

圆心在 $(-B/A,\ -C/A)$，半径是 $\sqrt{B^2+C^2-AD}/A$. 用复变数 $z_1=x_1+iy_1$，这个圆的方程可写成

$$Az_1z_1^*+(B+iC)z_1^*+(B-iC)z_1+D=0,$$

即

$$Az_1z_1^*+E^*z_1+Ez_1^*+D=0.$$

作变换 $z_1=f/z_2$，得

$$A\frac{f}{z_2}\frac{f^*}{z_2^*}+E^*\frac{f}{z_2}+E\frac{f^*}{z_2^*}+D=0,$$

即

$$Dz_2z_2^* + (Ef^*)z_2 + (E^*f)z_2^* + Aff^* = 0.$$

与变换前的方程类型相同，因而仍然是圆。跟变换前的方程比较，可看出这个圆的圆心在$(-\mathrm{Re}(E^*f)/D,\ -\mathrm{Im}(E^*f)/D)$，半径是$|f|\sqrt{|E|^2-AD}/D$.

分式线性变换不仅使圆保持为圆，而且对于圆的对称点保持为对称点。

所谓对于圆的对称点可参看图90。已给圆C，半径为R. 有两点A和B，其连线通过圆C的圆心O，而且$\overline{OA}\ \overline{OB}=R^2$，则$A$和$B$两点就叫作对于圆$C$为对称点。读者想必还记得§37例8的电像法。点电荷和它的电像两者的位置正是互为对称点。对称点的一个特例是圆心和无限远点。

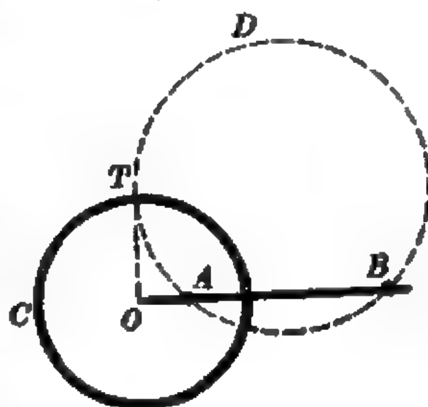


图 90

过对称点A和B任作一圆D，从圆C的圆心O作圆D的切线OT，T是切点。从几何学知道$\overline{OT}=\sqrt{\overline{OA}\ \overline{OB}}=\sqrt{R^2}=R$，可见$T$正好在圆$C$的圆周上，即$T$是圆$C$和$D$的交点。$OT$既是圆$D$的切线，又是圆$C$的半径，这说明圆$C$和圆$D$是正交的。因此，对于圆$C$的对称点也可定义为：过对称点的任一圆$D$必跟圆$C$正交。

现在来证明对称点保持为对称点。事实上，在分式线性变换下，z平面上的圆C和D，点A和B（图90）分别变为ζ平面上的圆C'和D'，点A'和B'. 由于变换的保角性质，圆C'和D'正交。这是说，通过A'和B'的任一圆D'必跟圆C'正交，即A'和B'对于圆C'为对称点。

掌握"对称点保持为对称点"这个性质，有助于寻找适当的分

式线性变换。

例 4　有一甚大接地导体平面，另有一甚长导线平行于导体平面，相距为 a. 如导线均匀带电，每单位长电量为 Q. 求此电场中的电势。

解　取横截面。从横截面看，接地平面成为实轴，导线则成为虚轴上的点 ia(图 91). 设想把实轴变为圆，点 ia 变为该圆的圆心，问题就容易解得多。

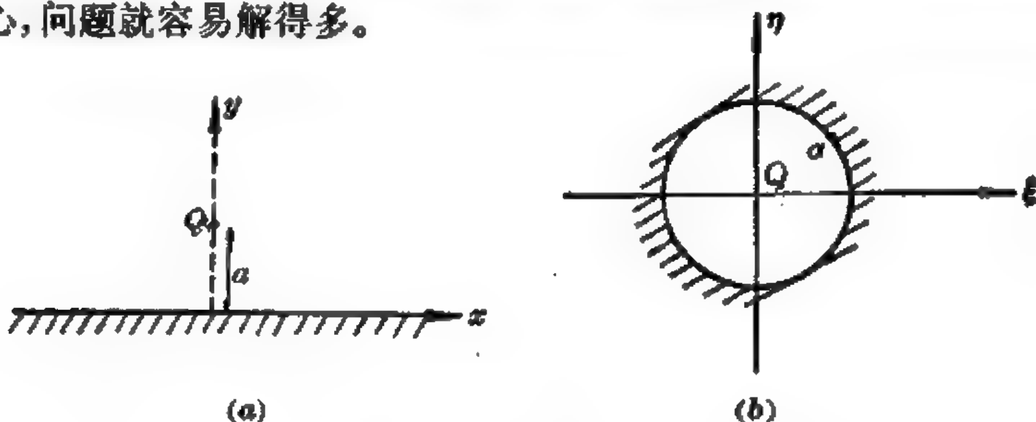


图　91

取点 ia 对于实轴的对称点即 $-ia$. 分式线性变换

$$\zeta=\frac{z-ia}{z+ia}$$

把对称点分别变为原点 $\zeta=0$ 和无限远点 $\zeta=\infty$; 问题是 z 平面上的实轴变为 ζ 平面上的什么图像。首先，这图像必定是圆。其次，$\zeta=0$ 和 $\zeta=\infty$ 是这图像的对称点。因此，这图像是以原点 $\zeta=0$ 为圆心的圆，果然实现了原来的设想。

那么，这个圆的半径多大呢？为此，在 z 平面的实轴上任取一点 A，相应的 $z=x$. 它在 ζ 平面上的图像为圆上的 α 点，相应的

$$\zeta=\frac{x-ia}{x+ia}.$$

圆的半径 R 即 α 点与原点的距离，即相应于 α 点的 ζ 的模，

$$R=|\zeta|=\left|\frac{x-ia}{x+ia}\right|=\frac{|x-ia|}{|x+ia|}=\frac{x^2+a^2}{x^2+a^2}=1.$$

这样，圆的半径为1.

ζ 平面上的电势 u 是边值问题

$$\begin{cases}\Delta_2 u=-\dfrac{1}{\varepsilon_0}Q\delta(\rho),\\ u|_{\rho=1}=0,\end{cases}$$

ρ 是 ζ 平面的极坐标。这个问题的解容易求出为

$$u=\frac{Q}{\varepsilon_0 2\pi}\ln\frac{1}{\rho}=-\frac{Q}{\varepsilon_0 2\pi}\ln\rho=\mathrm{Re}\left[-\frac{Q}{\varepsilon_0 2\pi}\ln\zeta\right].$$

在初等的电磁学里，并不列出边值问题，也能求得这个电势。

回到 z 平面，

$$u=\mathrm{Re}\left[-\frac{Q}{\varepsilon_0 2\pi}\ln\frac{z-ia}{z+ia}\right]=-\frac{Q}{\varepsilon_0 2\pi}\ln\frac{|z-ia|}{|z+ia|}$$

$$=-\frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi}\ln\frac{x^2+(y-a)^2}{x^2+(y+a)^2}.$$

例 5 两个平行圆柱，半径分别是 R_1 和 R_2，柱轴相距 $L(>R_1+R_2)$. 试求每单位长度的电容量。

解 设法把这两圆柱变为同轴圆柱，就可引用例 3 而解决问题。

取横截面。从横截面看，两圆柱成为两个圆 C_1 和 C_2.

为把 C_1 和 C_2 变为同心圆，先要找 a 和 b 两点，它们对于圆 C_1 是对称点，对于圆 C_2 也是对称点。

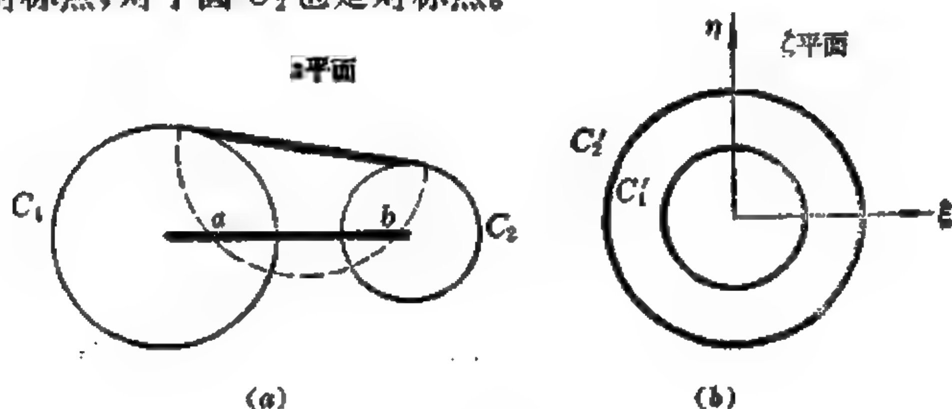


图 92

a 和 b 可用几何方法找到。先作圆 C_1 和 C_2 的公切线，以公切线为直径作圆，这圆与 C_1 和 C_2 的连心线的两个交点就是 a 和 b。

a 和 b 也可用代数方法找到。取圆 C_1 的圆心为 z 平面的原点，取连心线为 x 轴。把 a 和 b 的坐标分别记作 x_1 和 x_2。由对称点的定义，得

$$\begin{cases} x_1x_2=R_1^2, \\ (L-x_1)(L-x_2)=R_2^2. \end{cases}$$

从这两个方程解得

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{2L}\left[(L^2+R_1^2-R_2^2)-\sqrt{(L^2+R_1^2-R_2^2)^2-4R_1^2L^2}\right], \\ x_2=\dfrac{1}{2L}\left[(L^2+R_1^2-R_2^2)+\sqrt{(L^2+R_1^2-R_2^2)^2-4R_1^2L^2}\right]. \end{cases}$$

根号下的式子即 $L^4+R_1^4+R_2^4-2L^2R_1^2-2L^2R_2^2-2R_1^2R_2^2$，它又可改写为

$$\begin{aligned} &(L^4+R_1^4+R_2^4-2L^2R_1^2-2L^2R_2^2+2R_1^2R_2^2)-4R_1^2R_2^2 \\ &=(L^2-R_1^2-R_2^2)^2-(2R_1R_2)^2 \\ &=(L^2-R_1^2+2R_1R_2-R_2^2)(L^2-R_1^2-2R_1R_2-R_2^2) \\ &=[L^2-(R_1-R_2)^2][L^2-(R_1+R_2)^2] \\ &=(L+R_1-R_2)(L-R_1+R_2)(L+R_1+R_2)(L-R_1-R_2). \end{aligned}$$

作分式线性变换

$$\zeta(z)=\frac{z-x_1}{z-x_2}.$$

这把点 a 变为 ζ 平面的原点 $\zeta=0$，点 b 变为 ζ 平面的无限远点 $\zeta=\infty$。圆 C_1 变为 ζ 平面上的圆 C_1'。点 a 和 b 对于圆 C_1 是对称点，因而 $\zeta=0$ 和 $\zeta=\infty$ 对于圆 C_1' 为对称点。换句话说，圆 C_1' 以原点 $\zeta=0$ 为圆心。同理，圆 C_2 变为 ζ 平面上的圆 C_2'，而圆 C_2' 也是以原点 $\zeta=0$ 为圆心。这样，圆 C_1' 和 C_2' 是同心圆。

为了计算电容量，还必须知道圆 C_1' 和 C_2' 的半径 R_1' 和 R_2'。在

z 平面的圆 C_1 上取一点 $z=-R_1$，它变为 ζ 平面的圆 C_1' 上的

$$\zeta=\frac{-R_1-x_1}{-R_1-x_2}=\frac{R_1+x_1}{R_1+x_2}.$$

于是

$$R_1'=\left|\frac{R_1+x_1}{R_1+x_2}\right|=\frac{(L+R_1)^2-R_2^2-\sqrt{(L^2-R_1^2-R_2^2)^2-4R_1^2R_2^2}}{(L+R_1)^2-R_2^2+\sqrt{(L^2-R_1^2-R_2^2)^2-4R_1^2R_2^2}}.$$

同理，在 z 平面的圆 C_2 上取一点 $z=L+R_2$，它变为 ζ 平面的圆 C_2' 上的

$$\zeta=\frac{L+R_2-x_1}{L+R_2-x_2}.$$

于是，

$$R_2'=\left|\frac{L+R_2-x_1}{L+R_2-x_2}\right|=\frac{(L+R_2)^2-R_1^2+\sqrt{(L^2-R_1^2-R_2^2)^2-4R_1^2R_2^2}}{(L+R_2)^2-R_1^2-\sqrt{(L^2-R_1^2-R_2^2)^2-4R_1^2R_2^2}}.$$

引用例 3 的答案，每单位长度的电容量

$$C=\frac{\varepsilon_0 2\pi}{\ln(R_2'/R_1')}.$$

这需要先计算 R_2'/R_1'，

$$\frac{R_2'}{R_1'}=\frac{\left[(L+R_2)^2-R_1^2+\sqrt{(L^2-R_1^2-R_2^2)^2-4R_1^2R_2^2}\right]\left[(L+R_1)^2-R_2^2+\sqrt{(L^2-R_1^2-R_2^2)^2-4R_1^2R_2^2}\right]}{\left[(L+R_2)^2-R_1^2-\sqrt{(L^2-R_1^2-R_2^2)^2-4R_1^2R_2^2}\right]\left[(L+R_1)^2-R_2^2-\sqrt{(L^2-R_1^2-R_2^2)^2-4R_1^2R_2^2}\right]}$$

$$=\frac{\left[(L+R_2)^2-R_1^2\right]\left[(L+R_1)^2-R_2^2\right]+2L(L+R_1+R_2)\sqrt{(L^2-R_1^2-R_2^2)^2-4R_1^2R_2^2}+\left[(L^2-R_1^2-R_2^2)^2-4R_1^2R_2^2\right]}{\left[(L+R_2)^2-R_1^2\right]\left[(L+R_1)^2-R_2^2\right]-2L(L+R_1+R_2)\sqrt{(L^2-R_1^2-R_2^2)^2-4R_1^2R_2^2}+\left[(L^2-R_1^2-R_2^2)^2-4R_1^2R_2^2\right]}$$

$$=\frac{(L+R_1-R_2)(L-R_1+R_2)+\sqrt{(L^2-R_1^2-R_2^2)^2-4R_1^2R_2^2}}{(L+R_1-R_2)(L-R_1+R_2)-\sqrt{(L^2-R_1^2-R_2^2)^2-4R_1^2R_2^2}}.$$

分子和分母分别乘以分母的共轭根式，即得

$$\frac{R_2'}{R_1'}=\frac{L^2-R_1^2-R_2^2}{2R_1R_2}+\sqrt{\left(\frac{L^2-R_1^2-R_2^2}{2R_1R_2}\right)^2-1}.$$

因此，每单位长度的电容量

$$C=\frac{\varepsilon_0 2\pi}{\ln\left[\frac{L^2-R_1^2-R_2^2}{2R_1R_2}+\sqrt{\left(\frac{L^2-R_1^2-R_2^2}{2R_1R_2}\right)^2-1}\right]}.$$

这也可以写为

$$C=\frac{\varepsilon_0 2\pi}{\operatorname{arc\,ch}[(L^2-R_1^2-R_2^2)/2R_1R_2]}.$$

对于通常的双线传输线，$R_1=R_2=R$，每单位长度电容量

$$C=\frac{\varepsilon_0 2\pi}{\ln\left[\frac{L^2}{2R^2}-1+\sqrt{\frac{L^4}{4R^4}-\frac{L^2}{R^2}}\right]}.$$

例 6 半径为 R_1 的空心圆柱套着半径为 R_2 的圆柱。两柱的轴平行而相距 $L(<R_1-R_2)$. 试求每单位长度的电容量。

解 取横截面。从横截面看，两圆柱成为圆 C_1 和 C_2（图 93a）. 现在设法把这两个圆变为同心圆。为此，先要找 a 和 b 两点，它们对于圆 C_1 是对称点，对于圆 C_2 也是对称点。

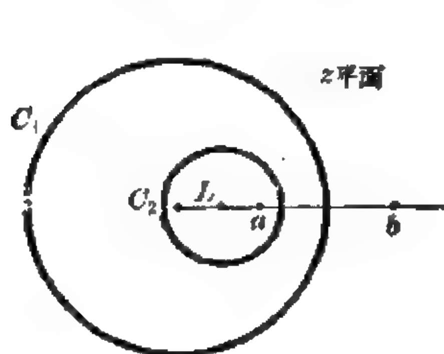


图 93a

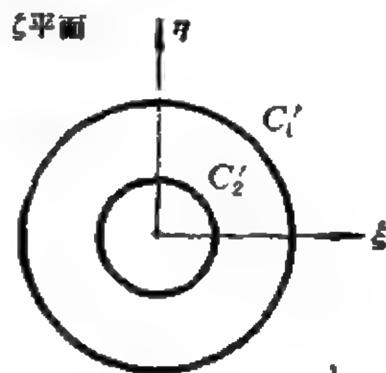


图 93b

取圆 C_1 的圆心为 z 平面的原点，取连心线为 x 轴。把 a 和 b 的坐标分别记作 x_1 和 x_2. 由对称点的定义，得

$$\begin{cases}x_1x_2=R_1^2,\\(x_1-L)(x_2-L)=R_2^2.\end{cases}$$

这两个方程跟上例相同，因而可引用上例。不过考虑到 $L<R_1-R_2$，

$R_1'>R_2'$，演算需适当修改。答案是

$$C=\frac{\varepsilon_0 2\pi}{\ln\left[\frac{R_1^2+R_2^2-L^2}{2R_1R_2}+\sqrt{\left(\frac{R_1^2+R_2^2-L^2}{2R_1R_2}\right)^2-1}\right]}$$

$$=\frac{\varepsilon_0 2\pi}{\operatorname{arc\,ch}[(R_1^2+R_2^2-L^2)/2R_1R_2]}.$$

例 7 实轴上有半圆形突起(图 94a)，圆的半径为 1. 试找一保角变换，把它变为无突起的实轴。

解 这个图象可看作由两段圆弧组成，一个是通过 -1(A 点)，i(B 点)和 $+1$(C 点)的半圆，另一个是通过 $+1$(C 点)，无限远点和 -1(A 点)的圆弧(其实是直线段)。

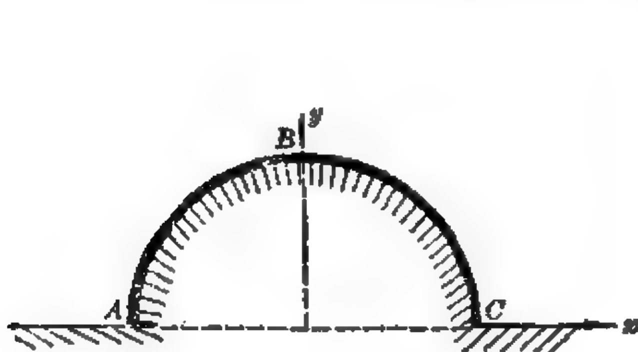


图 94a

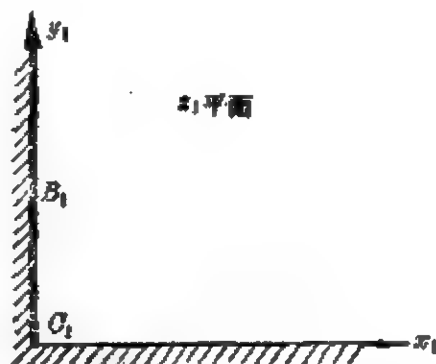


图 94b

分式线性变换

$$z_1=\frac{z-1}{z+1}$$

把两段圆弧的交点 $z=+1$ 变为 $z_1=0$，把另一交点 $z=-1$ 变为 $z_1=\infty$，因而 z 平面上的两段圆弧变为 z_1 平面上通过 0 和∞的圆弧，即通过原点的射线，它们之间的夹角保持为 $\pi/2$(图 94b)。

幂函数

$$z_2=z_1^2$$

又把这两射线变为正负实轴(图 94c)。对应于 z 平面上 $z=-1$

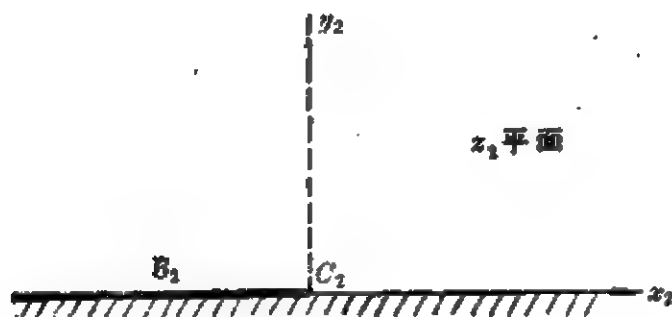


图 94c

(A 点), i(B 点), $+1$(C 点)的各点是 $z_2=\infty$, -1(B_2点), 0(C_2点)。

为了便于跟原来的图象(图 94a)对照,再作分式线性变换

$$\zeta=\frac{az_2+b}{cz_2+d}$$

把 $z_2=\infty$, -1, 0 各点分别变为 $\zeta=-1, 0, +1$ 各点(图 94d)。根据这些点的对应关系,不难确定系数 $a=b=d=-c$,即

$$\zeta=\frac{z_2+1}{-z_2+1}.$$



图 94d

拿图 94d 跟图 94a 对照。半圆形突起已被消除,成为实轴上的 -1 到 $+1$ 的直线段。

总结起来看,从 z 平面到 ζ 平面的变换是

$$\zeta=\frac{z_2+1}{-z_2+1}=\frac{z_1^2+1}{-z_1^2+1}=\frac{(z-1)^2/(z+1)^2+1}{-(z-1)^2/(z+1)^2+1}$$

$$=\frac{(z-1)^2+(z+1)^2}{-(z-1)^2+(z+1)^2}=\frac{z^2+1}{2z}=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right).$$

函数 $\zeta=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$叫作儒阔夫斯基函数。

（五）儒阔夫斯基变换

儒阔夫斯基函数

$$\zeta(z)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{z}{1}\right) \tag{54.7}$$

的实部和虚部分别是

$$\begin{cases}\xi=\frac{1}{2}\left(x+\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\cos\varphi,\\ \eta=\frac{1}{2}\left(y-\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)\sin\varphi.\end{cases}$$

z 平面上的同心圆族$|z|=\rho_0$(图 95a)变为 ζ 平面上的

$$\begin{cases}\xi=\frac{1}{2}\left(\rho_0+\frac{1}{\rho_0}\right)\cos\varphi,\\ \eta=\frac{1}{2}\left(\rho_0-\frac{1}{\rho_0}\right)\sin\varphi.\end{cases}$$

这是参数方程式。消去参数 φ,得

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}=1,$$

其中 $a=\frac{1}{2}\left(\rho_0+\frac{1}{\rho_0}\right)$, $b=\frac{1}{2}\left|\rho_0-\frac{1}{\rho_0}\right|$. 这是椭圆族 (图 95$b$), 长

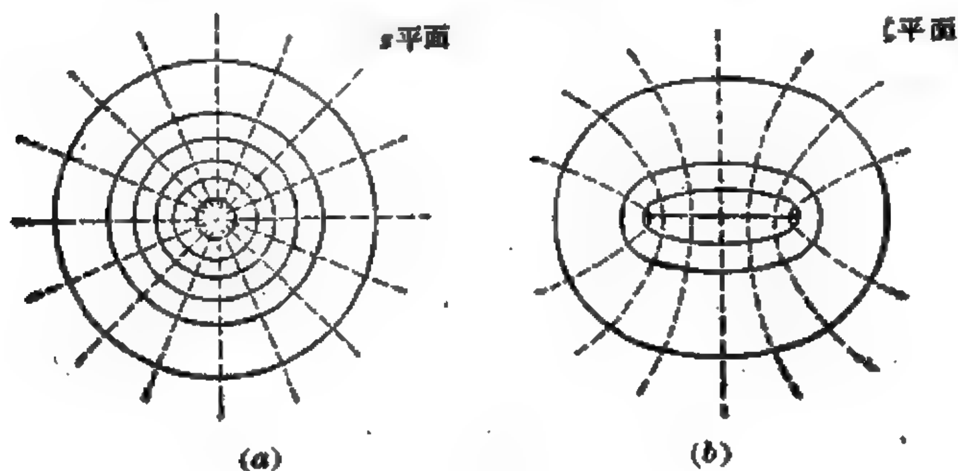


图 95

长、短半轴分别是 a 和 b. $\sqrt{a^2-b^2}=1$，这是说，椭圆族是共焦点的，焦点在 $\zeta=\pm1$.

ρ_0 从 1 开始而无限增大，则 a 和 b 随着无限增大。这样，z 平面单位圆外部变为 ζ 的全平面，只是从 -1 到 $+1$ 沿着实轴有一割线。（例 7 就是把 z 平面单位圆外部的上半部分变为 ζ 平面的上半平面。）

ρ_0 从 1 开始而逼近于零，则 a 和 b 也无限增大。这样，z 平面单位圆内部也变为 ζ 的全平面，从 -1 到 $+1$ 沿着实轴有割线。

z 平面上的射线族 $\arg z=\varphi_0$（图 95a）变为 ζ 平面上的

$$\begin{cases}\xi=\dfrac{1}{2}\left(\rho+\dfrac{1}{\rho}\right)\cos\varphi_0,\\ \eta=\dfrac{1}{2}\left(\rho-\dfrac{1}{\rho}\right)\sin\varphi_0.\end{cases}$$

这是参数方程式。消去参数 ρ，得

$$\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{\eta^2}{b^2}=1,$$

其中 $a=|\cos\varphi_0|$, $b=|\sin\varphi_0|$. 这是双曲线族（图 95b），实和虚半轴分别是 $|\cos\varphi_0|$ 和 $|\sin\varphi_0|$. $\sqrt{a^2+b^2}=1$，这是说，双曲线族是共焦点的，焦点在 $\zeta=\pm1$.

儒阔夫斯基函数把圆变为椭圆，射线变为双曲线，同心圆族变为共焦点椭圆族，共点射线族变为共焦点双曲线族，这是有助于求解椭圆或双曲线边值问题的。

例 8 水流本来是均匀的，流速为 v_0。放进长椭圆柱，柱轴垂直于水流速度方向，横截面的椭圆长轴平行于本来的流速方向。试解这个绕椭圆柱水流问题（图 96a）。

解 绕椭圆柱水流的速度势 u 的问题是定解问题

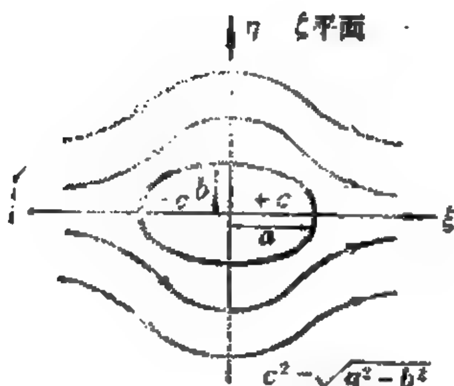


图 96a

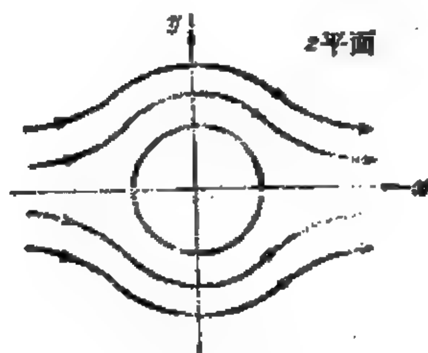


图 96b

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0 \quad (\zeta \text{ 平面}), \\ \lim\limits_{\zeta\to\infty} u = v_0 \xi, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\text{椭圆柱面上}} = 0. \end{cases}$$

利用儒阔夫斯基函数

$$\frac{\zeta}{c} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right),$$

把问题化为绕圆柱水流问题(图 96b)

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0 \quad (z \text{ 平面}), \\ \lim\limits_{z\to\infty} u = \lim\limits_{z\to\infty} v_0 \dfrac{c}{2}\left(\rho + \dfrac{1}{\rho}\right)\cos\varphi = \dfrac{c}{2} v_0 \rho \cos\varphi, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho=(a+b)/c} = 0. \end{cases}$$

绕圆柱水流的解(参看 § 36 习题 27 的答案)是

$$u = \frac{1}{2} c v_0 \rho \cos\varphi + \frac{1}{2} v_0 \frac{(a+b)^2}{c} \frac{1}{\rho} \cos\varphi + \frac{\Gamma}{2\pi}\varphi$$

$$= \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2} c v_0 z + \frac{1}{2} v_0 \frac{(a+b)^2}{c} \frac{1}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z\right),$$

其中 Γ 为任意常数，它代表绕柱的环流量。

回到 ζ 平面，

$$u=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}cv_0\left(\frac{1}{c}\zeta+\frac{1}{c}\sqrt{\zeta^2-1}\right)+\frac{1}{2}v_0\frac{(a+b)^2}{c}\frac{1}{\frac{1}{c}\zeta+\frac{1}{c}\sqrt{\zeta^2-1}}\right.$$

$$\left.+\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\left(\frac{1}{c}\zeta+\frac{1}{c}\sqrt{\zeta^2-1}\right)\right]$$

$$=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}v_0(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})+\frac{1}{2}v_0(a+b)^2(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\right.$$

$$\left.+\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\left(\frac{1}{c}\zeta+\frac{1}{c}\sqrt{\zeta^2-1}\right)\right].$$

这就是绕椭圆柱水流的速度势。环流在图 96b 里没有画出。

既解出速度势 u，就可以计算流速 v 和压强 p. 沿着柱面把 p 积分，可算出水流施于椭圆柱的作用力 F. 这个计算，读者可自己进行或查考流体力学书籍，其结果是

$$F_y=-v_0\Gamma,\ \ F_t=0.$$

这是说，如果没有环流，流水对柱并无作用力。当然，这里还没有把粘滞性所引起的作用力计算进去。

儒阔夫斯基函数还能作出重要的变换，就是把圆变为机翼剖面(图 97)，这可阐述如下。

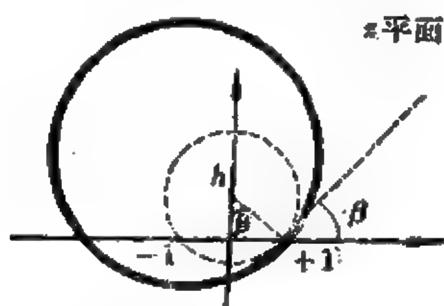


图 97a

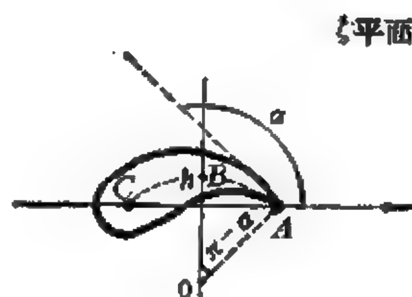


图 97b

首先研究 z 平面上以 ih 为圆心并通过 ± 1 的圆即图 97a 的虚线圆。分式线性变换

$$z_1=\frac{z-1}{z+1}$$

把 z 平面的 $+1$ 和 -1 分别变为 z_1 平面的 0 和 ∞，因而把 z 平面的虚线圆变为通过 0 和 ∞ 的圆，实际上即通过原点 $z_1=0$ 的直线（图 97c）。z 平面的虚线圆在 $z=+1$ 跟实轴夹角为 $\beta=\pi/2-\text{arc tg } h$，而 z 平面的实轴变到 z_1 平面仍为实轴，所以虚线圆在 z_1 平面上的图像（即前述直线）跟实轴夹角亦为 $\beta=\pi/2-\text{arc tg } h$.

再研究 ζ 平面上从 $+1$ 经 ih 到 -1 的圆弧即图 97b 的虚线弧。分式线性变换

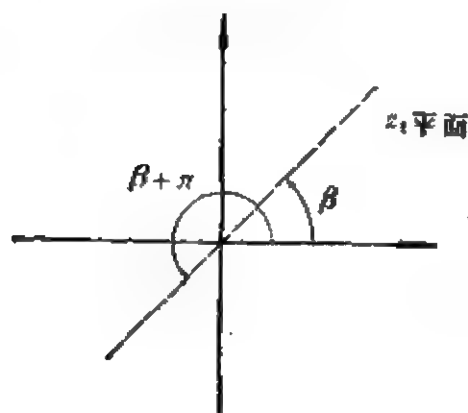


图 97c

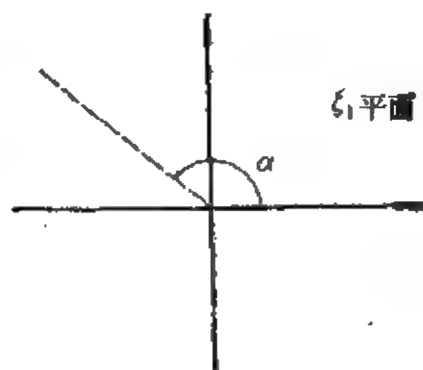


图 97d

$$\zeta_1=\frac{\zeta-1}{\zeta+1}$$

把 ζ 平面的 $+1$ 和 -1 分别变为 ζ_1 平面的 0 和 ∞，因而把 ζ 平面的虚线弧变到从原点 $\zeta_1=0$ 指向 $\zeta_1=\infty$ 的射线，它跟实轴夹角应等于 ζ 平面虚线弧在 $+1$ 跟实轴的夹角 α. 现在计算 α. 在 ζ 平面取虚线弧的圆心 O，联 AO。一方面，$\angle BOA=\pi-\alpha$；另一方面，$\angle BOA$ 是 AB 弧所张圆心角，它等于 $2\times AB$ 弧所张圆周角，即 AC 弧所张圆周角，即 $2\text{arc tg } h$. 这样，$\pi-\alpha=2\text{arc tg } h$，即

$$\alpha=\pi-2\text{arc tg } h=2\beta.$$

显然，幂函数变换

$$\zeta_1=z_1^2$$

把图 97c 的直线变为图 97d 的射线的来回。

总结起来，z 平面的虚线圆变为 ζ 平面的虚线弧的来回，这个变换是 $\zeta_1=z_1^2$，即

$$\frac{\zeta-1}{\zeta+1}=\frac{(z-1)^2}{(z+1)^2},$$

即

$$\zeta=\frac{(z+1)^2+(z-1)^2}{(z+1)^2-(z-1)^2}=\frac{z^2+1}{2z}=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),$$

正是儒阔夫斯基变换。

既然 z 平面的虚线圆变为 ζ 平面的虚线弧，那么，z 平面上凡是跟虚线圆切于 $+1$ 的圆（图 97a 实线圆）变到 ζ 平面应跟虚线来回弧段相切（图 97b 实线描出），就成为机翼剖面图。儒阔夫斯基提出的求各种机翼剖面（儒阔夫斯基剖面）的方法就以此为基础。

（六）施瓦兹-克利斯多菲变换

在不少情况下，平面场涉及多角形区域。现在研究多角形区域和上半平面之间的变换。

设在 z 平面有 n 角形（图 98a）。沿着多角形周界的正方向行进（就是说，多角形区域始终在左侧），在各个顶点转过的角即是外角 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n$. 这些角以逆时针的为正，顺时针的为负。行进一周，总共转过的角应为 2π，因而 $\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n=2\pi$.

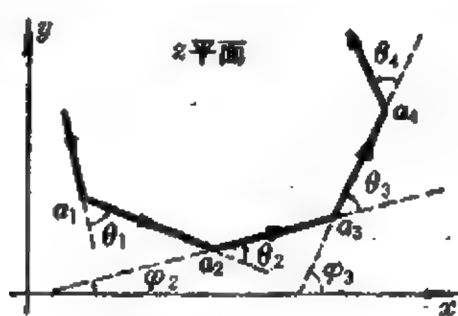


图 98a

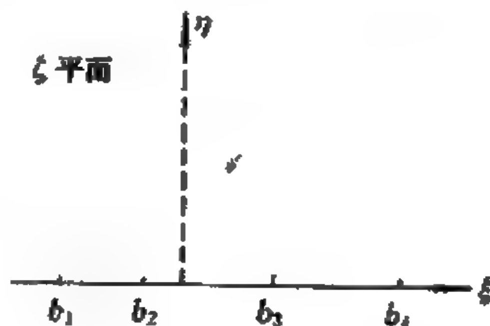


图 98b

试把这多角形变为 ζ 的上半平面，多角形的顶点 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 分别变为 ζ 平面实轴上的 $b_1,b_2,\cdots,b_n$。

z 平面上多角形的各个顶角，变换到 ζ 平面上全成为 π，并不具有保角的性质，可见 $\zeta'(z)$ 在这些点为零或 ∞。现在研究 $\zeta'(z)$ 或 $z'(\zeta)$ 在这些点的性质。以 a_3 和 b_3 作为代表而加以考察。试在其前后各取一小段，由(53.12)知

$$\varphi_2 = \arg\frac{dz}{d\zeta}\bigg|_{\zeta=b_3-0}, \quad \varphi_3 = \arg\frac{dz}{d\zeta}\bigg|_{\zeta=b_3+0}.$$

因此，

$$\theta_3 = \varphi_3 - \varphi_2 = \arg\frac{dz}{d\zeta}\bigg|_{\zeta=b_3+0} - \arg\frac{dz}{d\zeta}\bigg|_{\zeta=b_3-0}.$$

这是说，当 ζ 经过 b_3 的时候，$z'(\zeta)$ 的辐角有一跃变，其跃变为 θ_3。另一方面，从图 98b 明显看出，当 ζ 经过 b_3 的时候，函数 $\zeta-b_3$ 的辐角也有一跃变，其跃变为 $-\pi$. 因此，

$$z'(\zeta) \sim A(\zeta-b_3)^{-\theta_3/\pi} \ (于\ \zeta \sim b_3). \tag{54.8}$$

考虑到所有的顶点，可以断定

$$z'(\zeta) = A(\zeta-b_1)^{-\theta_1/\pi}(\zeta-b_2)^{-\theta_2/\pi}\cdots(\zeta-b_n)^{-\theta_n/\pi}. \tag{54.9}$$

积分一次，

$$z = z_0 + A\int(\zeta-b_1)^{-\theta_1/\pi}(\zeta-b_2)^{-\theta_2/\pi}\cdots(\zeta-b_n)^{-\theta_n/\pi}d\zeta. \tag{54.10}$$

(54.9)即(54.10)叫作**施瓦兹-克利斯多菲变换**。

如果某个 b_k，比方说 b_1，是无穷远点，相应的(54.8)是

$$z'(\zeta) \sim A\zeta^{\theta_1/\pi} \ (于\ \zeta \sim b_1 = \infty). \tag{54.11}$$

而(54.9)右边除了跟 b_1 有关的那个因子以外的乘积

$$A(\zeta-b_2)^{-\theta_2/\pi}(\zeta-b_3)^{-\theta_3/\pi}\cdots(\zeta-b_n)^{-\theta_n/\pi}$$

$$\sim A\zeta^{-(\theta_2+\theta_3+\cdots+\theta_n)/\pi} = A\zeta^{-(2\pi-\theta_1)/\pi} = A\zeta^{(\theta_1-2\pi)/\pi} \ (于\ \zeta \sim b_1 = \infty).$$

辐角 $\theta_1 - 2\pi$ 与 θ_1 本来是一回事，所以上式已经满足(54.11)的要求。这样说来，如 $b_1 = \infty$，则(54.9)里的因子 $(\zeta-b_1)^{-\theta_1/\pi}$ 应略去，

$$z'(z) = A(\zeta-b_2)^{-\theta_2/\pi}(\zeta-b_3)^{-\theta_3/\pi}\cdots(\zeta-b_n)^{-\theta_n/\pi}. \tag{54.12}$$

积分一次，就得到这种情况下的施瓦兹-克利斯多菲变换

$$z=z_0+A\int(\zeta-b_2)^{-\theta_2/\pi}(\zeta-b_3)^{-\theta_3/\pi}\cdots(\zeta-b_n)^{-\theta_n/\pi}d\zeta. \quad (54.13)$$

施瓦兹-克利斯多菲变换(54.10)可看作前后相继的两个变换

$$z_1=\int(\zeta-b_1)^{-\theta_1/\pi}(\zeta-b_2)^{-\theta_2/\pi}\cdots(\zeta-b_n)^{-\theta_n/\pi}d\zeta,$$

$$z=z_0+Az_1.$$

前一变换把 ζ 的上半平面变为 z_1 平面上的多角形，其外角为 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n$，各个顶点则是由 ζ 平面实轴上的点 $b_1, b_2, \cdots b_n$ 变换过来的。尽管这个多角形的各个外角数值是对的，却不见得就是我们所要的多角形。后一变换是线性变换，它把前一变换所得的多角形变为其相似形。但我们所要的多角形跟前一变换所得多角形并不见得相似，如果 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是任意指定的话。不过，三角形只要三个顶角相同，必是相似形。因此，对于三角形，施瓦兹-克利斯多菲变换的 b_1, b_2 和 b_3 可以任意指定。对于 $n>3$ 的多角形，不能任意指定 $b_1, b_2, \cdots, b_n$. 多角形任意三个顶点可联成三角形，所以 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 之中可以指定任意三个的数值，其余的则不可指定，它们必须在写出施瓦兹-克利斯多菲变换公式之后根据顶点的对应关系加以确定。

例9 用施瓦兹-克利斯多菲变换求解例2(图 88a)。

解 图 88a 的水流所充满的区域可说是“四角形”$a_1a_2a_3a_4$，a_1 在 $z=\infty$，a_2 在 $z=0$，a_3 在 $z=ih$，a_4 在 $z=0$，偏转角 $\theta_2=+\pi/2$，$\theta_3=-\pi$，$\theta_4=+\pi/2$. 我们希望把这区域变为 ζ 的上半平面(图 88d). 指定 b_1 在 $\zeta=\infty$，b_2 在 $\zeta=-h$，b_3 在 $\zeta=0$. 由于对称性，b_4 必在 $\zeta=+h$.

应用施瓦兹-克利斯多菲变换(54.13)，

$$z=z_0+A\int(\zeta+h)^{-1/2}\zeta^{+1}(\zeta-h)^{-1/2}d\zeta=z_0+A\int\frac{\zeta d\zeta}{\sqrt{\zeta^2-h^2}}$$

$$=z_0+2A\sqrt{\zeta^2-h^2}.$$

常数 z_0 和 $2A$ 还有待确定。

由 a_2 和 b_2 的对应，$0=z_0+2A0$，即 $z_0=0$。又由 a_3 和 b_3 的对应，$ih=z_0+2Aih$，即 $2A=1$。这样，需要进行的变换是

$$z^2=\zeta^2-h^2.$$

例 2 的三个相继的变换（幂函数、平动、根式）的“积”正是这个变换。

ζ 平面上的速度势 $u=C\zeta=\mathrm{Re}(c\zeta)$。回到原来的自变数，

$$u=\mathrm{Re}\,(C\sqrt{z^2+h^2})$$
$$=C\sqrt{\frac{(x^2-y^2+h^2)+\sqrt{(x^2-y^2+h^2)^2+4x^2y^2}}{2}},$$

C 是远离薄片地方的流速。

例 10 研究平行板电容器的边缘效应。

解 研究某一端的边缘效应，不妨把另一端看作伸展到无限远。

电容器的静电场所占据的空间可看作图 99a 的“四角形” $ABCD$（AB 和 BC 是重合的，即电容器的极板；CD 和 DA 也是重合的，即电容器的另一极板）。在顶点 B，C 和 D 的偏转角分别是 $-\pi$，$+\pi$ 和 $-\pi$.

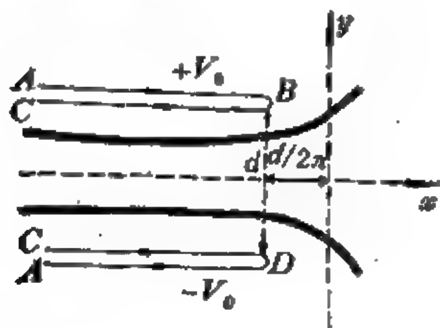


图 99a

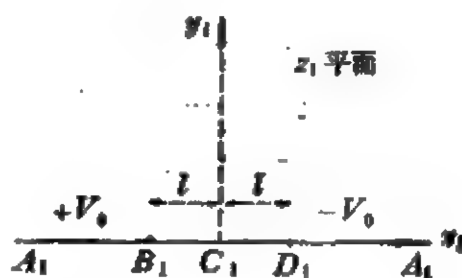


图 99b

先把这四角形变为 z_1 的上半平面（图 99b）。指定 A_1 在 $z_1=\infty$，B_1 在 $z_1=-1$，C_1 在 $z_1=0$。由于对称性，D_1 必在 $z_1=+1$.

应用施瓦兹-克利斯多菲变换(54.13)，

$$z=z_0+A\int(z_1+1)^{+1}z_1^{-1}(z_1-1)^{+1}dz_1=z_0+A\int\frac{z_1^2-1}{z_1}dz_1$$

$$=z_0+A\int\left(z_1-\frac{1}{z_1}\right)dz_1=z_0+\frac{1}{2}Az_1^2-A\ln z_1.$$

由于 B 和 B_1 对应，D 和 D_1 对应，

$$\begin{cases}-\dfrac{d}{2\pi}+i\dfrac{d}{2}=z_0+\dfrac{A}{2}-Ai\pi, \\ -\dfrac{d}{2\pi}-i\dfrac{d}{2}=z_0+\dfrac{A}{2}.\end{cases}$$

从这组联立代数方程解得

$$A=-\frac{d}{\pi},\quad z_0=-i\frac{d}{2}.$$

这样，z 平面和 z_1 平面之间的变换是

$$z=-i\frac{d}{2}-\frac{d}{2\pi}z_1^2+\frac{d}{\pi}\ln z_1. \tag{54.14}$$

把平行板电容器两极板的电势记作 $+v_0$ 和 $-v_0$，则 z_1 平面的正实轴和负实轴分别具有电势 $-v_0$ 和 $+v_0$，这问题仍然不便于求解。利用指数函数

$$z_2=2\ln z_1, \tag{54.15}$$

可把 z_1 平面的正、负实轴变为 z_2 平面上的两条平行线 $y=0$ 和 $y=2\pi$（图 99c），这代表两方都伸展到无限远的平板电容器。为了使图形更对称，又作平动得图 99d.

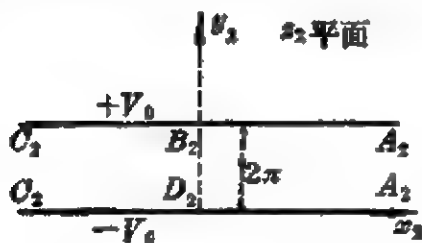


图 99c

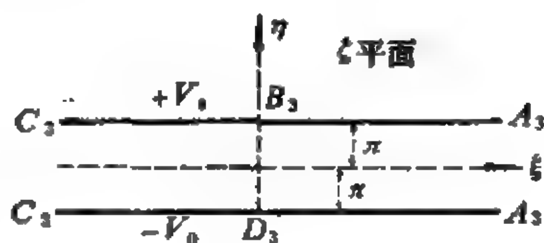


图 99d

$$\zeta=z_2-i\pi, \tag{54.16}$$

综合(54.14)—(54.16)，从 z 平面到 ζ 平面的变换是

$$z=-i\frac{d}{2}-e^{z_1}\frac{d}{2\pi}+z_2\frac{d}{2\pi}=-i\frac{d}{2}-e^{(\zeta+i\pi)}\frac{d}{2\pi}+(\zeta+i\pi)\frac{d}{2\pi}$$

$$=(e^{\zeta}+\zeta)\frac{d}{2\pi}. \tag{54.17}$$

ζ 平面的平行板电容器的静电场中的电势 v 显然是

$$v=\frac{v_0}{\pi}\eta=\operatorname{Im}\left(\frac{v_0}{\pi}\zeta\right),$$

复势 $w=u+iv=\frac{v_0}{\pi}\zeta$. 以此代入(54.17)得

$$z=\left(e^{\pi w/v_0}+\frac{\pi}{v_0}w\right)\frac{d}{2\pi}. \tag{54.18}$$

这里，复势 w 作为坐标 z 的函数是以隐函数的形式表出的。

考察电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的大小 E，

$$E=\sqrt{E_x^2+E_y^2}=\sqrt{\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(-\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2}.$$

根据(4.1)和(4.3)，这是说，$E=|dw/dz|$. 因此，

$$E=\frac{1}{\left|\frac{dz}{dw}\right|}=\frac{1}{\left|e^{\pi w/v_0}+1\right|}\frac{2v_0}{d}. \tag{54.19}$$

先看 z 平面的电容器深处，即远离边缘的地方，亦即 $x\to-\infty$ 而 $|y|<d/2$. 这对应于 ζ 平面的 $\xi\to-\infty$ 而 $|\eta|<\pi$，相应的复势 $w\to-\infty+i\frac{v_0}{\pi}\eta$. 代入(54.19)，

$$E=\frac{1}{|0+1|}\frac{2v_0}{d}=\frac{2v_0}{d},$$

这正是通常忽略边缘效应所得的场强。

再看靠近边缘 B 和 D 的地方。这对应于 ζ 平面上靠近 B_3 和 D_3 的地方，即 $\xi\approx0$ 而 $\eta\approx\pm\pi$，相应的复势 $w\approx\pm iv_0$. 代入(54.19)，

$$E \to \frac{1}{|-1+1|}\frac{2v_0}{d} = \infty.$$

在平板电容器边缘，极板的曲率半径为无限大，尖端效应极为强烈，场强 E 亦表现为无限大。

研究电击穿问题时，必须注意边缘效应。当电容器中部的场强还远远低于击穿电压时，电容器边缘的场强却已达到击穿电压从而把电容器两极板间的电介质击穿。

为更细致地考察场强在空间中的分布情况，需要把(54.19)写得更具体一些，

$$E = \frac{1}{|e^{\pi u/v_0 + i\pi v/v_0}+1|}\frac{2v_0}{d} = \frac{1}{\left|e^{\pi u/v_0}\left(\cos\frac{\pi v}{v_0}+i\sin\frac{\pi v}{v_0}\right)+1\right|}\frac{2v_0}{d}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{e^{2\pi u/v_0}+2e^{\pi u/v_0}\cos\frac{\pi v}{v_0}+1}}\frac{2v_0}{d}. \tag{54.20}$$

考察场强的大小，需着重考察根号下的式子

$$e^{2\pi u/v_0}+2e^{\pi u/v_0}\cos\frac{\pi v}{v_0}+1. \tag{54.21}$$

现在研究沿着一定的等势线(v=常数)的场强分布。为此，研究对于给定的 v 和 u，(54.21)式的值如何变化。按照通常研究极值的方法，很容易得到如下结论：随着 u 的增大，

$$\begin{cases} \text{如}|v|>v_0/2, & \text{(54.21)达到极小值后又上升;} \\ \text{如}|v|\leqslant v_0/2, & \text{(54.21)单调上升，从而(54.20)单调下降。} \end{cases}$$

这样，如果把电容器极板做成图 99a 粗线所示形状 ($v=\pm v_0/2$)，那么，场强从电容器中部向边缘单调下降，这就保证了不致由于边缘效应而引起击穿。这种电容器叫作洛果夫斯基电容器。

例11 宽度为 b 的两条导体薄带，平行地放置在同一平面里，相近的两边之间的间隔为 $2a$。试求每单位长度的电容量。

解 取横截面。这两条薄带的截口是从 $-(a+b)$ 到 $-a$ 和

从 a 到 $a+b$ 的两段直线(图 100a)。作变换

$$\zeta_1=\frac{1}{a}\zeta,$$

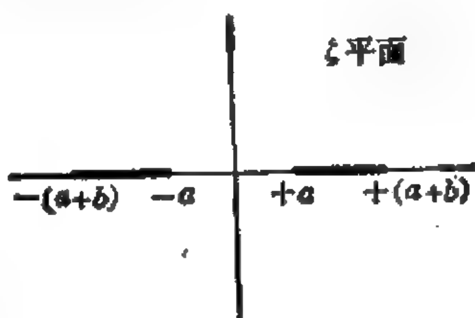


图 100a

两条薄带的截口变为 ζ_1 平面上的直线段 b_1b_2 和 b_3b_4(图 100b),图中的 $k=a/(a+b)<1$。这样,b_1b_2 和 b_3b_4 各为等势线,b_2b_3 和 $b_4\infty b_1$ 则是电力线。

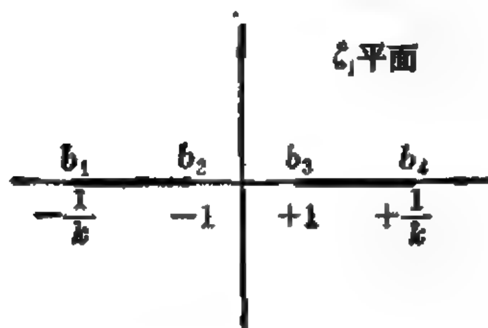


图 100b

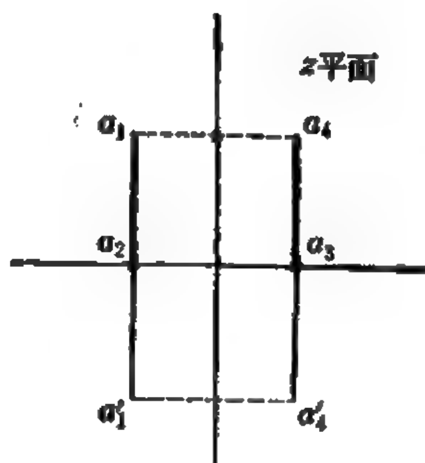


图 100c

利用施瓦兹-克利斯多菲变换(54.13),可把 ζ_1 的上半平面变为 z 平面的四角形 $a_1a_2a_3a_4$ 的内部。在四角形的每个顶点,偏转角都是 $+\pi/2$。因此,

$$z=z_0+A\int\left(\zeta_1+\frac{1}{k}\right)^{-\frac{1}{2}}(\zeta_1+1)^{-\frac{1}{2}}(\zeta_1-1)^{-\frac{1}{2}}\left(\zeta_1-\frac{1}{k}\right)^{-\frac{1}{2}}d\zeta$$

$$=z_0+Ak\int\frac{d\zeta_1}{\sqrt{(1-\zeta_1^2)(1-k^2\zeta_1^2)}}.$$

常数 z_0 和 A 取决于四角形的大小和方位。这里,我们对于四角形的大小和方位,并未提出特定的要求,不妨取 $z_0=0$, $Ak=1$。于是

$$z=\int_0^{\zeta_1}\frac{d\zeta_1}{\sqrt{(1-\zeta_1^2)(1-k^2\zeta_1^2)}}. \tag{54.22}$$

这个积分不能用初等函数表出，它叫作第一类椭圆积分。椭圆积分的数值有表格可查，这种表格在普通的数学手册里都能找到。椭圆积分的数值也可表为级数

$$\int_0^{\zeta_1}\frac{d\zeta_1}{\sqrt{(1-\zeta_1^2)(1-k^2\zeta_1^2)}}$$

$$=\frac{2}{\pi}K\arcsin\zeta_1-\zeta_1\sqrt{1-\zeta_1^2}\left[\frac{1\cdot1}{2\cdot1}k^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}A_4k^4+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}A_6k^6+\cdots\right], \tag{54.23}$$

其中K见下面的(54.24)式，$A_4=\frac{1}{4}\zeta_1^2+\frac{3}{2\cdot4}$，$A_6=\frac{1}{6}\zeta_1^4+\frac{5}{6\cdot4}\zeta_1^2+\frac{5\cdot3}{6\cdot4\cdot2}$，$A_8=\frac{1}{8}\zeta_1^6+\frac{7}{8\cdot6}\zeta_1^4+\frac{7\cdot5}{8\cdot6\cdot4}\zeta_1^2+\frac{7\cdot5\cdot3}{8\cdot6\cdot4\cdot2}$，…。

现在确定z平面上a_1,a_2,a_3和a_4的坐标。先看a_3，它对应于ζ_1平面的b_3即$\zeta_1=+1$. 以$\zeta_1=+1$代入(54.22)，得

$$z=\int_0^1\frac{d\zeta_1}{\sqrt{(1-\zeta_1^2)(1-k^2\zeta_1^2)}}.$$

这叫作第一类完全椭圆积分，通常记作$K(k)$. $K(k)$的数值在椭圆积分表中可以查出，或者用下列级数表示

$$K(k)=\frac{\pi}{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2k^4+\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)^2k^6+\cdots\right]. \tag{54.24}$$

这样，a_3的坐标是$z=K(k)$. 同理，a_2的坐标是$z=-K(k)$. 再看a_4，它对应于ζ_1平面的b_4即$\zeta_1=1/k$. 以$\zeta_1=1/k$代入(54.22)，得

$$z=\int_0^{1/k}\frac{d\zeta_1}{\sqrt{(1-\zeta_1^2)(1-k^2\zeta_1^2)}}=K(k)+\int_1^{1/k}\frac{d\zeta_1}{\sqrt{(1-\zeta_1^2)(1-k^2\zeta_1^2)}}.$$

在最后那个积分中，作积分变数的代换

$$\zeta_1=\frac{1}{\sqrt{1-k'^2t^2}} \qquad (k'^2=1-k^2),$$

则

$$z=K(k)\pm i\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}}=K(k)+iK(k'). \quad (54.25)$$

在 ± 号中取 + 号，即得 a_4 的坐标 $z=K(k)+iK(k')$. 通常还把 $K(k')$ 记作 $K'(k)$，所以 a_4 的坐标是 $z=K+iK'$. 同理，a_1 的坐标是 $z=-K+iK'$.

到这里，我们已把 ζ_1 的上半平面变为 z 平面的四角形 $a_1a_2a_3a_4$ 的内部，并且确定了四个顶点的坐标。

由于对称性，ζ_1 的下半平面当然变为 z 平面的四角形 $a_1'a_2a_3a_4'$ 的内部，而 a_4' 的坐标可在 (54.25) 的 ± 号中取 − 号得到，即 $z=K-iK'$. 同理，a_1' 的坐标是 $z=-K-iK'$.

这样，ζ_1 全平面上的静电场变为 z 平面上 $a_1a_1'a_4'a_4$ 四角形的内部。a_1a_1' 和 a_4a_4' 是等势线，a_1a_4 和 $a_1'a_4'$ 是电力线。z 平面的图象是平行板电容器(注意这里没有边缘效应)，极板宽度为 $2K'$，极板之间距离为 $2K$，因而每单位长度的电容量

$$C=\frac{\varepsilon_0 2K'}{2K}=\frac{\varepsilon_0 K(k')}{K(k)}=\frac{\varepsilon_0 K\left(\dfrac{\sqrt{(a+b)^2-a^2}}{a+b}\right)}{K\left(\dfrac{a}{a+b}\right)},$$

这也就是原来那两条薄带每单位长度的电容量。式中 $K(k)$ 是第一类完全椭圆积分，它的数值需查椭圆积分数值表或用级数 (54.24) 计算。

习 题

1. 例 1 的二面角的二等分面上有一带电细导线，平行于二面角的顶角线，相距为 a，导线每单位长度带电量为 Q. 试求电势分布。

2．接地甚长空心金属圆柱半径为 a，柱内有细导线，平行于柱轴，相距 b．导线每单位长度带电量为 Q．试求圆柱内电势分布。

3．甚长金属圆柱的轴平行于甚大金属平板，两者相距 b．平板接地。圆柱半径为 a．试求每单位长度的电容量。

4．甚大金属平面上有柱形隆起，其横截面为弓形。弓形在 0 和 a 之间，弓形的弧的半径为 a．求解带电后的静电场。

5．长金属柱，其横截面由两段圆弧围成，这两段圆弧是相等的，其半径为 a，交点在 0 和 a．求解金属柱带电后的周围静电场。

6．试把下列区域保角变换为圆。

(1) 弓形 $\text{Im}z\geqslant 1$，$|z|\leqslant 2$，　(2) 圆 $|z|=2$ 外，除去第一象限．

(3) 两个相切的圆 $|z|\leqslant 2$ 和 $|z-3|\leqslant 1$ 以外的区域。

(4) 圆 $|z|\leqslant 3$ 外，除去突起 $\begin{cases}\text{Im}z=0,\\3\leqslant\text{Re}z\leqslant 4.\end{cases}$

(5) 圆 $|z|\leqslant 1$ 内，带有割线 $\begin{cases}\text{Im}z=0,\\0\leqslant\text{Re}z\leqslant 1.\end{cases}$

(6) 心脏线的内部 $|z|\leqslant\cos^2\left[\frac{1}{2}\arg z\right]$.

(7) 双纽线一支 $|z|\leqslant\sqrt{\cos[2\arg z]}$.

7．研究甚长带电导体薄带周围的静电场，带宽为 $2a$.

8．研究甚长带电椭圆导体柱周围的静电场，椭圆半长轴为 a，半短轴为 b.

9．两个椭圆柱构成柱形电容器，横截面是两个共焦点椭圆，半长轴分别是 a_1 和 a_2，半短轴分别是 b_1 和 b_2．试求每单位长度的电容量。

10．求解二维稳恒水流通过宽度为 $2a$ 的闸门的情形。

11．图 101 是六角"星"，六个臂彼此相隔 60°，各自长度为 1。试把"星"



图 101

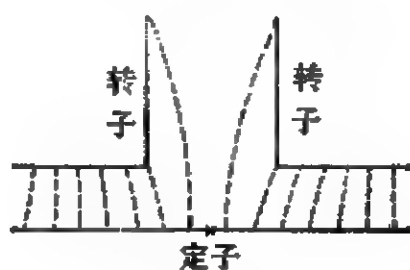


图 102

的外部变为ζ平面的单位圆外部。

[提示：$z_1=z^3$，$\zeta_1=\zeta^3$，再找z_1和ζ_1之间的变换。]

12．研究电机的转子和定子之间(图 102)的磁场。求最大磁场和最小磁场之比。

13．求z平面的半无界长条$0<\mathrm{Re}z<a, \mathrm{Im}z>0$上的调和函数，边界条件是$u|_{x=0}=0$，$u|_{x=a}=0$，$u|_{y=0}=u_0$。

14．把可变电容器中的静电场所占空间(图 103)变为上半平面。

15．研究回旋加速器D形盒(图 104)的静电场。可把D形盒的侧壁当作在无限远。

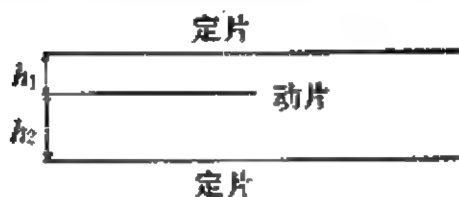


图 103



图 104

§55. 三维空间中的保角变换

(一) 应用于锥形区域的保角变换

有些问题具有锥形边界(例如图 105 的共轴双锥天线)，而且在取锥顶为球坐标的极点的条件下，问题跟球坐标r无关，只跟球坐标θ和φ有关。问题实际上还是二维的，但这二维空间不是平面而是球面，θ和φ就是这球面上的坐标。

球坐标系的拉普拉斯方程(40.1)，如果跟r无关，就成为

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0。\qquad(55.1)$$

令

$$\rho=\mathrm{tg}(\theta/2),\qquad(55.2)$$

则

$$d\rho=\frac{1}{2}\sec^2\frac{\theta}{2}d\theta,\quad \frac{\partial}{\partial\theta}=\frac{d\rho}{d\theta}\frac{\partial}{\partial\rho}=\frac{1}{2}\sec^2\frac{\theta}{2}\frac{\partial}{\partial\rho},\qquad(55.3)$$

从而

$$\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}=\left(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)\frac{1}{2}\sec^2\frac{\theta}{2}\frac{\partial}{\partial\rho}=\rho\frac{\partial}{\partial\rho},$$

方程(55.1)成为

$$\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0.\qquad(55.4)$$

(55.4)正是平面极坐标系的拉普拉斯方程。这样，代换(55.2)把球面上的拉普拉斯方程变为平面上的拉普拉斯方程。

代换(55.2)是**保角变换**。事实上，在 θ,φ 球面上和 ρ,φ 平面上各取一小段相应的弧，弧长

$$(ds)^2=r^2(d\theta)^2+r^2\sin^2\theta(d\varphi)^2,$$

$$\begin{aligned}(ds_1)^2&=(d\rho)^2+\rho^2(d\varphi)^2\\&=\frac{1}{4}\sec^4\frac{\theta}{2}(d\theta)^2+\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}(d\varphi)^2\\&=\frac{1}{4}\sec^4\frac{\theta}{2}\left[(d\theta)^2+4\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}\cos^4\frac{\theta}{2}(d\varphi)^2\right]\\&=\frac{1}{4}\sec^4\frac{\theta}{2}\left[(d\theta)^2+4\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}(d\varphi)^2\right]\\&=\left(\frac{1}{4r^2}\sec^4\frac{\theta}{2}\right)(ds)^2,\end{aligned}$$

即

$$ds_1=\left(\frac{1}{2r}\sec^2\frac{\theta}{2}\right)ds.\qquad(55.5)$$

通过同一点的微小弧段以相等的放大率$\left(\sec^2\frac{\theta}{2}\right)\Big/2r$ 被放大，因而微小三角形必变为相似三角形，从而交角保持不变。(当然，在不同地点的放大率$\left(\sec^2\frac{\theta}{2}\right)\Big/2r$ 并不相同，几何图象的形状可以

大大改观。）

代换(55.2)也可用来求解球面上的泊松方程

$$\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=f(\theta,\varphi) \qquad (55.6)$$

的边值问题。事实上，经过代换，(55.6)变为

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=\left(4r^2\cos^4\frac{\theta}{2}\right)f, \qquad (55.7)$$

仍然是泊松方程，只是"源"的强度（对于静电场来说，即电荷密度）变为 $4r^2\cos^4(\theta/2)$倍。

(55.5)指出线段长度放大率为$\left(\sec^2\frac{\theta}{2}\right)\Big/2r$，因此，面积放大率为$\left(\sec^4\frac{\theta}{2}\right)\Big/4r^2$. 这样，球面上某一区域里的电量变到平面上相应区域上，倍数是$\left(4r^2\cos^4\frac{\theta}{2}\right)\left(\sec^4\frac{\theta}{2}\right)\Big/4r^2$即 1，亦即两者相等。所以，电容器变换前后的电容量相等。

例 图 105a 是共轴双锥天线。试求每单位长度的电容量 C.

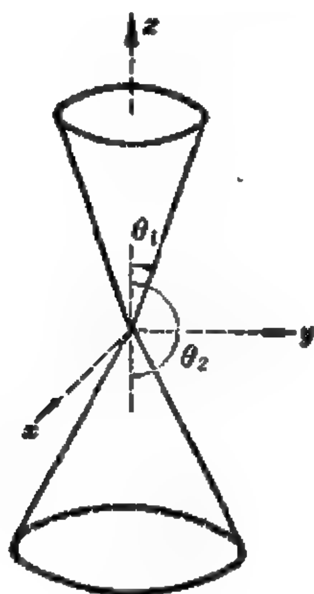


图 105a

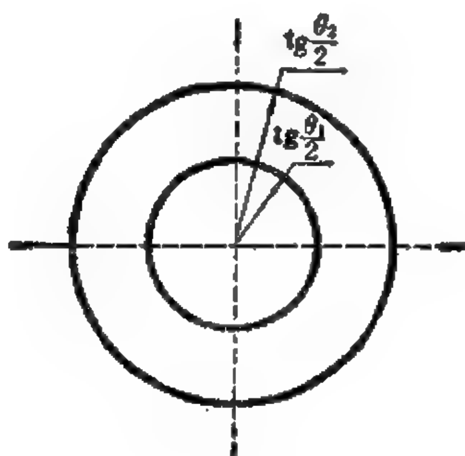


图 105b

解 用代换(55.2)，图105*a*的两个锥面变为图105*b*的两个同心圆，这代表两个同心圆柱，其半径分别是 $\operatorname{tg}(\theta_1/2)$ 和 $\operatorname{tg}(\theta_2/2)$。

同心圆柱每单位长度的电容量 $C=\varepsilon_0 2\pi/\ln(R_2/R_1)$，所以共轴双锥天线每单位长度的电容量

$$C=\frac{\varepsilon_0 2\pi}{\ln[\operatorname{tg}(\theta_2/2)/\operatorname{tg}(\theta_1/2)]}.$$

（二）逆矢径变换

开耳芬研究了三维空间的逆矢径变换。依照刘维的说法，这是三维空间中唯一有意义的保角变换。

取某个半径为 R 的球，把它的球心记作 O。任意给定一点 M，它跟球心 O 相距 r。在 OM 联线上找点 M_1，它跟球心 O 的距离 $r_1=R^2/r$。点 M_1 叫作点 M 的**逆矢径变换**，球心 O 叫作逆矢径变换的**反演中心**。

把反演中心取作球坐标的极点，如点 M 的坐标为 (r,θ,φ)，则逆矢径变换把点 M 变为点 $M_1(r_1,\theta,\varphi)$，其中

$$r_1=\frac{R^2}{r}. \tag{55.8}$$

由(55.8)知

$$\begin{cases} dr_1=-\dfrac{R^2}{r^2}dr, \\ \dfrac{\partial}{\partial r}=\dfrac{dr_1}{dr}\dfrac{\partial}{\partial r_1}=-\dfrac{R^2}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r_1}=-\dfrac{r_1^2}{R^2}\dfrac{\partial}{\partial r_1}. \end{cases} \tag{55.9}$$

设 $u(r,\theta,\varphi)$ 是调和函数，

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0,$$

即

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2}+\frac{1}{r^3\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial(ru)}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^3\sin^2\theta}\frac{\partial^2(ru)}{\partial\varphi^2}=0.$$

利用(55.9)，上式可改写为

$$\frac{1}{rR^4}r_1^2\frac{\partial}{\partial r_1}\left(r_1^2\frac{\partial(ru)}{\partial r_1}\right)+\frac{1}{r^3\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial(ru)}{\partial\theta}\right)$$

$$+\frac{1}{r^3\sin^2\theta}\frac{\partial^2(ru)}{\partial\varphi^2}=0,$$

即

$$\frac{R^4}{r^5}\left[\frac{1}{r_1^2}\frac{\partial}{\partial r_1}\left(r_1^2\frac{\partial(ru)}{\partial r_1}\right)+\frac{1}{r_1^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial(ru)}{\partial\theta}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{r_1^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2(ru)}{\partial\varphi^2}\right]=0. \tag{55.10}$$

这是说，如果 $u(r,\theta,\varphi)$ 是 r,θ,φ 空间中的调和函数，则

$$v(r_1,\theta,\varphi)=ru(r,\theta,\varphi)=\frac{R^2}{r_1}u(r,\theta,\varphi) \tag{55.11}$$

是 r_1,θ,φ 空间中的调和函数。

这样，为了在 r,θ,φ 空间中求解**三维拉普拉斯方程**的边界值问题，不妨作逆矢径变换，把 r,θ,φ 空间中给定的区域变为 r_1,θ,φ 空间中的相应区域，并把 r,θ,φ 空间中的边界值按(55.11)乘以 r 而加于 r_1,θ,φ 空间相应的边界上，如果反演中心选得适当，r_1,θ,φ 空间中的边界值问题能够比较容易地解出，求得 $v(r_1,\theta,\varphi)$，则 $u(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{r}v(R^2/r,\theta,\varphi)$ 就是原问题的解。

逆矢径变换也有可能用以求解**三维泊松方程**的边界值问题。参照(55.10)，在逆矢径变换下，r,θ,φ 空间的三维泊松方程

$$\Delta u=f$$

变为 r_1,θ,φ 空间的泊松方程

$$\Delta v=\frac{r^5}{R^4}f.$$

注意，f 变为$(r^5/R^4)f$.

逆矢径变换也是保角变换。事实上，在 r, θ, φ 空间和 r_1, θ, φ 空间各取一小段相应的弧，弧长

$$(ds)^2=(dr)^2+r^2(d\theta)^2+r^2\sin^2\theta(d\varphi)^2,$$

$$\begin{aligned}(ds_1)^2&=(dr_1)^2+r_1^2(d\theta)^2+r_1^2\sin^2\theta(d\varphi)^2\\&=\frac{R^4}{r^4}(dr)^2+\frac{R^4}{r^4}r^2(d\theta)^2+\frac{R^4}{r^4}r^2\sin^2\theta(d\varphi)^2\\&=\frac{R^4}{r^4}(ds)^2,\end{aligned}$$

即

$$ds_1=\frac{R^2}{r^2}ds. \qquad (55.12)$$

通过同一点的微小弧段以相等的放大率 R^2/r^2 被放大，因而在该处的微小三角形必变为相似三角形，从而交角保持不变。

在逆矢径变换下，球保持为球(平面作为球的特例)。请读者自行验证。

例如研究球 K 和平面 L 之间的静电场问题(图 106a)。从球 K 的球心 D 作平面 L 的垂线 J，垂足为 A. 从 A 作直线 AT 跟球 K 相切于 T. 以 A 为球心，AT 为半径作球 H，跟垂线 J 交于 C 和 O. 取 O 为反演中心，作逆矢径变换。反演中心自身变为无限远点。既然球 H 和直线 J 通过 O 点，变换后必通过无限远点. 就是说，球 H 变为平面 H_1，直线 J 变为直线 J_1，而且 H_1 和 J_1 保持正交(图 106b)。球 K 和平面 L 并不通过 O 点，变换后的 K_1 和 L_1 是球。K

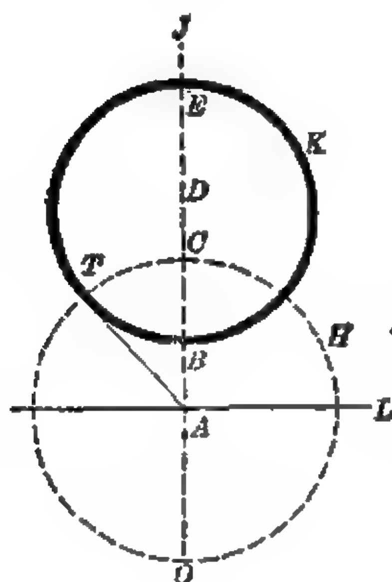


图 106a

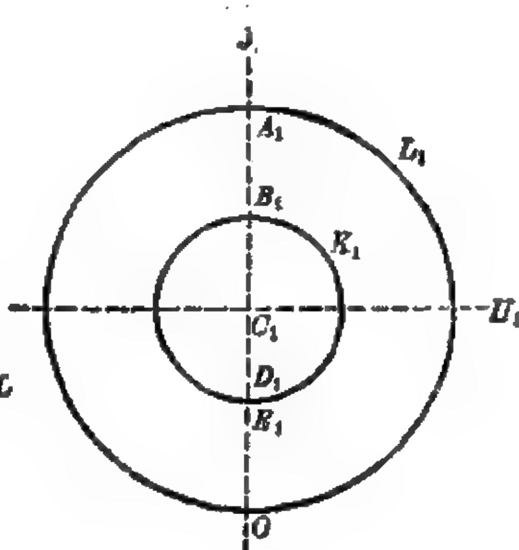


图 106b

和L跟H和J正交，变换后的K_1和L_1亦必跟H_1和J_1正交，因而K_1和L_1只能是以C_1为心的同心球。

这样，球和平面之间的静电场问题变换为同心球之间的静电场问题，后者容易求解得多。

第十八章　近似方法简介

许多定解问题，或由于边界形状较为复杂，或由于泛定方程较为复杂，或由于其他各种原因，难以严格解出。因此，又发展了近似方法。只要近似程度足以满足实际工作的要求，近似解的价值一点也不低于严格解。其实，认真说来，推导数学物理方程时不免要作一些简化假定，定解条件本身也带有或多或少的近似性，所谓严格解说到底也还是近似的。

因此，近似方法具有重大意义。

如果某个定解问题不能严格解出，但另一个跟它相差很小的定解问题已严格解出，就可运用微扰法求近似解。量子力学教科书和参考书都要讲到微扰法，本书就省略不讲，以免重复。不过，应当指出，微扰法是一个普遍方法，并不是只能用于求解量子力学的薛定谔方程。事实上，微扰法起源于天体力学，在那里它叫作摄动法。（“微扰”和“摄动”在英文里是同一个词 perturbation，在俄文里也是同一个词 возмущение.）

另一种常用的近似方法是变分方法，把定解问题转化为变分问题，再求变分问题的近似解。

电子计算机的使用日见普及，用电子计算机求定解问题的数值解是很方便的。用有限差分法把定解问题转化为代数方程组，就可由电子计算机计算了。

还可以用一定的物理模型来模拟所研究的定解问题，而在模型上实地测量解的数值。

§56. 作为近似方法的变分法

既然变分问题可以转化为相应的欧勒方程（常微分方程或偏微分方程，见附录五），反过来说，定解问题里的泛定方程也就可以看作是某个变分问题的欧勒方程，而变分问题可以按瑞利-里兹方法（参看附录五）求得近似解。

例 用变分方法来解圆形域$|\rho|\leqslant a$上的二维亥姆霍兹方程的边值问题

$$\begin{cases}\Delta_2 u+\lambda u=0,\\ u|_{\rho=a}=0\end{cases}$$

的各向对称解。

本例的各向对称解可严格解出，它是$u=J_0(2.4048\rho/a)$，本征值是$\lambda=(2.4048)^2=5.7831$. 试拿变分法所得近似解跟这严格解进行比较。

解 不难验证，泛定方程是泛函

$$J=\iint(u_x^2+u_y^2-\lambda u^2)dxdy \tag{56.1}$$

的极值问题的欧勒方程。

用瑞利-里兹方法来解这个变分问题。选取满足边界条件$u|_{\rho=a}=0$的尝试函数

$$u=c_1(a^2-\rho^2)+c_2(a^2-\rho^2)^2, \tag{56.2}$$

其中常数c_1和c_2是有待确定的。确定它们的条件是泛函J取极值。

以(56.2)代入(56.1)，

$$J=\int_{\rho=0}^{a}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2-\lambda u^2\right]\rho d\varphi d\rho$$

$$=2\pi\int_0^a\left[\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)^2-\lambda u^2\right]\rho d\rho$$

$$=\pi\int_0^a\Big\{c_1^2[4\rho^2-\lambda(a^2-\rho^2)^2]$$
$$+c_1c_2[16\rho^2(a^2-\rho^2)-2\lambda(a^2-\rho^2)^3]$$
$$+c_2^2[16\rho^2(a^2-\rho^2)^2-\lambda(a^2-\rho^2)^4]\Big\}d(\rho^2)$$
$$=\pi\left[c_1^2\left(2a^4-\frac{1}{3}a^6\lambda\right)+c_1c_2\left(\frac{8}{3}a^6-\frac{1}{2}a^8\lambda\right)\right.$$
$$\left.+c_2^2\left(\frac{4}{3}a^8-\frac{1}{5}a^{10}\lambda\right)\right].$$

既然 J 取极值，应有 $\partial J/\partial c_1=0$ 和 $\partial J/\partial c_2=0$，即

$$\begin{cases}\left(4-\dfrac{2}{3}a^2\lambda\right)c_1+\left(\dfrac{8}{3}a^2-\dfrac{1}{2}a^4\lambda\right)c_2=0,\\[2ex]\left(\dfrac{8}{3}-\dfrac{1}{2}a^2\lambda\right)c_1+\left(\dfrac{8}{3}a^2-\dfrac{2}{5}a^4\lambda\right)c_2=0.\end{cases}$$

对 c_1 和 c_2 而言，这是齐次代数方程组。齐次代数方程组有非零解的条件是系数行列式为零，由此解得本征值 λ. 这样解出的 λ 有两个，其中较小的一个是 $5.7841/a^2$. 取这个 λ，得到

$$c_2/c_1=0.638/a^2.$$

这样，近似本征值和近似本征函数是

$$\lambda=5.7841,\quad u=[a^2(a^2-\rho^2)+0.638(a^2-\rho^2)^2]/1.638.$$

跟严格解比较，近似本征值 5.7841 略大于严格本征值 5.7831，准确到 $10^{-2}\%$。至于本征函数的比较见下表

ρ/a	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
近似本征函数	$0.987a^4$	$0.945a^4$	$0.879a^4$	$0.789a^4$	$0.677a^4$
严格本征函数	$0.986a^4$	$0.943a^4$	$0.875a^4$	$0.783a^4$	$0.671a^4$
ρ/a	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
近似本征函数	$0.550a^4$	$0.413a^4$	$0.270a^4$	$0.130a^4$	0
严格本征函数	$0.545a^4$	$0.410a^4$	$0.270a^4$	$0.133a^4$	0

读者可以看到，用(56.2)那样简单的尝试函数，得到的近似解是相当准确的，本征值的准确程度更是优于本征函数的准确程度。本征值的准确度优于本征函数的准确度，这是变分法的特点。

尝试函数(56.2)是待定常数 c_1 和 c_2 的线性函数。这并不是必须的，尝试函数完全可以选取为待定常数的非线性函数。

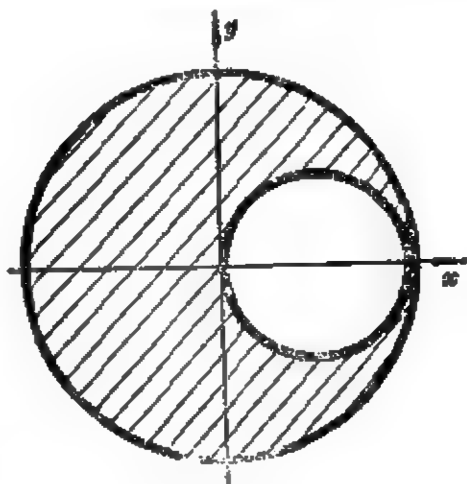


图 107

如果边界的形状比较复杂，变分法更能显示优越性。例如，边界是两个相切的圆 $x^2+y^2-a^2=0$ 和 $x^2-ax+y^2=0$(图 107)，求亥姆霍兹方程边值问题的严格解相当困难。而如果采用变分方法，对于第一类齐次边界条件，只要选取

$$u(x,y)=(x^2+y^2-a^2)(x^2-ax+y^2)f(x,y)$$

形式的尝试函数就能满足边界条件，其中 $f(x,y)$ 的选取还有很大的灵活性。

§57. 模拟法

我们知道，有许多物理本质完全不同的物理问题，“翻译”成数学问题竟是一样的，就是说，在数学上表示为同一个定解问题。因此，为了研究某个物理问题而求解相应的定解问题时，完全可以用另一个物理问题的实验研究来代替定解问题的求解。例如，研究某个不规则形状的物体里的稳定温度分布问题，在数学上这是拉普拉斯方程的边值问题。由于物体形状不规则，这个边值问题的严格解很困难。考虑到静电场或稳恒电流场中的电势也遵守拉普

拉斯方程，对相应的静电场或稳恒电流场进行实验研究，测定场中各处的电势，也就解决了稳定温度场中的温度分布。这就是用静电场或稳恒电流场模拟稳定温度场，或者说，用静电场或稳恒电流场作拉普拉斯方程的物理模型。

物理模型并不限于电学的模型，但电学的测量比较方便而准确，所以电学的模型是常用的。

§58. 有限差分法

大家都知道，表示函数的方法有公式法、表格法和图象法。如果能够用函数表的形式给出定解问题的解的数值，虽然没有给出公式，还是可以说定解问题已经解出。其实，不少实际工作需要的正是这种数值表。

这里对有限差分法作简略的介绍。有限差分法的基本概念是用差商代替微商。

导数或叫微商

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

是无限小的微分 $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y$ 除以无限小的微分 $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x$ 的商。它可以近似为

$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}, \tag{58.1}$$

即有限小的差分 Δy 除以有限小的差分 Δx 的商，这叫作差商。按照同样的想法，导数 y' 还可近似为

$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x) - y(x-\Delta x)}{\Delta x}, \tag{58.2}$$

或近似为

$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x+\Delta x)-y(x-\Delta x)}{2\Delta x}. \qquad (58.3)$$

近似式(58.1)和(58.2)相当于把泰勒级数

$$y(x+\Delta x)=y(x)+(\Delta x)y'+\frac{1}{2!}(\Delta x)^2y''+\cdots,$$

$$y(x-\Delta x)=y(x)-(\Delta x)y'+\frac{1}{2!}(\Delta x)^2y''+\cdots$$

截断于$(\Delta x)y'$项，把$(\Delta x)^2$项以及更高幂次的项全部略去。(58.3)则相当于把泰勒级数

$$y(x+\Delta x)-y(x-\Delta x)=2(\Delta x)y'+\frac{2}{3!}(\Delta x)^3y'''+\cdots$$

截断于$2(\Delta x)y'$项，把$(\Delta x)^3$项以及更高幂次的项全部略去。因此，(58.3)的截断误差小于(58.1)和(58.2)。

二阶导数可近似为差商的差商，

$$\frac{d^2y}{dx^2} \approx \frac{1}{\Delta x}\left[\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x+\Delta x}-\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x}\right]$$

$$\approx \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}-\frac{y(x)-y(x-\Delta x)}{\Delta x}\right]$$

$$=\frac{1}{(\Delta x)^2}[y(x+\Delta x)+y(x-\Delta x)-2y(x)]. \qquad (58.4)$$

这相当于把泰勒级数

$$y(x+\Delta x)+y(x-\Delta x)$$

$$=2y(x)+(\Delta x)^2y''+\frac{2}{4!}(\Delta x)^4y^{(4)}+\cdots$$

截断于$(\Delta x)^2y''$项，把$(\Delta x)^4$项以及更高幂次的项全部略去。

偏导数也可仿照(58.1)——(58.4)近似为差商。这样一来，偏微分方程就成了**差分方程**。

例如，在闭曲线C所围区域S上（图108）求解二维拉普拉

斯方程

$$u_{xx}+u_{yy}=0$$

的边值问题。用方格网覆盖在 xy 平面上，方格每边长 ξ. 把方格的结点坐标记作 (x_i, y_k). 仿照(58.4)，二维拉普拉斯方程可近似为

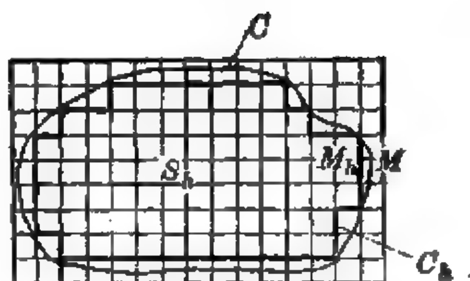


图 108

$$\frac{1}{\xi^2}[u(x_{i+1},y_k)+u(x_{i-1},y_k)-2u(x_i,y_k)]$$

$$+\frac{1}{\xi^2}[u(x_i,y_{k+1})+u(x_i,y_{k-1})-2u(x_i,y_k)]=0,$$

即

$$u(x_i,y_k)$$

$$=\frac{1}{4}[u(x_{i+1},y_k)+u(x_{i-1},y_k)+u(x_i,y_{k+1})+u(x_i,y_{k-1})].$$

(58.5)

就是说，u 在每一结点的值等于 u 在四邻结点的值的平均。于是，把边界线 C 近似为折线 C_h，区域 S 近似为 S_h. 函数 u 在 C_h 上结点 M_h 的值可近似地认为就等于 u 在 C 上最邻近的点 M 的值，后者根据边界条件是已知的。至于 u 在 S_h 内各结点的值则是待求的未知数。对于每一个这样的结点，按照(58.5)可写出一个代数方程。这样，我们得到代数方程组，方程的个数等于 S_h 内结点数，也就等于未知数的个数。用电子计算机求解这种代数方程组是很方便的。

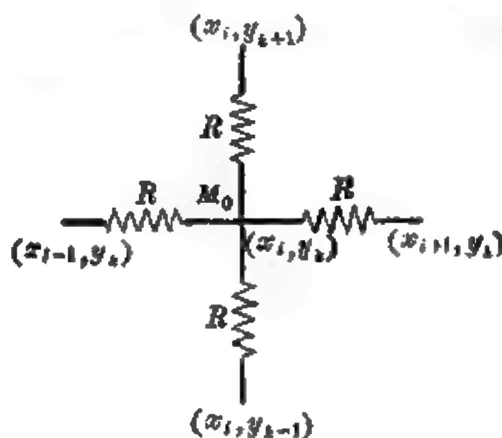


图 109

曾经有人用模拟法来解这种代数方程组。办法是用电阻相等的电阻器组成方格网（图

109)，按照电路的基尔霍夫定律，流向结点 M_0 的电流的代数和为零，即

$$j_1+j_2+j_3+j_4=0.$$

按照欧姆定律，上式即

$$\frac{v(x_{i+1},y_k)-v(x_i,y_k)}{R}+\frac{v(x_i,y_{k+1})-v(x_i,y_k)}{R}$$

$$+\frac{v(x_{i-1},y_k)-v(x_i,y_k)}{R}+\frac{v(x_i,y_{k-1})-v(x_i,y_k)}{R}=0,$$

亦即

$$v(x_i,\ y_k)=\frac{1}{4}[v(x_{i+1},y_k)+v(x_{i-1},y_k)$$

$$+v(x_i,y_{k+1})+v(x_i,y_{k-1})],$$

跟(58.5)完全相同。因此，只要在边界的结点加上已知的电势，测量区域内各结点的电势，就解决了二维拉普拉斯方程边值问题。

又如，在区间$(0,l)$上求解一维输运方程

$$u_t=a^2u_{xx}.$$

把整个区间分为J个"步子"，每一步的长度$\xi=l/J$. 于是， 自变数x以步长ξ跳跃，它的取值是$x_i=i\xi(i=0,1,2,\cdots,J)$. 又把时间的步长取为$\tau$，即自变数$t$取值$t_k=k\tau\,(k=0,1,2,3,\cdots)$. 仿照(58.1)和(58.4)，一维输运方程可近似为

$$\frac{u(x_i,\ t_{k+1})-u(x_i,\ t_k)}{\tau}$$

$$=a^2\frac{u(x_{i+1},t_k)+u(x_{i-1},t_k)-2u(x_i,\ t_k)}{\xi^2},$$

即

$$u(x_i,\ t_{k+1})=\left(1-2\frac{a^2\tau}{\xi}\right)u(x_i,\ t_k)$$

$$+\frac{a^2\tau}{\xi}[u(x_{i+1},t_k)+u(x_{i-1},t_k)]. \qquad (58.6)$$

这是说，只要知道了某个时刻 t_k 的 u 在各个地点 x_i 的值 $u(x_i, t_k)$，代入(58.6)的右边，就得到下一时刻 t_{k+1} 的 u 在各个地点 x_i 的值 $u(x_i, t_{k+1})$。这样，从初始时刻的值 $u(x_i, t_0)$出发，不难依次递推出 $t_1, t_2, \cdots, t_k, \cdots$各个时刻的 u 的值。

但是，人们发现，时间 t 的步子不能跨得太大，必须满足条件

$$\frac{a^2\tau}{\xi}\leqslant\frac{1}{2}, \tag{58.7}$$

否则某一步算出的数值的某项舍入误差(由四舍五入造成的误差)会在其后各步的计算中发挥越来越大的影响，以致使算出的数值完全失去意义。

偏导数 u_t 不一定要仿照(58.1)近似为差商，也可以仿照(58.2)近似为差商，这就使一维输运方程近似为

$$\frac{u(x_i, t_k)-u(x_i, t_{k-1})}{\tau}$$
$$=a^2\frac{u(x_{i+1}, t_k)+u(x_{i-1}, t_k)-2u(x_i, t_k)}{\xi^2},$$

即

$$\frac{a^2\tau}{\xi}u(x_{i+1}, t_k)-\left(1+2\frac{a^2\tau}{\xi}\right)u(x_i, t_k)$$
$$+\frac{a^2\tau}{\xi}u(x_i, t_k)=-u(x_i, t_{k-1}). \tag{58.8}$$

人们发现，这样作可取消对步长 τ 的限制。但是，知道某个时刻 t_k 的 u 在各个地点 x_i 的值 $u(x_i, t_k)$后，并不能由(58.8)直接得到下一时刻 t_{k+1} 的 $u(x_i, t_{k+1})$，却必须把 $i=1, 2, 3, \cdots, J-1$ 的(58.8)共计 J-1 个方程联立起来求解 $u(x_1, t_{k+1}), u(x_2, t_{k+1}), \cdots, u(x_{J-1}, t_{k+1})$。这种联立代数方程用电子计算机求解还是很方便的。

较好的近似是仿照(58.3)把偏导数 u_t 近似为

$$u_t(x_i, t_{k+\frac{1}{2}})=\frac{u(x_i, t_{k+1})-u(x_i, t_k)}{\tau},$$

从而一维输运方程近似为

$$\frac{u(x_i, t_{k+1})-u(x_i, t_k)}{\tau}$$

$$=a^2\frac{u(x_{i+1}, t_{k+1/2})+u(x_{i-1}, t_{k+1/2})-2u(x_i, t_{k+1/2})}{\xi^2}.$$

式中 $u(x_i, t_{k+1/2})$ 可理解为 $[u(x_i, t_{k+1})+u(x_i, t_k)]/2$，于是，上列差分方程即为

$$\frac{a^2\tau}{2\xi^2}u(x_{i+1}, t_{k+1})-\left(1+\frac{a^2\tau}{\xi^2}\right)u(x_i, t_{k+1})+\frac{a^2\tau}{2\xi^2}u(x_{i-1}, t_{k+1})$$

$$=-\frac{a^2\tau}{2\xi^2}u(x_{i+1}, t_k)-\left(1-\frac{a^2\tau}{\xi^2}\right)u(x_i, t_k)-\frac{a^2\tau}{2\xi^2}u(x_{i-1}, t_k).$$

(58.9)

知道某个时刻 t_k 的 u 在各个地点 x_i 的值 $u(x_i, t_k)$ 后，必须把 $i=1, 2, 3, \cdots, J-1$ 的(58.9)共计 $J-1$ 个方程联立起来求解 $u(x_1, t_{k+1}), u(x_2, t_{k+1}), \cdots, u(x_{J-1}, t_{k+1})$. 这联立代数方程用电子计算机求解是方便的。对时间的步长 τ 也有限制，但比(58.7)要宽些，

$$\frac{a^2\tau}{\xi}\leqslant 1. \tag{58.10}$$

再如，在区间 $(0, l)$ 上求解一维波动方程

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=0.$$

把整个区间分为 J 个"步子"，每一步长度 $\xi=l/J$. 取时间的步长为 τ. 仿照(58.4)，一维波动方程可近似为

$$\frac{u(x_i, t_{k+1})+u(x_i, t_{k-1})-2u(x_i, t_k)}{\tau^2}$$

$$=a^2\frac{u(x_{i+1}, t_k)+u(x_{i-1}, t_k)-2u(x_i, t_k)}{\xi^2},$$

即

$$u(x_i, t_{k+1})=2\left(1-\frac{a^2\tau^2}{\xi^2}\right)u(x_i, t_k)$$

$$+\frac{a^2\tau^2}{\xi^2}[u(x_{i+1},t_k)+u(x_{i-1},t_k)]-u(x_i,t_{k-1})].$$

(58.11)

这是说，只要知道某个时刻 t_k 及其以前时刻的 u 在各个地点 x_i 的值，代入(58.10)的右边，就得到下一时刻 t_{k+1} 的 u 在各个地点 x_i 的值 $u(x_i,t_{k+1})$. 对时间的步长 τ 的限制是

$$\frac{a\tau}{\xi}\leqslant 1. \tag{58.12}$$

附　　录

一、拉普拉斯变换函数表

№	原　函　数	象　函　数
1	1	$\frac{1}{p}$
2	t^n（n为整数）	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
3	$t^a(a>-1)$	$\frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}$
4	$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{p-\lambda}$
5	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
6	$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
7	$\operatorname{sh}\omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
8	$\operatorname{ch}\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
9	$e^{-\lambda t}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$
10	$e^{-\lambda t}\cos\omega t$	$\frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$
11	$e^{-\lambda t}t^a$	$\frac{\Gamma(a+1)}{(p+\lambda)^{a+1}}$
12	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}$
13	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-a^2/4t}$	$\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}$
14	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-2a\sqrt{t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{\frac{a^2}{p}}\operatorname{erfc}\left(\frac{a}{\sqrt{p}}\right)$
15	$\frac{1}{\sqrt{\pi a}}\sin 2\sqrt{at}$	$\frac{1}{p\sqrt{p}}e^{-\frac{a}{p}}$
16	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos 2\sqrt{at}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-\frac{a}{p}}$

№	原　函　数	象　函　数
17	$\operatorname{erf}(\sqrt{at})$	$\dfrac{\sqrt{a}}{p\sqrt{p+a}}$
18	$\operatorname{erfc}\left(\dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\dfrac{1}{p}e^{-a\sqrt{p}}$
19	$e^t\operatorname{erfc}(\sqrt{t})$	$\dfrac{1}{p+\sqrt{p}}$
20	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}-e^t\operatorname{erfc}(\sqrt{t})$	$\dfrac{1}{1+\sqrt{p}}$
21	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-at}+\sqrt{a}\operatorname{erf}\sqrt{at}$	$\dfrac{\sqrt{p+a}}{p}$
22	$J_0(t)$	$\dfrac{1}{\sqrt{p^2+1}}$
23	$J_n(t)$	$\dfrac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}$
24	$\dfrac{J_n(at)}{t}$	$\dfrac{1}{na^n}(\sqrt{p^2+a^2}-p)^n$
25	$e^{-at}I_0(bt)$	$\dfrac{1}{\sqrt{(p+a)^2-b^2}}$
26	$\lambda^n e^{-\lambda t}I_n(\lambda t)$	$\dfrac{\{\sqrt{p^2+2\lambda p}-(p+\lambda)\}^n}{\sqrt{p^2+2\lambda p}}$
27	$t^nJ_n(t)\left(n>-\dfrac{1}{2}\right)$	$\dfrac{2^n\Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\dfrac{1}{(p^2+1)^{n+\frac{1}{2}}}$
28	$J_0(2\sqrt{t})$	$\dfrac{2}{p}e^{-\frac{1}{p}}$
29	$t^{\frac{n}{2}}J_n(2\sqrt{t})$	$\dfrac{1}{p^{n+1}}e^{-\frac{1}{p}}$
30	$J_0(a\sqrt{t^2-\tau^2})H(t-\tau)$	$\dfrac{1}{\sqrt{p^2+a^2}}e^{-\tau\sqrt{p^2+a^2}}$
31	$\dfrac{J_1(a\sqrt{t^2-\tau^2})}{\sqrt{t^2-\tau^2}}H(t-\tau)$	$\dfrac{e^{-\tau p}-e^{-\tau\sqrt{p^2+a^2}}}{a\tau}$
32	$\int_t^\infty \dfrac{J_0(t)}{t}dt$	$\dfrac{1}{p}\ln p+\sqrt{1+p^2})$
33	$\dfrac{e^{bt}-e^{at}}{t}$	$\ln\dfrac{p-a}{p-b}$
34	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\sin\dfrac{1}{2t}$	$\dfrac{1}{\sqrt{p}}e^{-\sqrt{p}}\sin\sqrt{p}$

№	原　函　数	象　函　数
35	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos\frac{1}{2t}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-\sqrt{p}}\cos\sqrt{p}$
36	$\mathrm{si}\,t$ 即 $-\int_t^\infty \frac{\sin\tau}{\tau}d\tau$	$\frac{\pi}{2p}-\frac{\mathrm{arctg}\,p}{p}$
37	$\mathrm{ci}\,t$ 即 $-\int_t^\infty \frac{\cos\tau}{\tau}d\tau$	$\frac{1}{p}\ln\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$
38	$S(t)$ 即 $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}}\sin\tau^2 d\tau$	$\frac{1}{2p^i\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{p+i}-\sqrt{p-i}}{\sqrt{p^2+1}}$
39	$C(t)$ 即 $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}}\cos\tau^2 d\tau$	$\frac{1}{2p\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{p+i}-\sqrt{p-i}}{\sqrt{p^2+1}}$
40	$-\mathrm{ei}(-t)$ 即 $\int_t^\infty \frac{e^{-\tau}}{\tau}d\tau$	$\frac{1}{p}\ln(1+p)$

二、三角函数的正交关系

§ 24 把周期函数展开为傅里叶级数时用到三角函数的正交关系(24.3)即

$$\begin{cases}\int_{-l}^{l} 1\cos\frac{k\pi x}{l}dx=0 \quad (k\neq 0), & (1)\\ \int_{-l}^{l} 1\sin\frac{k\pi x}{l}dx=0, & (2)\\ \int_{-l}^{l} \cos\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx=0 \quad (k\neq n), & (3)\\ \int_{-l}^{l} \sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx=0 \quad (k\neq n), & (4)\\ \int_{-l}^{l} \cos\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx=0. & (5)\end{cases}$$

(1)和(2)可以直接验证:

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{k\pi x}{l}dx=\left[\frac{l}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{l}\right]\Bigg|_{-l}^{l}=\frac{l}{k\pi}0=0,$$

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{k\pi x}{l}dx=\left[-\frac{l}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{l}\right]\Bigg|_{-l}^{l}=-\frac{l}{k\pi}0=0.$$

利用三角学的积化和差公式

$$\begin{cases}\cos\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}=\frac{1}{2}\cos\frac{(k+n)\pi x}{l}+\frac{1}{2}\cos\frac{(k-n)\pi x}{l},\\ \sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}=-\frac{1}{2}\cos\frac{(k+n)\pi x}{l}+\frac{1}{2}\cos\frac{(k-n)\pi x}{l},\\ \cos\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}=\frac{1}{2}\sin\frac{(k+n)\pi x}{l}-\frac{1}{2}\sin\frac{(k-n)\pi x}{l},\end{cases}$$

很容易验证(3)—(5)。例如，

$$\begin{aligned}&\int_{-l}^{l}\cos\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx\\ &=\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\cos\frac{(k+n)\pi x}{l}dx+\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\cos\frac{(k-n)\pi x}{l}dx\\ &=\frac{l}{2(k+n)\pi}\left[\sin\frac{(k+n)\pi x}{l}\right]\Bigg|_{-l}^{l}\\ &\quad+\frac{l}{2(k-n)\pi}\left[\sin\frac{(k-n)\pi x}{l}\right]\Bigg|_{-l}^{l}\\ &=\frac{l}{2\pi}\left\{\frac{1}{k+n}0+\frac{1}{k-n}0\right\}=0,\end{aligned}$$

这就验证了(3)。同理可以验证(4)和(5)。

三、正项级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ 的收敛性

§24 小字用到正项级数(24.11)即 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2M}{k^2}$ 的收敛性，这收敛性的证明在一般的“高等数学”教材中可以找到。但为了方便读者，这里还是给出证明。

因为 $2M$ 是常数，我们只需证明正项级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ 即

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\cdots$$

的收敛性。现在把第二项起的两项用( )括起来，把第四项起的四项用( )括起来，把第八项起的八项括起来，照此类推以至无穷。于是，得到

$$\begin{aligned}&1+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{7^2}\right)+\left(\frac{1}{8^2}+\frac{1}{9^2}+\cdots+\frac{1}{15^2}\right)\\&\quad+\left(\frac{1}{16^2}+\frac{1}{17^2}+\cdots+\frac{1}{31^2}\right)+\left(\frac{1}{32^2}+\frac{1}{33^2}+\cdots+\frac{1}{63^2}\right)+\cdots\\&<1+\left(\frac{1}{2^2}\times 2\right)+\left(\frac{1}{4^2}\times 4\right)+\left(\frac{1}{8^2}\times 8\right)+\left(\frac{1}{16^2}\times 16\right)\\&\quad+\left(\frac{1}{32^2}\times 32\right)+\cdots\\&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots.\end{aligned}$$

最后这个级数是公比为 1/2 的几何级数，它是收敛的，其和为 2。正项级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ 的前 N 项部分和 $S_N=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^2}$ 随 N 的增大而增大，但始终不超过 2，可见极限 $\lim_{N\to\infty}S_N$ 是存在的，

即 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ 是收敛的。

四、瓦耳希函数

近年来，随着电子设备的数字化和集成化，在电子技术的许多领域里开始应用傅里叶-瓦耳希级数展开。

按照 §26，在区间(0,1)上，余弦函数族

$$\cos k\pi x \quad (k=0,1,2,\cdots) \tag{1}$$

是完整的。为了适应数字式电子线路里的二进制，完整函数族(1)

需要修改。不过，凡是 k 等于 2 的零次幂或正整数幂的不必修改。这是说，保留

$$\cos\pi x, \cos 2\pi x, \cos 4\pi x, \cos 8\pi x, \cos 16\pi x, \cdots.$$

其余的 $\cos k\pi x$ 则要修改。首先把 k 用二进制表出。例如 $k=13$ 表为二进制是 1101，即

$$13=1\cdot 2^3+1\cdot 2^2+0\cdot 2^1+1\cdot 2^0.$$

然后，根据这个二进制表示 1101 把 $\cos 13\pi x$ 换为

$$\cos(1\cdot 2^3\pi x)\cos(1\cdot 2^2\pi x)\cos(0\cdot 2^1\pi x)\cos(1\cdot 2^0\pi x).$$

这不过是余弦函数族 (1) 中 $k\leqslant 13$ 的某些函数的线性组合。事实上，利用三角学的积化和差公式，

$$\cos 8\pi x\cos 4\pi x\cos\pi x=\frac{1}{2}(\cos 12\pi x+\cos 4\pi x)\cos\pi x$$

$$=\frac{1}{2}\cos 12\pi x\cos\pi x+\frac{1}{2}\cos 4\pi x\cos\pi x$$

$$=\frac{1}{4}\cos 13\pi x+\frac{1}{4}\cos 11\pi x+\frac{1}{4}\cos 5\pi x+\frac{1}{4}\cos 3\pi x.$$

这样，完整函数族(1)修改为

$$\prod_{n=0}^{m-1}\cos(k_n 2^n\pi x)\qquad(k=0,1,2,\cdots),\tag{2}$$

其中 $\prod$ 是连乘记号，k_n 是 k 用二进制表出的 2^n 位的数值，即

$$k=k_{m-1}2^{m-1}+k_{m-2}2^{m-2}+\cdots+k_n 2^n+\cdots+k_1 2^1+k_0 2^0.\tag{3}$$

其实，(2)不过是(1)的重新组合。函数族(2)当然也是完整的。

为了适应二进制只有 0 和 1 两个数字，对函数族(2)再进行修改。这次修改是把正的数值一律换成 $+1$，把负的数值一律换成 -1，函数族(2)就改为

$$\prod_{n=0}^{m-1}\operatorname{sgn}[\cos(k_n 2^n\pi x)]\qquad(k=0,1,2,\cdots),\tag{4}$$

sgn 是符号函数的记号,

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1 & (x>0),\\ -1 & (x<0).\end{cases} \tag{5}$$

函数族(4)中的函数叫作**瓦耳希函数**，记作 $\mathrm{wal}_k(x)$，k 是它的序数,

$$\mathrm{wal}_k(x)=\prod_{n=0}^{m-1}\operatorname{sgn}[\cos(k_n 2^n \pi x)], \tag{6}$$

k_n 是 k 的二进制表示的 2^n 位的数值，见(3)。图 110 描画了前八个瓦耳希函数。在区间(0,1)上的零点个数恰是序数 k。

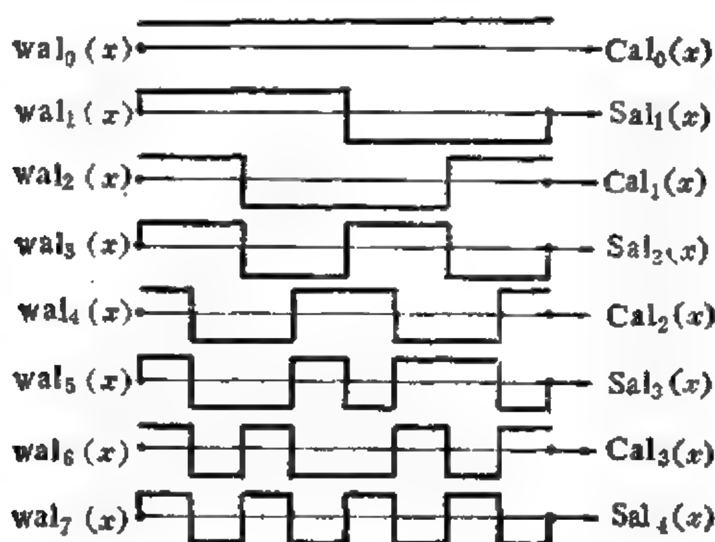


图 110

以上只是在区间(0, 1)上给出瓦耳希函数的定义。一般就拿这作为一个周期向整个 x 轴延拓。

三角函数族(1)中各个函数的零点都是以等距离排列的。如果 x 代表时间，则区间[0,1)上的零点个数之半对应于**频率**。瓦耳希函数的零点并不一定以等距离排列（参看图 110 的 $\mathrm{wal}_5(x)$ 和 $\mathrm{wal}_6(x)$两图），因而区间[0,1)上零点个数之半不宜叫作频率，一般把它改称为**列率**。

把瓦耳希函数延拓到整个 x 轴，很容易看出序数 k 为奇数的瓦耳希函数是奇函数，序数 k 为偶数的瓦耳希函数是偶函数。通常又把奇的和偶的瓦耳希函数分别记作 $\mathrm{Sal}_i(x)$ 和 $\mathrm{Cal}_i(x)$，i 是列率，它等于 $k/2$(如 k 是偶数)或$(k+1)/2$(如 k 是奇数)。

瓦耳希函数在区间(0, 1)上是互相正交的，

$$\int_0^1 \mathrm{wal}_k(x)\mathrm{wal}_n(x)dx=0 \quad (k\neq n). \tag{7}$$

瓦耳希函数是规一化的，就是说，模等于1，

$$\int_0^1 [\mathrm{wal}_k(x)]^2 dx=1. \tag{8}$$

瓦耳希函数族(4)是完整的，可用来作为基本函数族把区间(0,1)上的函数 $f(x)$ 展开为级数

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathrm{wal}_k(x). \tag{9}$$

利用正交关系(7)和规一化条件(8)，可求得(9)的系数

$$a_k=\int_0^1 f(x)\mathrm{wal}_k(x)dx. \tag{10}$$

(9)的级数叫作傅里叶-瓦耳希级数，简称瓦耳希级数．系数 a_k 叫作傅里叶-瓦耳希系数，简称瓦耳希系数。

瓦耳希函数的一个有趣性质是调制的单边带性质。作为对比，先说三角函数。圆频率为Ω的载波 $\cos\Omega t$ 的振幅被调制，调制圆频率为 ω，调制波可记作 $\cos\omega t\cos\Omega t$．利用三角函数的积化和差公式，

$$\cos\omega t\cos\Omega t=\frac{1}{2}\cos(\Omega+\omega)t+\frac{1}{2}\cos(\Omega-\omega)t.$$

这样，调制波包含两种圆频率，即$\Omega+\omega$ 和$\Omega-\omega$，它们分别在载波圆频率的两侧。因此，三角函数载波被信号调制给出双边带。瓦耳希函数的调制与此不同。序数为K的瓦耳希函数 $\mathrm{wal}_K(x)$受到

序数为 k 的瓦耳希函数 $\mathrm{wal}_k(x)$ 的调制，可以证明

$$\mathrm{wal}_k(x)\mathrm{wal}_K(x)=\mathrm{wal}_{k\oplus K}(x), \tag{11}$$

其中 $k\oplus K$ 是二进制表出的 k 与 K 的"模 2 加法"，所谓"模 2 加法"是说 2 也当作零，即 $0\oplus0=0$，$0\oplus1=1$，$1\oplus1=0$. 这样，调制波并不具有两种列率，而是只有一种列率。因此，瓦耳希函数被信号调制只给出单边带，有利于压缩边带宽度。

现在用例子证明(11)式。为了简单，k 和 K 取较小的数值，例如 $k=3, K=6$. 用二进制表出，$k=011, K=110$，即

$$3=0\cdot2^2+1\cdot2^1+1\cdot2^0, \quad 6=1\cdot2^2+1\cdot2^1+0\cdot2^0,$$

这样，

$$\mathrm{wal}_3(x)=\mathrm{sgn}[\cos(0\cdot4\pi x)\cos(1\cdot2\pi x)\cos(1\cdot\pi x)],$$

$$\mathrm{wal}_6(x)=\mathrm{sgn}[\cos(1\cdot4\pi x)\cos(1\cdot2\pi x)\cos(0\cdot\pi x)],$$

于是，

$$\mathrm{wal}_3(x)\mathrm{wal}_6(x)=\mathrm{sgn}[\cos(4\pi x)\cos^2(2\pi x)\cos(\pi x)],$$

这对应于加法 $011+110=121$. 但是，$\mathrm{sgn}\cos^2(2\pi x)\equiv1$，可以略去不写，从而

$$\mathrm{wal}_3(x)\mathrm{wal}_6(x)=\mathrm{sgn}[\cos(4\pi x)\cos(\pi x)],$$

这正对应于"模 2 加法" $011\oplus110=101$. 二进制的 101 是十进制的 5，所以

$$\mathrm{wal}_3(x)\mathrm{wal}_6(x)=\mathrm{wal}_5(x).$$

五、变分法初步

(一) 泛函

质点沿着光滑轨道 $y=y(x)$ 从 A 自由下滑到 B(图 111)，所需时间

$$J=\int dt=\int\frac{ds}{v}=\int\frac{ds}{\sqrt{2gy}}=\int_A^B\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}dx.$$

如选取另一条轨道，从 A 到 B 所需时间 J 即随之而异。这样，时间 J 取决于整个轨道的形状。这是说，J 不是取决于 y 的值，而是取决于函数关系 $y=y(x)$.

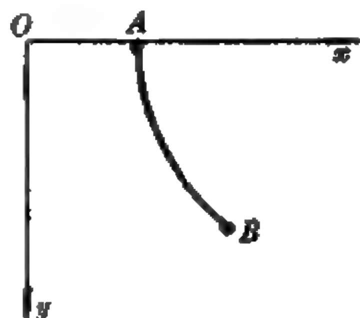


图 111

一般地说，一个变数 J，其值取决于函数关系 $y(x)$，就叫作函数 $y(x)$ 的泛函，记作 $J[y(x)]$.

（二）变分问题

试考察所谓捷线问题，即选取适当的轨道 $y=y(x)$ 使质点从 A 自由下滑到 B 所需时间最短。这就是泛函

$$J[y(x)]=\int_A^B\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}dx$$

的极值问题。

泛函的极值问题称为变分问题。在物理学各部门中都有变分问题。例如分析力学的哈密顿原理、最小作用原理，光学的费尔马原理等，都是变分原理。变分法在量子力学中也有很重要的应用。

函数（如果定义在闭区域上，且是连续的）的极值问题总是有解的。变分问题的解却未必存在。不过，在实际问题中，常常从问题的提法就可断定是否有解。

研究变分问题的方法可以归纳为两大类型。一类叫作直接法，直接研究所提出的变分问题。另一类叫作间接法，把变分问题转化为微分方程（所谓欧勒方程）的求解。

（三）瑞利-里兹方法

这是一种直接法。

取完整函数族 $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\cdots$. 尝试用其中前 n 个 $\varphi(x)$ 来

表示 $y(x)$,

$$y(x)=f(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n;\ c_1,c_2,\cdots,c_n),\tag{1}$$

其中 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是待定参数。于是，泛函 J 成为 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 的多元“函数”。按照求解多元函数极值问题的方法可决定 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 的值。

但是，这样求出的泛函极值只是就(1)这种类型的函数而言的，它还不是真正的极值。所以，这样求出的解最多只能说是近似解，兹记作 $y_n(x)$. 显然，n 越大则近似程度越高，从而问题的解应当是

$$y(x)=\lim_{n\to\infty}y_n(x).\tag{2}$$

不过，(2)的极限过程是否收敛、收敛快慢、是否收敛于真正的解，都还是问题。而且，在实际计算中，真去计算 $y_n(x)$ 并令 $n\to\infty$ 而取极限，往往很麻烦。一般就止于求得近似解 $y_n(x)$.

如果函数族 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots$选得适当，并且(1)的尝试函数 f 也选得适当，常常能够很简便地求得近似程度很高的解。如果选得不适当，所得解可能跟严格解相差很远。至于怎样选才适当，并无一定方法可循，只能从问题的各方面加以考虑，并结合经验加以判断。

（四）欧勒方程

这里推导变分问题的解必须满足的必要条件——欧勒方程。欧勒方程是微分方程，变分问题转化为求解微分方程。

先研究最简单的情况。设泛函 J 只依赖于单个自变数 x，单个函数 $y(x)$及其导数 $y'(x)$，即

$$J[y(x)]=\int_a^b F(x,y,y')dx,\tag{3}$$

函数 F 对于 x, y, y' 都是二次连续可导，y 的二阶导数 y'' 也是连续的。

设想函数 $y(x)$ 稍有变动，变为 $y+\delta y$（这里 δy 称为 $y(x)$ 的变分），泛函(3)的值也随之而变，变动的大小是

$$J[y+\delta y]-J[y]=\int_a^b[F(x,y+\delta y,y'+\delta y')-F(x,y,y')]dx$$

$$\approx\int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right]dx.$$

上式右边叫作泛函(3)的变分（试跟函数的微分比较），记作 $\delta J[y]$，

$$\delta J[y]=\int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right]dx. \tag{4}$$

设变分问题有解

$$y=y(x). \tag{5}$$

设想 y 从解(5)稍稍变动到 $y+\delta y$，并把变分 $\delta y(x)$ 改记作 $\varepsilon\eta(x)$，其中 ε 是一个小的参数，$\varepsilon=0$ 对应于解(5)。于是，泛函 $J[y+\varepsilon\eta]$ 成为参数 ε 的函数。既然 $\varepsilon=0$ 对应于解，由函数极值必要条件知

$$\left.\frac{\partial J[y+\varepsilon\eta]}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=0,$$

即

$$\int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial y}\eta+\frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\right]dx=0. \tag{6}$$

上式左边跟变分 $\delta J[y]$ 只相差一个乘数，所以解(5)必须满足的必要条件(6)正是 $\delta J[y]=0$，即

$$\int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right]dx=0. \tag{7}$$

在(7)的积分号下既有 δy，又有 $\delta y'$. 利用分部积分法，可以使积分号下只出现 δy，这就是所谓拉格朗日变换：

$$\int_a^b\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\,dx=\int_a^b\frac{\partial F}{\partial y'}\frac{d}{dx}(\delta y)dx$$

$$=\left[\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\right]_a^b-\int_a^b\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y dx.$$

这样，必要条件(7)成为

$$\int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y dx+\left[\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\right]_a^b=0.$$

在简单的变分问题中，变分 δy 在端点保持为零（例如图 110，不论怎样改变光滑轨道的形状，轨道总是通过点 A 和点 B），即

$$\delta y|_{x=a}=0,\delta y|_{x=b}=0.$$

于是，必要条件成为

$$\int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y dx=0.$$

上式对任意的 δy 都成立，所以

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0. \qquad (8)$$

这就是最简单情况下的欧勒方程。

用布网·雷蒙变换代替拉格朗日变换，还可以在放宽的条件下导出欧勒方程，这里不拟论述。

例如捷线问题，即变分问题

$$\delta\int_a^b\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}dx=0.$$

这里 $F(x,y,y')=\sqrt{1+y'^2}/\sqrt{2gy}$. 相应的欧勒方程是

$$-\frac{\sqrt{1+y'^2}}{2\sqrt{2g}y^{3/2}}-\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+y'^2}}\right)=0.$$

这个微分方程不显含 x，因而可以分离变数，只要以 $y'\dfrac{d}{dy}$ 代替 $\dfrac{d}{dx}$.

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y^{3/2}}+2y'\frac{d}{dy}\left(\frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}}\right)=0.$$

整理，全式遍乘 $y^{3/2}(1+y'^2)^{3/2}$，得

$$\frac{dy}{2y}+\frac{y'dy'}{1+y'^2}=0.$$

左边两项分别积分，加以整理

$$y'=\sqrt{\frac{2c_1-y}{y}},$$

即
$$\frac{\sqrt{y}\,dy}{\sqrt{2c_1-y}}=dx.$$

两边分别积分，加以整理，

$$x=-\sqrt{2c_1y-y^2}+c_1\arccos\frac{c_1-y}{c_1}+c_2,$$

式中 c_1 和 c_2 为积分常数。把 $\arccos\frac{c_1-y}{c_1}$ 记作θ，则

$$\begin{cases}y=c_1-c_1\cos\theta,\\x=c_1\theta-c_1\sin\theta+c_2.\end{cases}$$

这是摆线(又叫旋轮线)。积分常数可利用端点条件(即轨道通过端点A和B)确定。

较复杂情况下的欧勒方程可仿照上述方法导出。兹列举如下。

(1) 泛函取决于 $y(x)$ 和 $z(x)$ 两个函数的情况。变分问题

$$\delta\int_a^b F(x,y,z,y',z')dx=0$$

的欧勒方程是

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial z'}=0. \tag{9}$$

(2) 泛函取决于 $y(x)$ 及其高阶导数的情况。例如变分问题

$$\delta\int_a^b F(x,y,y',y'',y''')dx=0$$

的欧勒方程是

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}+\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''}-\frac{d^3}{dx^3}\frac{\partial F}{\partial y'''}=0. \tag{10}$$

(3) 泛函取决于多元函数 $u(x,y)$ 的情况。变分问题

$$\delta\iint F(x,y,u,u_x,u_y)dxdy=0$$

的欧勒方程是

$$\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u_x}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u_y}=0. \tag{11}$$

（五）附加条件下的变分问题

有些变分问题还带有附加条件。

如用直接法解这类问题，选取尝试函数时，应当注意使它满足所提出的附加条件。

如用欧勒方程解这类问题，可以仿照函数的条件极值问题，运用拉格朗日乘子法。

例如，曲线 $y=y(x)$ 的两端是定点 A 和 B，且有定长 l。这曲线的形状应当怎样才使图 112 的曲边梯形 $CABD$ 的面积最大？

面积 J 可表为泛函

$$J[y(x)]=\int y dx.$$

这里要求 J 取极值，附加条件是曲线的长度一定并等于 l，即

$$K[y(x)]\equiv\int\sqrt{1+y'^2}dx=l.$$

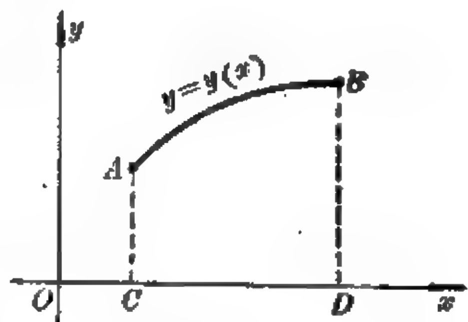


图 112

按照拉格朗日乘子法，我们应求解泛函 $J+\frac{1}{\lambda}K$ 的极值问题，这极值问题的欧勒方程是

$$\frac{\partial}{\partial y}(\sqrt{1+y'^2}+\lambda y)-\frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial y'}(\sqrt{1+y'^2}+\lambda y)=0,$$

即

$$\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=\lambda.$$

积分一次，

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=\lambda x+c_1.$$

从上式“解出”y'，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(\lambda x+c_1)}{\sqrt{1-(\lambda x+c_1)^2}}.$$

分离变数并积分，

$$y+c_2=-\frac{1}{\lambda}\sqrt{1-(\lambda x+c_1)^2},$$

两边平方，加以整理，

$$\lambda^2(x^2+y^2)+2\lambda(c_1x+c_2\lambda y)+(\lambda^2c_2^2+c_1^2-1)=0,$$

这是圆弧。式中参数 c_1, c_2 和 λ 可由端点条件和"等周条件" $\int\sqrt{1+y'^2}dx=l$ 确定。

六、正交曲线坐标系中的拉普拉斯算符

有不少问题，由于边界的形状，不宜采用直角坐标系，而应采用球坐标系或柱坐标系等正交曲线坐标系。

在许多数学物理方程中都有拉普拉斯算符

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

采用正交曲线坐标系的时候，当然需要把拉普拉斯算符用正交曲线坐标表示出来。

"正交曲线坐标系中的拉普拉斯算符"在物理系高等数学教材中是有的。但为了方便读者，这里还是给出简单的论述。

（一）拉普拉斯算符作用于标量函数

以 q_1, q_2, q_3 表示正交曲线坐标

$$\begin{cases}q_1=q_1(x,y,z),\\ q_2=q_2(x,y,z),\\ q_3=q_3(x,y,z);\end{cases}\qquad \begin{cases}x=x(q_1,q_2,q_3),\\ y=y(q_1,q_2,q_3),\\ z=z(q_1,q_2,q_3).\end{cases}$$

两点具有相同的 q_2 和 q_3 而 q_1 相差微量 dq_1，则两点间的距离

$$(ds_1)^2=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2$$
$$=\left[\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2\right](dq_1)^2,$$

这可改写为

$$ds_1=H_1dq_1,\qquad H_1=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2}. \quad (1)$$

同理，两点具有相同的 q_3 和 q_1 而 q_2 相差微量 dq_2，则两点间距离

$$ds_2=H_2dq_2,\qquad H_2=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2}. \quad (2)$$

两点具有相同的 q_1 和 q_2 而 q_3 相差微量 dq_3，则两点间距离

$$ds_3=H_3dq_3,\qquad H_3=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2}. \quad (3)$$

H_1, H_2 和 H_3 叫作度规系数。

这样，标量函数 $u(q_1,q_2,q_3)$ 的梯度 ∇u 在 q_1 增长方向的分量 $(\nabla u)_1=\frac{\partial u}{\partial s_1}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}$，从而

$$(\nabla u)_1=\frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1},\qquad (\nabla u)_2=\frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2},$$
$$(\nabla u)_3=\frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}. \quad (4)$$

再看矢量函数 $\boldsymbol{A}(q_1,q_2,q_3)$. 取一个微小六面体，它由 q_1, q_1+dq_1; q_2, q_2+dq_2; q_3, q_3+dq_3 六个曲面围成(图 113)。这六个微小曲面不妨当作平面。由于曲线坐标 q_1,q_2,q_3 是正交的，不妨把图示的微小六面体当作平行六面体。现在计算从这个六面体发出的通量(流量)。先考虑 q_1 和 q_1+dq_1 两面，净发出的通量

$$=(A_1H_2H_3)|_{q_1+dq_1}dq_2dq_3-(A_1H_2H_3)|_{q_1}dq_2dq_3$$
$$=\frac{\partial}{\partial q_1}(A_1H_2H_3)dq_1dq_2dq_3.$$

同理，通过 q_2 和 q_2+dq_2 两面净发出的通量等于

$$\frac{\partial}{\partial q_2}(A_2H_3H_1)dq_1dq_2dq_3,$$

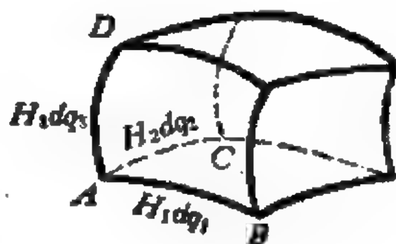


图 113

通过 q_3 和 q_3+dq_3 两面净发出的通量等于

$$\frac{\partial}{\partial q_3}(A_3H_1H_2)dq_1dq_2dq_3.$$

把三者相加，得到总的通量，再除以平行六面体的体积

$H_1H_2H_3dq_1dq_2dq_3$ 就是每单位体积发出的通量，即散度

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2H_3A_1)+\frac{\partial}{\partial q_2}(H_3H_1A_2)+\frac{\partial}{\partial q_3}(H_1H_2A_3)\right]. \tag{5}$$

拉普拉斯算符作用于标量函数 $u(q_1, q_2, q_3)$ 不过是该标量函数的梯度 ∇u 的散度 $\nabla\cdot(\nabla u)$，所以，

$$\Delta u=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_3H_1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)\right]. \tag{6}$$

应用于柱坐标 ρ, φ, z（参看图 114，不妨形象地称之为“投影

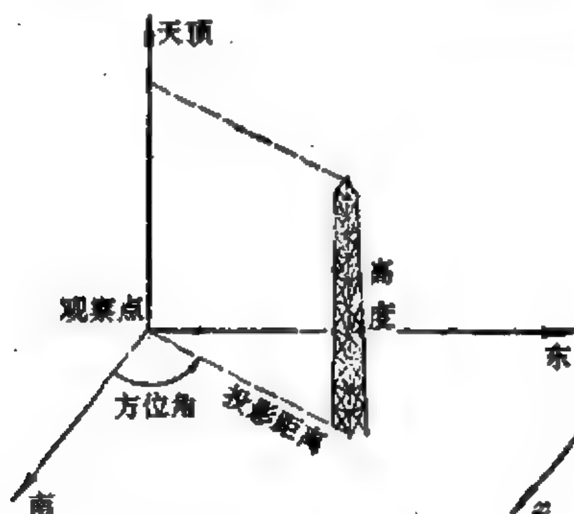


图 114a

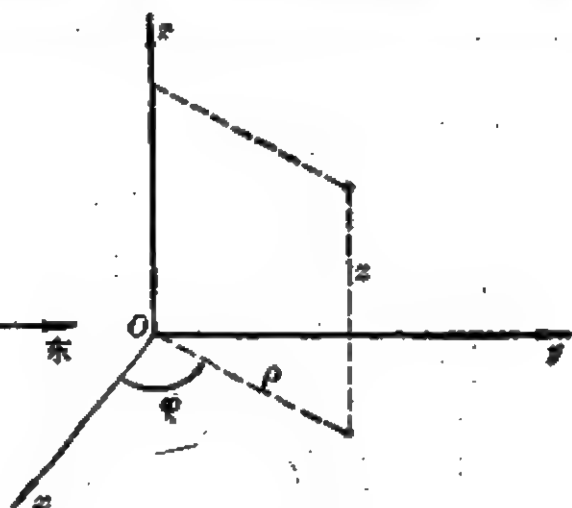


图 114b

距离”、“方位角”和“高度”），

$$\begin{cases}x=\rho\cos\varphi,\\ y=\rho\sin\varphi,\\ z=z.\end{cases}$$

很容易按(1)——(3)算出

$$H_\rho=1,\quad H_\varphi=\rho,\quad H_z=1.$$

其实，这也可以从图 115 直接看出。

于是，按照(4)——(6)得到，在柱坐标系中，

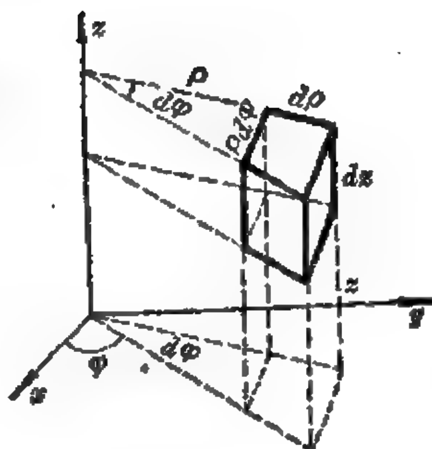


图 115

$$(\nabla u)_\rho=\frac{\partial u}{\partial \rho},$$

$$(\nabla u)_\varphi=\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi},$$

$$(\nabla u)_z=\frac{\partial u}{\partial z}.$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi}A_\varphi+\frac{\partial}{\partial z}A_z.$$

$$\Delta u=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{7}$$

从柱坐标系取消 z 这个坐标就得到平面极坐标系。所以在平面极坐标系中，

$$\Delta u=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \tag{8}$$

应用于球坐标 r,θ,φ(参看图 116，不妨形象地称之为"距离"、



图 116a

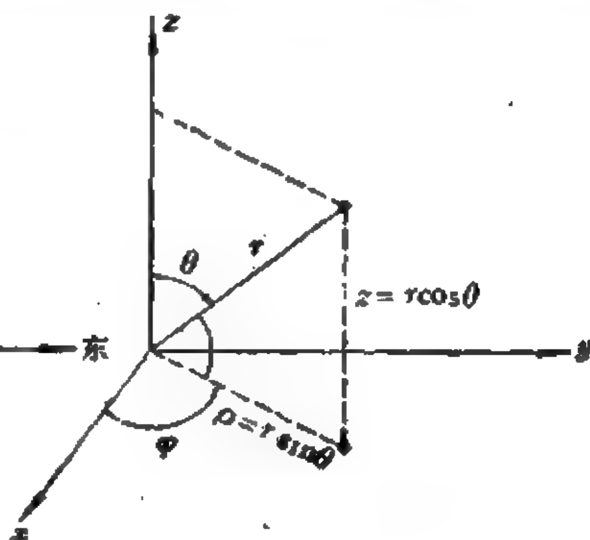


图 116b

"天顶角"和"方位角"),

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$$

很容易按(1)——(3)算出

$$H_r = 1,\ \ H_\theta = r,\ \ H_\varphi = r\sin\theta.$$

其实,这也可以从图 117 直接看出。于是,按照(4)——(6)得到:

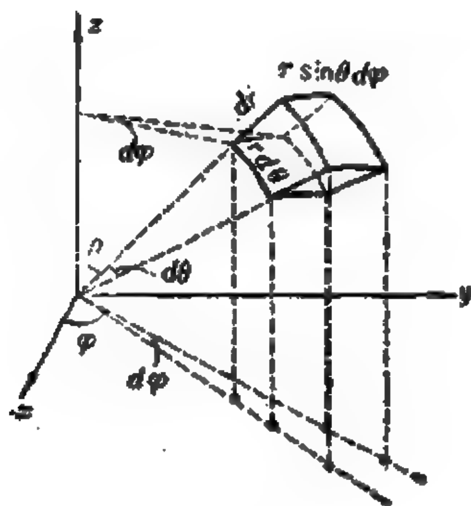


图 117

在球坐标系中,

$$(\nabla u)_r = \frac{\partial u}{\partial r},\ \ (\nabla u)_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta},\quad (\nabla u)_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}A_\varphi.$$

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

(9)

(二) 拉普拉斯算符作用于矢量函数

拉普拉斯算符对矢量函数$\mathbf{A}(q_1, q_2, q_3)$可利用矢量分析公式

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A}$$

即

$$\Delta \boldsymbol{A}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) \qquad (10)$$

而间接得出。但这里需要先写出旋度的表示式。

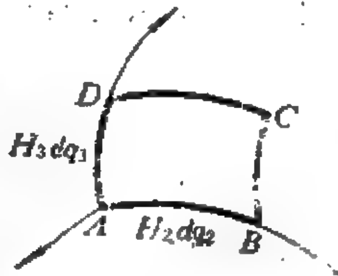


图 118

取一个微小四边形 $ABCD$，它的法线沿 q_1 增长方向，四边分别是 q_2，q_2+dq_2；q_3，q_3+dq_3（图 118）。这四个边不妨当作直线。

现在计算矢量 A 沿 $ABCD$ 的"环流"量。沿 AB 段和 CD 段算得

$$(A_2H_2)|_{q_3}dq_2-(A_2H_2)|_{q_3+dq_3}dq_2$$

$$=-\frac{\partial}{\partial q_3}(A_2H_2)dq_2dq_3;$$

沿 BC 段和 DA 段算得

$$(A_3H_3)\Big|_{q_2+dq_2}dq_3-(A_3H_3)\Big|_{q_2}dq_3=\frac{\partial}{\partial q_2}(A_3H_3)dq_2dq_3.$$

把两者相加，得到沿回路 $ABCD$ 的"环流"量，再除以四边形的面积 $H_2H_3dq_2dq_3$ 就得到 q_2q_3 平面上每单位面积的环流量，即旋度的分量

$$(\nabla\times\boldsymbol{A})_1=\frac{1}{H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_2}(A_3H_3)-\frac{\partial}{\partial q_3}(A_2H_2)\right].$$

同理，

$$(\nabla\times\boldsymbol{A})_2=\frac{1}{H_3H_1}\left[\frac{\partial}{\partial q_3}(A_1H_1)-\frac{\partial}{\partial q_1}(A_3H_3)\right], \qquad (10)$$

$$(\nabla\times\boldsymbol{A})_3=\frac{1}{H_1H_2}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(A_2H_2)-\frac{\partial}{\partial q_2}(A_1H_1)\right].$$

把(10)应用于柱坐标系，得

$$\begin{cases}(\Delta\boldsymbol{A})_\rho=\Delta A_\rho-\dfrac{1}{\rho^2}A_\rho-\dfrac{2}{\rho^2}\dfrac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi},\\ (\Delta\boldsymbol{A})_\varphi=\Delta A_\varphi-\dfrac{1}{\rho^2}A_\varphi+\dfrac{2}{\rho^2}\dfrac{\partial A_\rho}{\partial\varphi},\\ (\Delta\boldsymbol{A})_z=\Delta A_z.\end{cases} \qquad (11)$$

把(10)应用于球坐标系，得

$$
\begin{cases}
(\Delta \mathbf{A})_r = \Delta A_r - \dfrac{2}{r^2}A_r - \dfrac{2}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta\sin\theta) - \dfrac{2}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}, \\
(\Delta \mathbf{A})_\theta = \Delta A_\theta - \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}A_\theta + \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial A_r}{\partial\theta} - \dfrac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}, \\
(\Delta \mathbf{A})_\varphi = \Delta A_\varphi - \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}A_\varphi + \dfrac{2}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial A_r}{\partial\varphi} + \dfrac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}.
\end{cases}
\tag{12}
$$

七、几个定积分公式

(一) $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}/2$

这里计算定积分

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2}dx,$$

它也可写成

$$I = \int_0^\infty e^{-y^2}dy,$$

两式相乘，

$$I^2 = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dxdy.$$

积分区域是 xy 平面的第一象限。现在把直角坐标改换为极坐标 ρ 和 φ，则

$$
\begin{aligned}
I^2 &= \int_{\rho=0}^\infty\int_{\varphi=0}^{\pi/2} e^{-\rho^2}\rho d\rho d\varphi \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^\infty e^{-\rho^2}\rho d\rho = \frac{\pi}{4}\int_0^\infty e^{-\rho^2}d(\rho^2) \\
&= \frac{\pi}{4}\Big[-e^{-\rho^2}\Big]_0^\infty = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

上式两边开方，

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

(二) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 a^2} e^{\beta\omega} d\omega = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{\beta^2/4a^2}$

§ 38 例 2 用到这个定积分公式，证明如下。

把所求的积分看作 β 的函数，记作 $I(\beta)$，

$$I(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 a^2} e^{\beta\omega} d\omega.$$

对 β 求导数，

$$\frac{dI}{d\beta} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 a^2} \frac{d}{d\beta} e^{\beta\omega} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 a^2} e^{\beta\omega} \omega d\omega$$

$$= -\frac{1}{2a^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta\omega} d(e^{-\omega^2 a^2}).$$

右边分部积分，

$$\frac{dI}{d\beta} = -\frac{1}{2a^2}\left[e^{-\omega^2 a^2} e^{\beta\omega}\right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$+\frac{\beta}{2a^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 a^2} e^{\beta\omega} d\omega = \frac{\beta}{2a^2} I.$$

上式可看作 $I(\beta)$ 的微分方程，其解是

$$I(\beta) = Ce^{\beta^2/4a^2},$$

其中 C 是积分常数。

为决定积分常数 C，以 $\beta = 0$ 代入上式，

$$C = I(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 a^2} d\omega$$

$$= \frac{2}{a}\int_0^{\infty} e^{-(\omega a)^2} d(\omega a) = \frac{2}{a}\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

利用定积分公式(一)，得 $C = \sqrt{\pi}/a$. 于是，

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 a^2} e^{\beta\omega} d\omega = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{\beta^2/4a^2}.$$

(三) $\frac{1}{4\pi^2}\iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{ik}(e^{ikat} - e^{-ikat}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} dk_1 dk_2 dk_3$

$$=\frac{1}{r}[\delta(r-at)-\delta(r+at)].$$

§38 例6 用到这个定积分公式，证明如下。

先看第一部分

$$I_1=\frac{1}{4\pi^2}\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{ik}e^{ikat}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}dk_1dk_2dk_3.$$

改用球坐标系进行积分，球坐标系的极轴取在 $\boldsymbol{r}$ 的方向，则

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}=kr\cos\theta,$$

而积分的体积元为 $k^2\sin\theta dkd\theta d\varphi$[参看附录六的图117，该图的 r 在这里应换为 k]，于是

$$I_1=\frac{1}{4\pi^2}\int_{k=0}^{\infty}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{1}{ik}e^{ikat}e^{ikr\cos\theta}k^2\sin\theta dkd\theta d\varphi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{k=0}^{\infty}\int_{\theta=0}^{\pi}\frac{1}{r}e^{ikat}e^{ikr\cos\theta}d(ikr\cos\theta)dk$$

$$=\frac{1}{r}\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}e^{ikat}[e^{ikr\cos\theta}]_{\theta=0}^{\pi}dk$$

$$=\frac{1}{r}\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}[e^{-ik(r-at)}-e^{ik(r+at)}]dk.$$

同理，第二部分

$$I_2=-\frac{1}{4\pi^2}\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{ik}e^{-ikat}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}dk_1dk_2dk_3$$

$$=-\frac{1}{r}\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}[e^{-ik(r+at)}-e^{ik(r-at)}]dk.$$

在上式右边令 $k=-K$，则

$$I_2=-\frac{1}{r}\frac{1}{2\pi}\int_0^{-\infty}[e^{iK(r+at)}-e^{-iK(r-at)}](-1)dK$$

$$=\frac{1}{r}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}[e^{-iK(r-at)}-e^{iK(r+at)}]dK.$$

定积分跟积分变数无关，上式的 K 可改写为 k，

$$I_2=\frac{1}{r}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}[e^{-ik(r-at)}-e^{ik(r+at)}]dk.$$

两部分相加,

$$I_1+I_2=\frac{1}{r}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[e^{-ik(r-at)}-e^{ik(r+at)}]dk.$$

参看(29.5), $\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega x}d\omega$, 所以

$$I_1+I_2=\frac{1}{r}[\delta(r-at)-\delta(r+at)].$$

(四) $$\frac{a}{4\pi^2}\iiint_{-\infty}^{\infty}(e^{ikat}+e^{-ikat})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}dk_1dk_2dk_3$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{r}[\delta(r-at)-\delta(r+at)]\right\}.$$

§38 例6 用到这个定积分公式,证明如下。

$$\frac{a}{4\pi^2}\iiint_{-\infty}^{\infty}(e^{ikat}+e^{-ikat})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}dk_1dk_2dk_3$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{ik}\left(\frac{\partial}{\partial t}e^{ikat}-\frac{\partial}{\partial t}e^{-ikat}\right)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}dk_1dk_2dk_3$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{4\pi^2}\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{ik}(e^{ikat}-e^{-ikat})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}dk_1dk_2dk_3$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{r}[\delta(r-at)-\delta(r+at)]\right\}.$$

(五) $$\int_0^{\pi/2}\sin^{2l+1}\theta d\theta=\frac{2l(2l-2)(2l-4)\cdots6\cdot4\cdot2}{(2l+1)(2l-1)(2l-3)\cdots7\cdot5\cdot3}.$$

这里计算定积分

$$I_{2l+1}=\int_0^{\pi/2}\sin^{2l+1}\theta d\theta.$$

它可以化为

$$I_{2l+1}=\int_0^{\pi/2}\sin^{2l}\theta\sin\theta d\theta=-\int_0^{\pi/2}\sin^{2l}\theta d(\cos\theta).$$

分部积分，得

$$I_{2l+1}=[-\sin^{2l}\theta\cos\theta]_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}\cos\theta d\sin^{2l}\theta=\int_0^{\pi/2}\cos\theta d\sin^{2l}\theta$$

$$=\int_0^{\pi/2}(\cos\theta)2l\sin^{2l-1}\theta\cos\theta d\theta=2l\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\sin^{2l-1}\theta d\theta$$

$$=2l\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2\theta)\sin^{2l-1}\theta d\theta=2l\int_0^{\pi/2}\sin^{2l-1}\theta d\theta$$

$$-2l\int_0^{\pi/2}\sin^{2l+1}\theta d\theta=2l\int_0^{\pi/2}\sin^{2l-1}\theta d\theta-2lI_{2l+1}.$$

这就是说，

$$(2l+1)I_{2l+1}=2lI_{2l-1},$$

从而

$$I_{2l+1}=\frac{2l}{2l+1}I_{2l-1}.$$

照这样类推下去，

$$I_{2l+1}=\frac{2l}{2l+1}I_{2l-1}=\frac{2l(2l-2)}{(2l+1)(2l-1)}I_{2l-3}=\cdots$$

$$=\frac{2l(2l-2)(2l-4)\cdots6\cdot4\cdot2}{(2l+1)(2l-1)(2l-3)\cdots7\cdot5\cdot3}I_1,$$

而 I_1 是容易计算的：

$$I_1=\int_0^{\pi/2}\sin\theta d\theta=[-\cos\theta]_0^{\pi/2}=1.$$

因此，

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2l+1}\theta d\theta=\frac{2l(2l-2)(2l-4)\cdots6\cdot4\cdot2}{(2l+1)(2l-1)(2l-3)\cdots7\cdot5\cdot3}.$$

八、高斯函数和误差函数

为计算高斯函数 $(2/\sqrt{\pi})e^{-x^2}$ 的数值，可利用它的麦克劳林

级数

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[1-\frac{1}{1!}x^2+\frac{1}{2!}x^4-\frac{1}{3!}x^6+\frac{1}{4!}x^8-\cdots\right].$$

为计算误差函数 $\operatorname{erf}x=(2/\sqrt{\pi})\int_0^x e^{-z^2}dz$，可把被积函数展开为麦克劳林级数，然后逐项积分，即

$$\begin{aligned}\operatorname{erf}x&=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-z^2}dz\\&=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x\left[1-\frac{1}{1!}z^2+\frac{1}{2!}z^4-\frac{1}{3!}z^6+\frac{1}{4!}z^8-\cdots\right]dz\\&=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[x-\frac{1}{1!}\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2!}\frac{x^5}{5}-\frac{1}{3!}\frac{x^7}{7}+\frac{1}{4!}\frac{x^9}{9}-\cdots\right].\end{aligned}$$

这样算出的数值早已列成了表格。下面就是简略的"高斯函数表"和"误差函数表"。

x	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$	$\operatorname{erf}x$	x	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$	$\operatorname{erf}x$	x	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$	$\operatorname{erf}x$
0.0	1.1284	0.00000						
0.1	1.1172	0.11246	1.1	0.3365	0.88021	2.1	0.0137	0.99702
0.2	1.0841	0.22270	1.2	0.2673	0.91031	2.2	0.0089	0.99814
0.3	1.0313	0.32863	1.3	0.2082	0.93401	2.3	0.0057	0.99886
0.4	0.9615	0.42839	1.4	0.1589	0.95229	2.4	0.0036	0.99931
0.5	0.8788	0.52050	1.5	0.1189	0.96611	2.5	0.0022	0.99959
0.6	0.7872	0.60386	1.6	0.0872	0.97635	2.6	0.0013	0.99976
0.7	0.6913	0.67780	1.7	0.0627	0.98379	2.7	0.0008	0.99987
0.8	0.5950	0.74210	1.8	0.0442	0.98909	2.8	0.0004	0.99992
0.9	0.5020	0.79691	1.9	0.0305	0.99279	2.9	0.0003	0.99996
1.0	0.4151	0.84270	2.0	0.0207	0.99532	3.0	0.0001	0.99998
						∞	0.000	1.00000

九、欧勒型常微分方程

常微分方程

$$ax^2y''+bxy'+cy=0 \tag{1}$$

其中 a, b, c 是常数，叫作欧勒型常微分方程。

这种常微分方程的解法，在高等数学里是有的。为了方便读者，这里也说一说。

把自变数从 x 换为 t，

$$x=e^t,\quad t=\ln x, \tag{2}$$

则

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}, \tag{3}$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}, \tag{4}$$

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\frac{dy}{dt}$$

$$=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x}\frac{dt}{dx}\frac{d}{dt}\frac{dy}{dt}=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right). \tag{5}$$

把(4)和(5)代入(1)，得

$$a\frac{d^2y}{dt^2}+(b-a)\frac{dy}{dt}+cy=0. \tag{6}$$

(6)是常系数二阶常微分方程，其解法是读者熟悉的。

十、勒让德方程的级数解(41.7)和(41.8)在 $x=\pm1$ 发散

勒让德方程的级数解(41.7)和(41.8)在 $x=\pm1$ 分别成为

$$y_0(\pm1)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k,$$

$$u_k=\frac{(2k-2-l)(2k-4-l)\cdots(-l)(l+1)(l+3)\cdots(l+2k-1)}{(2k)!}, \tag{1}$$

$$y_1(\pm 1)=\pm\sum_{k=0}^{\infty} v_k,$$

$$v_k=\frac{(2k-1-l)(2k-3-l)\cdots(-l)(l+2)(l+4)\cdots(l+2k)}{(2k+1)!}. \tag{2}$$

这里要证明级数(1)和(2)是发散的，而且勒让德方程的任一个解都不可能在 $x=-1$ 和 $x=+1$ 有限。

学过高斯判别法的读者可阅读本附录的(一)(三)。没有学过高斯判别法的读者可阅读本附录的(二)(三)。

(一) 用高斯判别法证明级数发散

高斯判别法 正项级数 $\sum_k u_k$，如果 $\lim_{k\to\infty}|u_k/u_{k+1}|=1$，则比值判别法(达朗伯判别法)失效，可把前后邻项之比表为

$$\frac{u_k}{u_{k+1}}=1+\frac{\lambda}{k}+\frac{w_k}{k^p}, \tag{3}$$

其中 $p>1$ 而 w_k 是有界的，

$$\text{如常数 }\lambda\begin{cases}>1\\ \leqslant 1\end{cases}, \text{ 则级数}\begin{cases}\text{收敛}\\ \text{发散}\end{cases}.$$

级数(1)和(2)的比较后的项(k 比较大的项)具有相同的符号。可作正项级数看待。现在对它们应用正项级数的高斯判别法。

先看(1)，

$$\frac{u_k}{u_{k+1}}=1\Big/\frac{(2k-l)(l+2k+1)}{(2k+2)(2k+1)}=\frac{4k^2+6k+2}{4k^2+2k-l(l+1)}$$

$$=1+\frac{4k+2+l(l+1)}{4k^2+2k-l(l+1)}$$

$$=1+\frac{1}{k}+\frac{l(l+1)(1+1/k)}{4k^2+2k-l(l+1)}$$

$$=1+\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}\left[\frac{l(l+1)(1+1/k)}{4+2/k-l(l+1)/k^2}\right].$$

这已是(3)的形式，其中 $\lambda=1$. 根据高斯判别法，级数是发散的。

再看(2)，

$$\frac{v_k}{v_{k+1}}=1\Big/\frac{(2k+1-l)(l+2k+2)}{(2k+3)(2k+2)}=\frac{4k^2+10k+6}{4k^2+6k-(l-1)(l+2)}$$

$$=1+\frac{4k+6+(l-1)(l+2)}{4k^2+6k-(l-1)(l+2)}$$

$$=1+\frac{1}{k}+\frac{(l-1)(l+1)(1+1/k)}{4k^2+6k-(l-1)(l+2)}$$

$$=1+\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}\left[\frac{(l-1)(l+1)(1+1/k)}{4+6/k-(l-1)(l+2)/k^2}\right].$$

这已是(3)的形式，其中 $\lambda=1$. 根据高斯判别法，级数是发散的。

(二) 直接证明级数发散

先证明另外一个级数

$$\sum_{k=2}^{\infty}w_k=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\ln k}=\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\frac{1}{4\ln 4}+\cdots \tag{4}$$

是发散的。事实上，这个级数的前 $n-1$ 项的部分和

$$S_n=\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\cdots+\frac{1}{n\ln n}$$

是图 119 中那些矩形面积的和，它显然大于用斜线标明的那块面

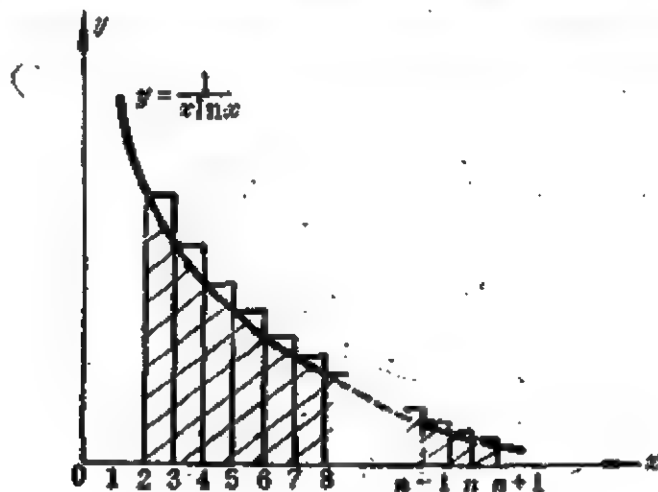


图 119

积，后者等于定积分

$$\int_2^{n+1}\frac{1}{x\ln x}dx=\int_2^{n+1}\frac{1}{\ln x}\frac{dx}{x}=\int_2^{n+1}\frac{d\ln x}{\ln x}=\ln(\ln x)\Big|_2^{n+1}$$

$$=\ln\ln(n+1)-\ln\ln 2.$$

因此，

$$S_n>\ln\ln(n+1)-\ln\ln 2.$$

令 $n\to\infty$，上式右边 $\to\infty$，可见左边必定也 $\to\infty$，即

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\infty.$$

这就是说，级数(4)发散。

现在拿级数(1)的相邻两项的比 u_{k+1}/u_k 跟级数(4)的相邻两项的 w_{k+1}/w_k 作一比较，看哪一个大。为此，进行如下计算：

$$\frac{u_{k+1}}{u_k}\frac{1}{w_{k+1}}-\frac{1}{w_k}$$

$$=\frac{(2k-l)(2k+l+1)}{(2k+1)(2k+2)}(k+1)\ln(k+1)-k\ln k$$

$$=\frac{4k^2+2k-l(l+1)}{(2k+1)2}\ln(k+1)-k\ln k$$

$$=\left[k-\frac{l(l+1)}{2(2k+1)}\right]\ln(k+1)-k\ln k$$

$$=k\ln(k+1)-k\ln k-\frac{l(l+1)}{2(2k+1)}\ln(k+1)$$

$$=k\ln\frac{k+1}{k}-\frac{l(l+1)}{2(2k+1)}\ln(k+1). \tag{5}$$

一个级数，砍掉开头有限个项，并不影响它的收敛或发散。决定级数是否收敛，主要看后面的无限个项，也就是只要着重考察 k 很大的项。因此，在上式右边令 $k\to\infty$。第二项的 $\ln(k+1)\to\infty$，但分母 $2(2k+1)$ 也 $\to\infty$ 并且它的增长比 $\ln(k+1)$ 快得多，所以第二项 $\to0$。(或者，把它当作 $0\cdot\infty$，应用罗毕达法则确定其极限，也得

出同一结论。)至于第一项的第一个因子 $\to\infty$，第二个因子 $\to\ln 1=0$，而 $\infty\cdot 0$ 不能确定。为此，把第一项改写。令 $k=1/x$，则

$$k\ln\frac{k+1}{k}=\frac{1}{x}\ln(1+x).$$

把 $\ln(1+x)$ 展为麦克劳林级数，

$$k\ln\frac{k+1}{k}=\frac{1}{x}\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots\right)=1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\cdots.$$

于 $k\to\infty$(即 $x\to 0$)，$k\ln\frac{k+1}{k}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2-\cdots\to 1$。

这样，对于大的 k，(5)式给出

$$\frac{u_{k+1}}{u_k}\frac{1}{w_{k+1}}-\frac{1}{w_k}\approx 1>0, \qquad \text{即}\frac{u_{k+1}}{u_k}\frac{1}{w_{k+1}}>\frac{1}{w_k},$$

亦即

$$\frac{u_{k+1}}{u_k}>\frac{w_{k+1}}{w_k}.$$

这是说，对于比较大的 k，级数(1)的各项比级数(4)的对应的项增长得快。既然级数(4)发散，级数(1)当然是发散的。

用完全类似的办法可以证明级数(2)发散。

(三) 勒让德方程的解不可能在 $x=+1$ 和 $x=-1$ 有限

上面已证明勒让德方程的级数解 $y_0(x)$ 和 $y_1(x)$ 在 $x=\pm 1$ 发散。那么，是否可能存在某个在 $x=\pm 1$ 为有限的解呢？事实上，§42习题5就是求勒让德方程在 $x=+1$ 为有限的解，不过这个解在 $x=-1$ 是发散的。

假定有一个解 $y(x)$ 在 $x=+1$ 和 $x=-1$ 是有限的。$y(x)$ 总可表为 $y_0(x)$ 和 $y_1(x)$ 的线性组合，

$$y(x)=C_0y_0(x)+C_1y_1(x). \qquad (6)$$

注意，如果把 x 一律换为 $-x$，勒让德方程并不改变。这是说，(6)式右边的 x 如换为 $-x$，

$$y(-x)=C_0y_0(-x)+C_1y_1(-x), \tag{7}$$

仍然是勒让德方程的解，并且也在 $x=+1$ 和 $x=-1$ 有限。由于 $y_0(x)$是偶函数，$y_1(x)$是奇函数，(7)可改写为

$$y(-x)=C_0y_0(x)-C_1y_1(x). \tag{8}$$

既然(6)和(8)都是勒让德方程在 $x=+1$ 和 $x=-1$ 为有限的解，它们的和即 $2C_0y_0(x)$，以及它们的差即 $2C_1y_1(x)$应当也是勒让德方程在 $x=+1$ 和 $x=-1$ 为有限的解。但是，上面已证明 $y_0(x)$和 $y_1(x)$ 在 $x=\pm1$ 发散，由此可见"有一个解 $y(x)$ 在 $x=-1$ 和 $x=+1$ 为有限"的假定不能成立。

十一、朗斯基行列式

如果 $y_1(x)$和 $y_2(x)$是二阶常微分方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \tag{1}$$

的两个线性独立解，则行列式

$$\Delta(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}=y_1(x)y_2'(x)-y_1'(x)y_2(x) \tag{2}$$

叫作微分方程(1)的**朗斯基行列式**。

不必求解微分方程(1)就能写出方程(1)的朗斯基行列式。事实上，既然 y_1 和 y_2 是方程(1)的解，自然有

$$y_1''+py_1'+qy_1=0, \tag{3}$$

$$y_2''+py_2'+qy_2=0. \tag{4}$$

以 y_1 遍乘(4)的每一项，以 y_2 遍乘(3)的每一项，两者相减，

$$(y_1y_2''-y_1''y_2)+p(y_1y_2'-y_1'y_2)=0,$$

即

$$\frac{d\Delta(x)}{dx}+p\Delta(x)=0. \tag{5}$$

用 dx/Δ 遍乘(5)的每一项，就可逐项积分，

$$\int\frac{d\Delta(x)}{\Delta(x)}+\int p(x)dx=0.$$

由此得

$$\Delta(x)=\Delta_0 e^{-\int p(x)dx}. \tag{6}$$

只要求得微分方程(1)的一个特解 $y_1(x)$，就可利用朗斯基行列式求出线性独立的第二个特解 $y_2(x)$. 事实上，

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)=\frac{y_1y_2'-y_1'y_2}{y_1^2}=\frac{\Delta(x)}{y_1^2}.$$

把上式两边分别积分，得到从 y_1 求 y_2 的公式

$$\frac{y_2}{y_1}=\int\frac{\Delta(x)}{[y_1(x)]^2}dx. \tag{7}$$

更以(6)代入(7)，

$$y_2=y_1\int e^{-\int p(x)dx}\frac{1}{y_1^2}dx. \tag{8}$$

现在利用(8)来证明(42.14). 问题是这样的：在正则奇点 x_0 的邻域上，已就判定方程较大的根 s_1 求得(42.3)形式的解

$$y_1(x)=(x-x_0)^{s_1}[\text{以 } x_0 \text{ 为中心的某个泰勒级数}]。$$

由于判定方程两根之差 $s_1-s_2=h$ 为整数，未能求出(42.3)形式的第二个解。既然已经求得一个特解 $y_1(x)$，当然可以利用(8)把第二个解找出来。事实上，由于正则奇点 x_0 是 $p(x)$ 的不高于一阶的极点，

$$p(x)=p_{-1}(x-x_0)^{-1}+\text{以 } x_0 \text{ 为中心的泰勒级数},$$

$\int p(x)dx=p_{-1}\ln(x-x_0)+$以 x_0 为中心的泰勒级数。为简单起见，以下将省去"以 x_0 为中心"几个字。这样，

$$e^{-\int p(x)dx}=e^{-p_{-1}\ln(x-x_0)}e^{\text{泰勒级数}}=(x-x_0)^{-p_{-1}}[\text{泰勒级数}],$$

$$e^{-\int pdx}\frac{1}{y_1^2}=(x-x_0)^{-p_{-1}-2s_1}[\text{泰勒级数}].$$

判定方程是 $s(s-1)+sp_{-1}+q_{-2}=0$，即 $s^2-(1-p_{-1})s+q_{-2}=0$。可见 $s_1+s_2=1-p_{-1}$。因此，

$$e^{-\int p dx}\frac{1}{y_1^2}=(x-x_0)^{s_1+s_2-1-2s_1}[\text{泰勒级数}]$$

$$=(x-x_0)^{-1-h}[\text{泰勒级数}]。$$

既然判定方程两根之差 h 是整数，上式一般应有 $(x-x_0)^{-1}$项。把这项特别写出来，

$$e^{-\int p dx}\frac{1}{y_1^2}=A(x-x_0)^{-1}+(x-x_0)^{-1-h}[\text{泰勒级数}],$$

$$\int e^{-\int p dx}\frac{1}{y_1^2}dx=A\ln(x-x_0)+(x-x_0)^{-h}[\text{泰勒级数}]。$$

于是，按照(8)，

$$y_2(x)=y_1(x)A\ln(x-x_0)+(x-x_0)^{s_1-h}[\text{泰勒级数}]$$

$$=Ay_1\ln(x-x_0)+\sum_{k=s_2}^{\infty}a_k(x-x_0)^k.$$

这就证明(42.14)。

十二、勒让德多项式

$$P_l(x)=\frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l$$

$$=\sum_{k=0}^{\frac{l}{2}或\frac{l-1}{2}}(-1)^k\frac{(2l-2k)!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!}x^{l-2k}$$

$$=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2l-1)}{l!}\left[x^l-\frac{l(l-1)}{2(2l-1)}x^{l-2}\right.$$

$$\left.+\frac{l(l-1)(l-2)(l-3)}{2\cdot4(2l-1)(2l-3)}x^{l-4}+\cdots\right]$$

$$P_l(1)=1,\quad |P_l(x)|\leqslant1.$$

$$P_{2n+1}(0)=0,\quad P_{2n}(0)=(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}$$

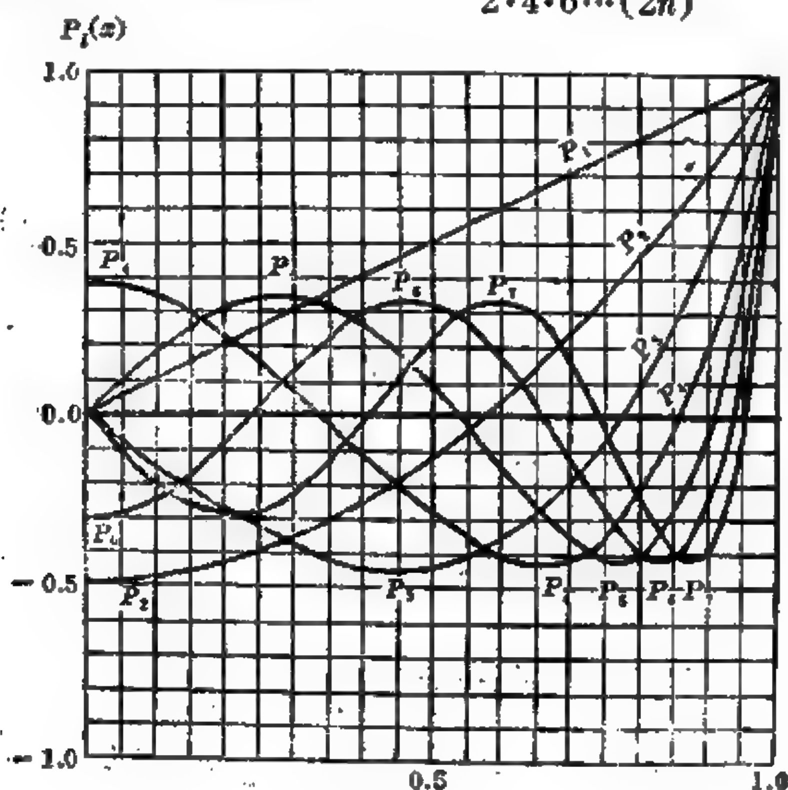


图 120

$$P_0(x)=1$$

$$P_1(x)=x=\cos\theta$$

$$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)=\frac{1}{4}(3\cos2\theta+1)$$

$$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)=\frac{1}{8}(5\cos3\theta+3\cos\theta)$$

$$P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)=\frac{1}{64}(35\cos4\theta+20\cos2\theta+9)$$

$$P_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$$

$$=\frac{1}{128}(63\cos5\theta+35\cos3\theta+30\cos\theta)$$

$$P_6(x)=\frac{1}{16}(231x^6-315x^4+105x^2-5)$$

$$=\frac{1}{512}(231\cos 6\theta+126\cos 4\theta+105\cos 2\theta+50)$$

十三、缔合勒让德函数

$$P_l^m(x)=\frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^l l!}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l$$

$$P_l^{-m}(x)=\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(x)$$

$$P_1^1(x)=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}=\sin\theta$$

$$P_2^1(x)=3(1-x^2)^{\frac{1}{2}}x=\frac{3}{2}\sin 2\theta$$

$$P_2^2(x)=3(1-x^2)=\frac{3}{2}(1-\cos 2\theta)$$

$$P_3^1(x)=\frac{3}{2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}(5x^2-1)=\frac{3}{8}(\sin\theta+5\sin 3\theta)$$

$$P_3^2(x)=15(1-x^2)x=\frac{15}{4}(\cos\theta-\cos 3\theta)$$

$$P_3^3(x)=15(1-x^2)^{\frac{3}{2}}=\frac{15}{4}(3\sin\theta-\sin 3\theta)$$

$$P_4^1(x)=\frac{5}{2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}(7x^3-3x)$$

$$=\frac{5}{16}(2\sin 2\theta+7\sin 4\theta)$$

$$P_4^2(x)=\frac{15}{2}(1-x^2)(7x^2-1)$$

$$=\frac{15}{16}(3+4\cos 2\theta-7\cos 4\theta)$$

$$P_4^3(x)=105(1-x^2)^{\frac{3}{2}}x=\frac{105}{8}(2\sin 2\theta-\sin 4\theta)$$

$$P_4^4(x)=105(1-x^2)^2=\frac{105}{8}(3-4\cos 2\theta+\cos 4\theta)$$

十四、贝塞耳函数

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$
0.00	+1.000	0.000						
0.10	+0.998	+0.050	4.10	−0.389	−0.103	8.10	+0.148	+0.248
0.20	+0.990	+0.100	4.20	−0.377	−0.139	8.20	+0.122	+0.258
0.30	+0.978	+0.148	4.30	−0.361	−0.172	8.30	+0.096	+0.266
0.40	+0.960	+0.196	4.40	−0.342	−0.203	8.40	+0.069	+0.271
0.50	+0.938	+0.242	4.50	−0.321	−0.231	8.50	+0.042	+0.273
0.60	+0.912	+0.287	4.60	−0.296	−0.257	8.60	+0.015	+0.273
0.70	+0.881	+0.329	4.70	−0.269	−0.279	8.70	−0.013	+0.270
0.80	+0.846	+0.369	4.80	−0.240	−0.299	8.80	−0.039	+0.264
0.90	+0.808	+0.4[illegible]6	4.90	−0.210	−0.315	8.90	−0.065	+0.256
1.00	+0.765	+0.440	5.00	−0.178	−0.328	9.00	−0.090	+0.245
1.10	+0.720	+0.471	5.10	−0.114	−0.337	9.10	−0.114	+0.232
1.20	+0.671	+0.498	5.20	−0.110	−0.343	9.20	−0.137	+0.217
1.30	+0.620	+0.522	5.30	−0.076	−0.346	9.30	−0.158	+0.200
1.40	+0.567	+0.542	5.40	−0.041	−0.345	9.40	−0.177	+0.182
1.50	+0.512	+0.558	5.50	−0.007	−0.341	9.50	−0.194	+0.161
1.60	+0.455	+0.570	5.60	+0.027	−0.334	9.60	−0.209	+0.140
1.70	+0.398	+0.578	5.70	+0.060	−0.324	9.70	−0.222	+0.117
1.80	+0.340	+0.582	5.80	+0.092	−0.311	9.80	−0.232	+0.093
1.90	+0.282	+0.581	5.90	+0.122	−0.295	9.90	−0.240	+0.068
2.00	+0.224	+0.577	6.00	+0.151	−0.277	10.00	−0.246	+0.013
2.10	+0.167	+0.568	6.10	+0.177	−0.256	10.10	−0.249	+0.018
2.20	+0.110	+0.556	6.20	+0.202	−0.233	10.20	−0.250	−0.007
2.30	+0.056	+0.540	6.30	+0.224	−0.208	10.30	−0.248	−0.031
2.40	+0.002	+0.520	6.40	+0.243	−0.182	10.40	−0.243	−0.055
2.50	−0.048	+0.497	6.50	+0.260	−0.154	10.50	−0.237	−0.079
2.60	−0.097	+0.471	6.60	+0.274	−0.125	10.60	−0.228	−0.101
2.70	−0.142	+0.442	6.70	+0.285	−0.095	10.70	−0.216	−0.122
2.80	−0.185	+0.410	6.80	+0.293	−0.065	10.80	−0.203	−0.142
2.90	−0.224	+0.375	6.90	+0.298	−0.035	10.90	−0.188	−0.160
3.00	−0.260	+0.339	7.00	+0.300	−0.005	11.00	−0.171	−0.177
3.10	−0.292	+0.301	7.10	+0.299	+0.025	11.10	−0.153	−0.191
3.20	−0.320	+0.261	7.20	+0.295	+0.054	11.20	−0.133	−0.204
3.30	−0.344	+0.221	7.30	+0.288	+0.083	11.30	−0.112	−0.214
3.40	−0.364	+0.179	7.40	+0.279	+0.110	11.40	−0.090	−0.222
3.50	−0.380	+0.137	7.50	+0.266	+0.135	11.50	−0.068	−0.228
3.60	−0.392	+0.095	7.60	+0.252	+0.159	11.60	−0.045	−0.232
3.70	−0.399	+0.054	7.70	+0.235	+0.181	11.70	−0.021	−0.233
3.80	−0.403	+0.013	7.80	+0.215	+0.201	11.80	−0.002	−0.232
3.90	−0.402	−0.027	7.90	+0.194	+0.219	11.90	+0.025	−0.229
4.00	−0.397	−0.066	8.00	+0.172	+0.235	12.00	+0.048	−0.223

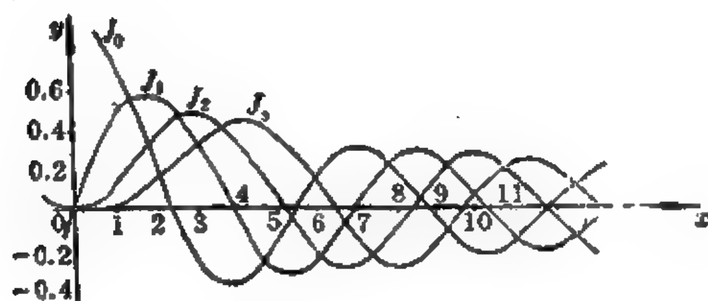


图 121

$J_0(x)$和$J_1(x)$的前十个根$x_n^{(0)}$和$x_n^{(1)}$

n	$x_n^{(0)}$	$\|J_1(x_n^{(0)})\|$	$x_n^{(1)}$	n	$x_n^{(0)}$	$\|J_1(x_n^{(1)})\|$	$x_n^{(1)}$
1	2.4048	0.5191	3.8317	6	18.0711	0.1877	19.6159
2	5.5201	0.3403	7.0156	7	21.2116	0.1733	22.7601
3	8.6537	0.2715	10.1735	8	24.3525	0.1617	25.9037
4	11.7915	0.2325	13.3237	9	27.4935	0.1522	29.0468
5	14.9309	0.2065	16.4706	10	30.6346	0.1412	32.1897

方程$J_0(x)/J_1(x)=x/h$的前六个根

h	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0.0	0.0000	3.8317	7.0156	10.1735	13.3237	16.4706
0.01	0.1412	3.8343	7.0170	10.1745	13.3244	16.4712
0.02	0.1995	3.8369	7.0184	10.1754	13.3252	16.4718
0.03	0.2814	3.8421	7.0213	10.1774	13.3267	16.4731
0.06	0.3438	3.8473	7.0241	10.1794	13.3282	16.4743
0.08	0.3960	3.8525	7.0270	10.1813	13.3297	16.4755
0.10	0.4417	3.8577	7.0298	10.1833	13.3312	16.4767
0.15	0.5376	3.8706	7.0369	10.1882	13.3349	16.4797
0.20	0.6170	3.8835	7.0440	10.1931	13.3387	16.4828
0.30	0.7465	3.9091	7.0582	10.2029	13.3462	16.4888
0.40	0.8516	3.9344	7.0723	10.2127	13.3537	16.4949
0.50	0.9408	3.9594	7.0864	10.2225	13.3611	16.5010
0.60	1.0184	3.9841	7.1004	10.2322	13.3686	16.5070
0.70	1.0873	4.0085	7.1143	10.2419	13.3761	16.5131

续前表

h	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0.80	1.1490	4.0325	7.1282	10.2519	13.3835	16.5191
0.90	1.2048	4.0562	7.1421	10.2613	13.3910	16.5251
1.0	1.2558	4.0795	7.1558	10.2710	13.3984	16.5312
1.5	1.4569	4.1902	7.2223	10.3188	13.4353	16.5612
2.0	1.5994	4.2910	7.2884	10.3658	13.4719	16.5910
3.0	1.7887	4.4634	7.4103	10.4566	13.5434	16.6499
4.0	1.9081	4.6018	7.5201	10.5423	13.6125	16.7073
5.0	1.9898	4.7131	7.6177	10.6223	13.6786	16.7630
6.0	2.0490	4.8033	7.7039	10.6964	13.7414	16.8168
7.0	2.0937	4.8772	7.7797	10.7646	13.8008	16.8684
8.0	2.1286	4.9384	7.8464	10.8271	13.8566	16.9179
9.0	2.1566	4.9897	7.9051	10.8842	13.9090	16.9650
10.0	2.1795	5.0332	7.9569	10.9363	13.9580	17.0099
15.0	2.2509	5.1773	8.1422	11.1367	14.1576	17.2008
20.0	2.2880	5.2568	8.2534	11.2677	14.2983	17.3442
30.0	2.2361	5.3410	8.3771	11.4221	14.4748	17.5348
40.0	2.3455	5.3846	8.4432	11.5081	14.5774	17.6508
50.0	2.3572	5.4112	8.4840	11.5621	14.6433	17.7272
60.0	2.3651	5.4291	8.5116	11.5990	14.6889	17.7807
80.0	2.3750	5.4516	8.5466	11.6461	14.7475	17.8502
100.0	2.3809	5.4652	8.5678	11.6747	14.7834	17.8931
∞	2.4048	5.5201	8.6537	11.7915	14.9309	18.0711

十五、诺埃曼函数

在数学理论中，定义诺埃曼函数

$$N_\nu(x)=\frac{J_\nu(x)\cos\pi\nu-J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu}.$$

当阶数 ν 为整数 m 时，

$$N_m(x)=\lim_{\nu\to m}N_\nu(x)=\lim_{\nu\to m}\frac{J_\nu(x)\cos\pi\nu-J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu}.$$

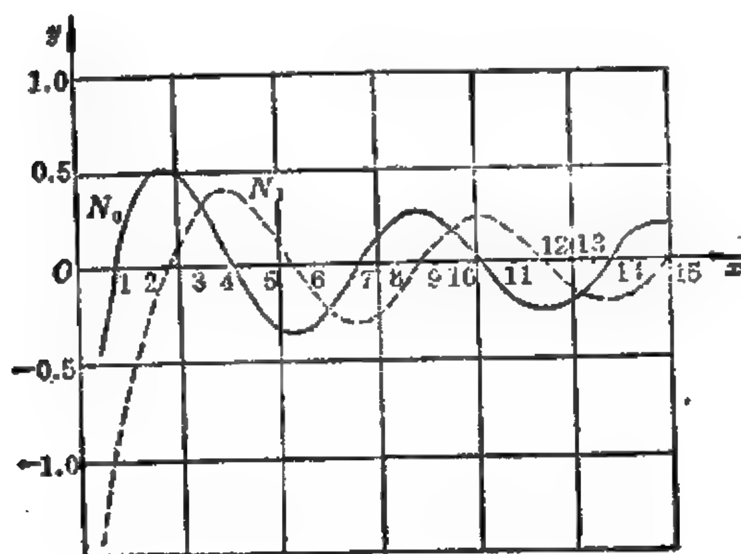


图 122

运用罗毕达法则，

$$N_m(x)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu}-(-1)^m\frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu}\right]_{\nu\to m}. \tag{1}$$

先取 $J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}$ 的一般项，对 ν 求导数，

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\left[\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}\right]$$

$$=\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}\left[\ln\frac{x}{2}-\frac{\Gamma'(\nu+k+1)}{\Gamma(\nu+k+1)}\right].$$

令 $\nu\longrightarrow$ 整数 m，运用附录二十四的(17)式，

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\left[\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}\right]_{\nu\to m}$$

$$=\frac{(-1)^k}{k!\,(m+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k}$$

$$\left[\ln\frac{x}{2}-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots+\frac{1}{m+k}\right)+C\right],$$

其中 C 为欧勒常数

$$C=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}-\ln k\right)=0.577216\cdots.$$

这样，

$$\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\bigg|_{\nu\to m}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(m+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k}$$

$$\times\left[\ln\frac{x}{2}+C-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m+k}\right)\right]$$

$$=J_m(x)\left[\ln\frac{x}{2}+C\right]$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(m+k)!}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m+k}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k}.$$

在右边的叠加中，令 $k=n-m$ 即 $n=m+k$，则

$$\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\bigg|_{\nu\to m}=J_m(x)\left[\ln\frac{x}{2}+C\right]$$

$$-\sum_{n=m}^{\infty}\frac{(-1)^{n-m}}{n!(n-m)!}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2n}. \qquad (2)$$

再看 $J_{-\nu}(x)$

$$J_{-\nu}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2n}$$

$$=\frac{(x/2)^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)}\left[1+\frac{1}{1!(\nu-1)}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(n-1)!(\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2(m-1)}\right]$$

$$+\sum_{n=m}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2n}.$$

利用公式 $\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)=\dfrac{\pi}{\sin\pi\nu}$ 以及 $\Gamma(\nu+1)=\nu\Gamma(\nu)$，

$$J_{-\nu}(x)=\frac{\sin\pi\nu}{\pi}\sum_{n=0}^{m-1}\frac{\Gamma(\nu-n)}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2n}$$

$$+\sum_{n=m}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2n}.$$

仿照上面对 ν 求导，

$$\left.\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial\nu}\right|_{\nu\to m}=(-1)^{m+1}J_m(x)\left[\ln\frac{x}{2}+C\right]$$

$$+(-1)^m\sum_{n=0}^{m-1}\frac{(m-n-1)!}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2n}$$

$$+\sum_{n=m}^{\infty}\frac{(-1)^{n-m}}{n!(n-m)!}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-m}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2n}. \quad (3)$$

以(2)和(3)代入(1)，得

$$N_m(x)=\frac{2}{\pi}J_m(x)\left(\ln\frac{x}{2}+C\right)$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{m-1}\frac{(m-n-1)!}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2n}$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{(-1)^{n-m}}{n!(n-m)!}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-m}\right)\right.$$

$$\left.+\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\right]\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2n}.$$

$J_0(x)N_0(kx)-N_0(x)J_0(kx)=0$ 的前五个根

k	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1.2	15.7014	31.4126	47.1217	62.8304	78.5385
1.5	6.2702	12.5598	18.8451	25.1294	31.4133
2.0	3.1230	6.2734	9.4182	12.5614	15.7040
2.5	2.0732	4.1773	6.2754	8.3717	10.4672
3.0	1.5485	3.1291	4.7038	6.2767	7.8487
3.5	1.2339	2.5002	3.7608	5.0196	6.2776
4.0	1.0244	2.0809	3.1322	4.1816	5.2301

十六、虚宗量汉克函数

x	$K_0(x)$	$K_1(x)$	x	$K_0(x)$	$K_1(x)$	x	$K_0(x)$	$K_1(x)$
0.1	2.4271	9.8538	2.1	0.1008	0.1227	4.1	0.0098	0.0111
0.2	1.7527	4.7760	2.2	0.0893	0.1079	4.2	0.0089	0.0099
0.3	1.3725	3.0560	2.3	0.0791	0.0950	4.3	0.0080	0.0089
0.4	1.1145	2.1844	2.4	0.0702	0.0837	4.4	0.0071	0.0079
0.5	0.9244	1.6564	2.5	0.0623	0.0739	4.5	0.0064	0.0071
0.6	0.7775	1.3028	2.6	0.0554	0.0653	4.6	0.0057	0.0063
0.7	0.6605	1.0503	2.7	0.0492	0.0577	4.7	0.0051	0.0056
0.8	0.5653	0.8618	2.8	0.0438	0.0511	4.8	0.0046	0.0051
0.9	0.4867	0.7165	2.9	0.0390	0.0453	4.9	0.0041	0.0045
1.0	0.4210	0.6019	3.0	0.0347	0.0402	5.0	0.0037	0.0040
1.1	0.3656	0.5098	3.1	0.0310	0.0356	5.1	0.0033	0.0036
1.2	0.3185	0.4346	3.2	0.0276	0.0316	5.2	0.0030	0.0032
1.3	0.2782	0.3725	3.3	0.0246	0.0281	5.3	0.0027	0.0029
1.4	0.2437	0.3208	3.4	0.0220	0.0250	5.4	0.0024	0.0026
1.5	0.2138	0.2774	3.5	0.0196	0.0222	5.5	0.0021	0.0023
1.6	0.1880	0.2406	3.6	0.0175	0.0198	5.6	0.0019	0.0021
1.7	0.1655	0.2094	3.7	0.0156	0.0176	5.7	0.0017	0.0019
1.8	0.1459	0.1826	3.8	0.0140	0.0157	5.8	0.0015	0.0017
1.9	0.1288	0.1597	3.9	0.0125	0.0140	5.9	0.0014	0.0015
2.0	0.1139	0.1399	4.0	0.0112	0.0125	6.0	0.0012	0.0013

十七、厄密多项式

常微分方程

$$y''-2xy'+\lambda y=0 \quad (-\infty<x<\infty) \tag{1}$$

叫作厄密方程。

$x_0=0$ 是厄密方程的常点。在 $x_0=0$ 的邻域上的级数解是

$$y(x)=c_0y_0(x)+c_1y_1(x), \tag{2}$$

$$\begin{cases} y_0(x)=1+\dfrac{-\lambda}{2!}x^2+\dfrac{-\lambda(4-\lambda)}{4!}x^4+\cdots+\dfrac{(-\lambda)(4-\lambda)\cdots(4n-4-\lambda)}{(2n)!}x^{2n}+\cdots, \\ y_1(x)=x+\dfrac{2-\lambda}{3!}x^3+\dfrac{(2-\lambda)(6-\lambda)}{5!}x^5+\cdots+\dfrac{(2-\lambda)(6-\lambda)\cdots(4n-2-\lambda)}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\cdots. \end{cases} \tag{3}$$

级数的收敛半径为无限大。

如 λ 为 4 的倍数，则 $y_0(x)$退化为$\frac{1}{2}\lambda$次多项式。如 λ 为偶数但不是 4 的倍数，则 $y_1(x)$ 退化为 $\frac{1}{2}\lambda$ 次多项式。用适当的常数乘这些多项式使最高幂项成为$(2x)^n$，就叫作**厄密多项式**，记作 $H_n(x)$.

于 $\lambda=0$，　有 $H_0=1$.

$\lambda=2$，　$H_1=2x$.

$\lambda=4$，　$H_2=4x^2-2$.

$\lambda=6$，　$H_3=8x^3-12x$.

$\lambda=8$，　$H_4=16x^4-48x^2+12$.

$\lambda=10$，　$H_5=32x^5-160x^3+120x$.

$\lambda=12$，　$H_6=64x^6-480x^4+720x-120$.

函数 $\Psi(t,x)=e^{2tx-t^2}$ 在 $t_0=0$ 的邻域上是解析的，可在 $t_0=0$ 的邻域上展开为泰勒级数

$$\Psi(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x)\frac{t^n}{n!}. \tag{4}$$

现在来证明(4)式里的 $H_n(x)$正是厄密多项式。事实上，容易验证 $\Psi(t,x)$满足

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x}=2t\Psi,$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}+2(t-x)\Psi=0.$$

以展开式(4)代入，即成为

$$\sum_{n=0}^{\infty}H'_n(x)\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}2H_n(x)\frac{t^{n+1}}{n!},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} nH_n(x)\frac{t^{n-1}}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty} 2H_n(x)\frac{t^{n+1}}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty} 2xH_n(x)\frac{t^n}{n!}=0$$

比较两边的同幂项，得

$$H_n'(x)=2nH_{n-1}(x), \tag{5}$$

$$H_{n+1}(x)-2xH_n(x)+2nH_{n-1}(x)=0. \tag{6}$$

把(6)式里的 n 全换为 $n-1$，得

$$H_n(x)-2xH_{n-1}(x)+2(n-1)H_{n-2}(x)=0.$$

利用(5)把上式改写为

$$H_n(x)-2x\frac{1}{2n}H_n'(x)+2(n-1)\frac{1}{2(n-1)}H_{n-1}'=0.$$

再利用(5)进一步改写，

$$H_n(x)-\frac{x}{n}H_n'(x)+\frac{1}{2n}H_n''(x)=0,$$

这正是厄密方程(1)。厄密方程的多项式解只能是厄密多项式，最多相差某个常数因子。经具体验算，得知并不差常数因子。(4)里的 $H_n(x)$ 确是厄密多项式。函数

$$\Psi(t,x)=e^{2tx-t^2}$$

因而叫作厄密多项式的母函数。

(6)式是厄密多项式的递推公式。

既然 $\frac{1}{n!}H_n(x)$ 是 $\Psi(t,x)$ 的泰勒展开的系数，那就有

$$H_n(x)=\frac{\partial^n\Psi}{\partial t^n}\bigg|_{t=0}=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}. \tag{7}$$

上式利用了§9习题1．这就是厄密多项式的微分表示式。

厄密方程(1)可改写为斯特姆-刘维型

$$\frac{d}{dx}\left[e^{-x^2}\frac{dy}{dx}\right]+\lambda e^{-x^2}y=0\quad(-\infty<x<\infty). \tag{8}$$

作为斯特姆-刘维本征值问题的正交关系(43.9)的特例，厄密多项

式在区间 $-\infty<x<\infty$ 上带权重 e^{-x^2} 正交，

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}dx=0 \quad (m\neq n). \tag{9}$$

厄密多项式 $H_n(x)$ 的模 N_n 可借助微分表示式 (7) 并累次分部积分而算得，

$$N_n^2=\int_{-\infty}^{\infty}\left[H_n(x)\right]^2 e^{-x^2}dx=2^n n!\sqrt{\pi}. \tag{10}$$

根据斯特姆-刘维本征值问题的性质④[见§ 43]，在区间 $-\infty<x<\infty$ 上，以厄密多项式为基本函数族，可把函数 $f(x)$ 展开为

$$\begin{cases} f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n H_n(x), \\ f_n=\dfrac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)H_n(x)e^{-x^2}dx. \end{cases} \tag{11}$$

十八、拉盖尔多项式

常微分方程

$$xy''+(1-x)y'+\lambda y=0 \quad (0<x<\infty) \tag{1}$$

叫作拉盖尔方程。

$x_0=0$ 是拉盖尔方程的正则奇点。在 $x_0=0$ 及其邻域上为有限的级数解是

$$y(x)=a_0\left[1+\frac{-\lambda}{(1!)^2}x+\frac{(-\lambda)(1-\lambda)}{(2!)^2}x^2+\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{(-\lambda)(1-\lambda)\cdots(k-1-\lambda)}{(k!)^2}x^k+\cdots\right]. \tag{2}$$

级数的收敛半径为无限大。

如 λ 为整数，解 $y(x)$ 退化为 λ 次多项式。用适当的常数乘这些多项式使最高幂项成为 $(-x)^n$，就叫作拉盖尔多项式，记作 $L_n(x)$。

于 $\lambda=0$，有 $L_0(x)=1$。

$\lambda=1$，　$L_1(x)=-x+1$。

$\lambda=2$，　$L_2(x)=x^2-4x+2$。

$\lambda=3$，　$L_3(x)=-x^3+9x^2-18x+6$。

$\lambda=4$，　$L_4(x)=x^4-16x^3+72x^2-96x+24$。

$\lambda=5$，　$L_5(x)=-x^5+25x^4-200x^3+600x^2-600x+120$。

函数 $\Psi(t,x)=\dfrac{e^{-xt/(1-t)}}{1-t}$ 在 $t_0=0$ 的邻域上是解析的，可在 $t_0=0$ 的邻域上展开为泰勒级数

$$\Psi(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}L_n(x)\frac{t^n}{n!}. \tag{3}$$

现在来证明(3)式里的 $L_n(x)$ 正是拉盖尔多项式。既然(3)式里的 $\dfrac{1}{n!}L_n(x)$ 是 $\Psi(t,x)$ 的泰勒展开的系数，那就有

$$L_n(x)=\left.\frac{\partial^n\Psi}{\partial t^n}\right|_{t=0}=e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x}). \tag{4}$$

上式利用了§9习题2. 我们只需证明(4)式正是拉盖尔多项式就行了。令

$$z=x^ne^{-x},$$

容易验证，z 满足

$$xz'+(x-n)z=0.$$

上式对 x 求导 $n+1$ 次，

$$xz^{(n+2)}+(x+1)z^{(n+1)}+(n+1)z^{(n)}=0.$$

这是说，$u\equiv z^{(n)}$ 满足

$$xu''+(x+1)u'+(n+1)u=0.$$

参照(4)式，作函数变换 $u(x)=e^{-x}L(x)$，得 $L(x)$ 所满足的方程

$$xL''+(1-x)L'+nL=0,$$

这正是拉盖尔方程(1)。拉盖尔方程的多项式解只能是拉盖尔多项式，最多相差某个常数因子。经具体验算，得知并不差常数因子。(3)和(4)里的 $L_n(x)$ 确是拉盖尔多项式。函数

$$\Psi(t,x)=\frac{e^{-xt/(1-t)}}{1-t}$$

因而叫作拉盖尔多项式的母函数。

(4)式是拉盖尔多项式的微分表示式。

拉盖尔方程(1)可改写为斯特姆-刘维型

$$\frac{d}{dx}\left[xe^{-x}\frac{dy}{dx}\right]+\lambda e^{-x}y=0\quad(0<x<\infty). \tag{5}$$

作为斯特姆-刘维本征值问题的正交关系(43.9)的特例，拉盖尔多项式在区间 $0<x<\infty$ 上带权重 e^{-x} 正交，

$$\int_0^\infty L_m(x)L_n(x)e^{-x}dx=0\quad(m\neq n). \tag{6}$$

拉盖尔多项式的模 N_n 可借助微分表示式(4)并累次分部积分而算得，

$$N_n^2=\int_0^\infty[L_n(x)]^2e^{-x}dx=(n!)^2. \tag{7}$$

根据斯特姆-刘维本征值问题的性质④[见§ 43]，在区间 $0<x<\infty$ 上，以拉盖尔多项式为基本函数族，可把函数 $f(x)$ 展开为

$$\begin{cases}f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_nL_n(x),\\ f_n=\dfrac{1}{(n!)^2}\displaystyle\int_0^\infty f(x)L_n(x)e^{-x}dx.\end{cases} \tag{8}$$

十九、车贝雪夫多项式

按照§ 26，区间 $0<\theta<\pi$ 上的函数 $f(\theta)$ 可以展开为傅里叶余弦级数，

$$\begin{cases} f(\theta)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\cos k\theta, \\ a_k=\frac{2}{\delta_k\pi}\int_0^{\pi}f(\theta)\cos k\theta d\theta,\ \delta_k=\begin{cases}2(k=0);\\1(k\neq 0).\end{cases} \end{cases} \tag{1}$$

这是说，在区间$(0,\pi)$上，余弦函数族

$$\cos k\theta \quad (k=0,1,2,\cdots) \tag{2}$$

是完整的。作代换

$$x=\cos\theta, \tag{3}$$

完整函数族(2)中的每一个都成为x的多项式，叫做**第一类切贝雪夫多项式**，记作$T_k(x)$，

$$T_k(x)=\cos k\theta=\cos(k\arccos x)(k=0,1,2,\cdots). \tag{4}$$

同理，按照§ 26，区间$0<\theta<\pi$上的函数$f(\theta)$可以展开为傅里叶正弦级数，

$$\begin{cases} f(\theta)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin k\theta, \\ b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(\theta)\sin k\theta d\theta. \end{cases} \tag{5}$$

这是说，在区间$(0,\pi)$上，正弦函数族

$$\sin k\theta \quad (k=1,2,3,\cdots) \tag{6}$$

是完整的。作代换(3)，完整函数族(6)的每一个作为x的函数，叫作**第二类车贝雪夫多项式**，记作$U_k(x)$，

$$U_k(x)=\sin k\theta=\sin(k\arccos x)(k=1,2,3,\cdots) \tag{7}$$

那么，$T_k(x)$和$U_k(x)$的具体表达式是怎样的呢？

$$\begin{aligned}T_k(x)+iU_k(x)&=\cos k\theta+i\sin k\theta=e^{ik\theta}=(e^{i\theta})^k\\&=(\cos\theta+i\sin\theta)^k=(x+i\sqrt{1-x^2})^k.\end{aligned}$$

把右边用二项式定理展开，比较两边的实部和虚部，得

$$\begin{cases} T_k(x)=\sum_{n=0}^{k/2}(-1)^n\frac{k!}{(2n)!\,(k-2n)!}(1-x^2)^n x^{k-2n}, \\ U_k(x)=\sum_{n=0}^{(k-1)/2}(-1)^n\frac{k!}{(2n+1)!\,(k-2n-1)!} \\ \qquad\times(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}x^{k-2n-1}. \end{cases} \tag{8}$$

其实，还可以利用递推公式把车贝雪夫多项式依次推算出来。三角学的和差化积公式

$$\begin{cases} \cos(k+1)\theta+\cos(k-1)\theta=2\cos\theta\cos k\theta, \\ \sin(k+1)\theta+\sin(k-1)\theta=2\cos\theta\sin k\theta. \end{cases}$$

正是车贝雪夫多项式的递推公式

$$\begin{cases} T_{k+1}(x)=2xT_k(x)-T_{k-1}(x), \\ U_{k+1}(x)=2xU_k(x)-U_{k-1}(x). \end{cases} \tag{9}$$

显然，$T_0(x)=1, T_1(x)=\cos\theta=x; U_1(x)=\sin\theta=\sqrt{1-x^2}$, $U_2(x)=\sin 2\theta=2x\sqrt{1-x^2}$。于是，运用递推公式(9)很容易得出下表：

$T_0(x)=1$,

$T_1(x)=x$, $\qquad U_1(x)=\sqrt{1-x^2}$,

$T_2(x)=2x^2-1$, $\qquad U_2(x)=\sqrt{1-x^2}\,2x$,

$T_3(x)=4x^3-3x$, $\qquad U_3(x)=\sqrt{1-x^2}(4x^2-1)$,

$T_4(x)=8x^4-8x^2+1$, $\qquad U_4(x)=\sqrt{1-x^2}(8x^3-4x)$,

$T_5(x)=16x^5-20x^3+5x$, $\qquad U_5(x)=\sqrt{1-x^2}(16x^4-12x^2+1)$

$T_6(x)=32x^6-48x^4+18x^2-1$. $\qquad U_6(x)=\sqrt{1-x^2}(32x^5-32x^3+6x)$.

由函数族(2)在区间$(0,\pi)$上的正交关系$\int_0^\pi \cos k\theta\cos n\theta d\theta=0$ $(k\neq n)$，以及函数族(6)在区间$(0,\pi)$上的正交关系$\int_0^\pi \sin k\theta\sin n\theta d\theta=0(k\neq n)$，立刻得出车贝雪夫多项式在区间$(-1,+1)$上带权重

$1/\sqrt{1-x^2}$正交，

$$\int_{-1}^{+1} T_k(x)T_n(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=0, \quad (k\neq n).$$

$$\int_{-1}^{+1} U_k(x)U_n(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=0$$

由余弦函数的模的平方的公式$\int_0^\pi(\cos k\theta)^2 d\theta=\pi\delta_k$，以及正弦函数的模的平方的公式$\int_0^\pi(\sin k\theta)^2 d\theta=\pi$，立刻得出车贝雪夫多项式的模的平方的公式

$$\int_{-1}^{+1}[T_k(x)]^2\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\pi\delta_k,$$

$$\int_{-1}^{+1}[U_k(x)]^2\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\pi.$$

傅里叶余弦级数展开公式(1)和傅里叶正弦级数展开公式(5)，改用车贝雪夫多项式表示出来，

$$\begin{cases} f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kT_k(x), \\ a_k=\dfrac{2}{\delta_k\pi}\int_{-1}^{+1}f(x)T_k(x)\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_kU_k(x), \\ b_k=\dfrac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1}f(x)U_k(x)\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \end{cases}$$

余弦函数 $y=\cos k\theta$ 和正弦函数 $y=\sin k\theta$ 满足常微分方程 $d^2y/d\theta^2+k^2y=0$. 作自变数代换(3)，微分方程成为

$$(1-x^2)T_k''-xT_k'+k^2T_k=0,\ (1-x^2)U_k''-xU_k'+k^2U_k=0. \quad (10)$$

这叫作车贝雪夫方程。

§ 25 习题(2)和(4)给出

$$\frac{1-z^2}{1-2z\cos\theta+z^2}=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\delta_k}z^k\cos k\theta,$$

$$\frac{z\sin\theta}{1-2z\cos\theta+z^2}=\sum_{k=1}^{\infty}z^k\sin k\theta,$$

即

$$\frac{1-z^2}{1-2zx+z^2}=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\delta_k}z^kT_k(x),$$

$$\frac{z\sqrt{1-x^2}}{1-2zx+z^2}=\sum_{k=1}^{\infty}z^kU_k(x).$$

因此，$(1-z^2)/(1-2zx+z^2)$是$T_k(x)$的母函数，$z\sqrt{1-x^2}/(1-2zx+z^2)$是$U_k(x)$的母函数。

二十、开耳芬方程

研究高频交变电流的趋肤效应。

在导体中，电流密度

$$J=\varepsilon\varepsilon_0\dot{E}+\sigma E\approx\sigma E,$$

而场强E和H满足麦克斯韦方程

$$\nabla\times H=J\approx\sigma E,\quad \dot{H}=-\frac{1}{\mu\mu_0}\nabla\times E.$$

对于谐变电流，$E(r,t)=\mathscr{E}(r)e^{i\omega t}$，$H(r,t)=\mathscr{H}(r)e^{i\omega t}$，$J(r,t)=\mathscr{J}(r)e^{i\omega t}$，上面那几个方程成为

$$\mathscr{J}=\sigma\mathscr{E},\ \nabla\times\mathscr{H}=\sigma\mathscr{E},\ i\omega\mathscr{H}=-\frac{1}{\mu\mu_0}\nabla\times\mathscr{E}.$$

从后两式消去$\mathscr{H}$，得

$$\Delta\mathscr{E}-i\omega\sigma\mu\mu_0\mathscr{E}=0.$$

这也是(矢量的)亥姆霍兹方程，但以前熟悉的实数k^2现在被纯虚数$-i\omega\sigma\mu\mu_0$所代替。$\mathscr{J}$既$=\sigma\mathscr{E}$，当然也遵守同一个方程式即$\Delta\mathscr{J}$

$-i\omega\sigma\mu\mu_0\mathscr{J}=0$. $\mathscr{J}$的 z 分量$\mathscr{J}_z$则满足(标量的)亥姆霍兹方程

$$\Delta\mathscr{J}_z-i\omega\sigma\mu\mu_0\mathscr{J}_z=0.$$

用分离变数法,以$\mathscr{J}_z=R(\rho)\Phi(\varphi)$代入,即得

$$\Phi(\varphi)=A\cos m\varphi+B\sin m\varphi,$$

$$\rho^2\frac{d^2R}{d\rho^2}+\rho\frac{dR}{d\rho}-(i\omega\sigma\mu\mu_0\rho^2+m^2)R=0.$$

最后这个方程正是开耳芬方程(49.1)。

二十一、拉普拉斯方程和亥姆霍兹方程的分离变数

方　程	球坐标系	柱坐标系	
拉普拉斯方程 $\Delta_3 u=0$	$R(r)=r^l,\ 1/r^{l+1}$ $\Theta(\theta)=P_l^m(\cos\theta)$ $\Phi(\varphi)=\cos m\varphi,\ \sin m\varphi$	$\Phi(\varphi)=\cos m\varphi,\ \sin m\varphi$ $Z(z)=e^{\sqrt{\mu}z},\ e^{-\sqrt{\mu}z}$ $R(\rho)=J_m(\sqrt{\mu}z),\ N_m(\sqrt{\mu}z)$	$Z(z)=\cos hz,\ \sin hz$ $R(\rho)=I_m(h\rho),\ K_m(h\rho)$
波动方程	$T(t)=\cos kat,\quad \sin kat;\quad \Delta v(r)+k^2v(r)=0$		
输运方程	$T(t)=e^{-k^2a^2t};\quad \Delta v(r)+k^2v(r)=0$		
亥姆霍兹方程 $\Delta_3 v+k^2v=0$	$R(r)=j_l(kr),\ n_l(kr)$ $\Theta(\theta)=P_l^m(\cos\theta)$ $\Phi(\varphi)=\cos m\varphi,\ \sin m\varphi$	$R(\rho)=J_m(\sqrt{k^2-h^2}\rho),\ N_m(\sqrt{k^2-h^2}\rho)$ $\Phi(\varphi)=\cos m\varphi,\ \sin m\varphi$ $Z(z)=\cos hz,\ \sin hz$	

表中未列入 $\mu=0$ 的情况和 $k=0$ 的情况,读者可自行补充。

方　程	平面极坐标系
拉普拉斯方程 $\Delta_2 u=0$	$\Phi(\varphi)=\cos m\varphi,\ \sin m\varphi$ $R(\rho)=\begin{cases}1,\quad \ln\rho & (m=0);\\ \rho^m,\ 1/\rho^m & (m\neq 0)\end{cases}$
亥姆霍兹方程 $\Delta_2 v+k^2v=0$	$R(\rho)=J_m(k\rho),\ N_m(k\rho)$ $\Phi(\varphi)=\cos m\varphi,\ \sin m\varphi$

二十二、其他正交曲线坐标

本书的例题和习题只用直角坐标、平面极坐标、球坐标和圆柱坐标。但是，在某些问题中，由于物体或边界的形状，却需要采用其他坐标系。这里简略介绍其他的正交曲线坐标。

(一) 抛物柱坐标 ξ,η,z

它跟直角坐标 x,y,z 的关系是

$$x=\frac{1}{2}(\xi^2-\eta^2),\quad y=\xi\eta,\quad z=z.$$

它跟圆柱坐标 ρ,φ,z 的关系是

$$\xi=\sqrt{2\rho}\sin\frac{\varphi}{2},\quad \eta=\sqrt{2\rho}\cos\frac{\varphi}{2},\quad z=z.$$

坐标曲面是：抛物柱面 $2\xi^2(x-\frac{1}{2}\xi^2)=-y^2$ 和 $2\eta^2(x+\frac{1}{2}\eta^2)=y^2$，以及平面 $z=$ 常数。

度规系数是

$$h_\xi=h_\eta=\sqrt{\xi^2+\eta^2},\quad h_z=1.$$

(二) 椭圆柱坐标 ξ,θ,z

它跟直角坐标 x,y,z 的关系是

$$x=a\operatorname{ch}\xi\cos\theta,\quad y=a\operatorname{sh}\xi\sin\theta,\quad z=z.$$

坐标曲面是：共焦点椭圆柱 $\frac{x^2}{a^2\operatorname{ch}^2\xi}+\frac{y^2}{a^2\operatorname{sh}^2\xi}=1$ 和双曲柱 $\frac{x^2}{a^2\cos^2\theta}-\frac{y^2}{a^2\sin^2\theta}=1$，以及平面 $z=$ 常数。

度规系数是

$$h_\xi=h_\theta=a\sqrt{\operatorname{ch}^2\xi-\cos^2\theta}=a\sqrt{\operatorname{sh}^2\xi+\sin^2\theta},\quad h_z=1.$$

(三) 旋转抛物面坐标 ξ,η,φ

它跟圆柱坐标 ρ,φ,z 的关系是

$$\rho=\xi\eta,\quad \varphi=\varphi,\quad z=\frac{1}{2}(\xi^2-\eta^2).$$

坐标曲面是：旋转抛物面$2\xi^2\left(z-\frac{1}{2}\xi^2\right)=-\rho^2, 2\eta^2\left(z+\frac{1}{2}\eta^2\right)=\rho^2$，以及平面$\varphi=$常数。

度规系数是

$$h_\xi=h_\eta=\sqrt{\xi^2+\eta^2},\quad h_\varphi=\xi\eta.$$

（四）长的旋转椭球坐标ξ,θ,φ

它跟圆柱坐标ρ,φ,z的关系是

$$\rho=a\operatorname{sh}\xi\sin\theta,\quad \varphi=\varphi,\quad z=a\operatorname{ch}\xi\cos\theta.$$

坐标曲面是：长的旋转椭球$\frac{\rho^2}{a^2\operatorname{sh}^2\xi}+\frac{z^2}{a^2\operatorname{ch}^2\xi}=1$，双叶旋转双曲面$\frac{z^2}{a^2\cos^2\theta}-\frac{\rho^2}{a^2\sin^2\theta}=1$（这些椭球和双曲面是共焦点的），以及平面$\varphi=$常数。

度规系数是

$$h_\xi=h_\theta=a\sqrt{\operatorname{ch}^2\xi-\cos^2\theta}=a\sqrt{\operatorname{sh}^2\xi+\sin^2\theta},\ h_\varphi=a\operatorname{sh}\xi\sin\theta.$$

（五）扁的旋转椭球坐标ξ,θ,φ

它跟圆柱坐标ρ,φ,z的关系是

$$\rho=a\operatorname{ch}\xi\cos\theta,\quad \varphi=\varphi,\quad z=a\operatorname{sh}\xi\sin\theta.$$

坐标曲面是：扁的旋转椭球$\frac{\rho^2}{a^2\operatorname{ch}^2\xi}+\frac{z^2}{a^2\operatorname{sh}^2\xi}=1$，单叶旋转双曲面$\frac{\rho^2}{a^2\cos^2\theta}-\frac{z^2}{a^2\sin^2\theta}=1$（这些椭球和双曲面是共焦点的），以及平面$\varphi=$常数。

度规系数是

$$h_\xi=h_\theta=a\sqrt{\operatorname{ch}^2\xi-\cos^2\theta}=a\sqrt{\operatorname{sh}^2\xi+\sin^2\theta},\ h_\varphi=a\operatorname{ch}\xi\cos\theta.$$

（六）椭球坐标ξ,η,ζ

它跟直角坐标x,y,z的关系是

$$\begin{cases} x=\sqrt{(\xi^2-a^2)(\eta^2-a^2)(\zeta^2-a^2)/(a^2-b^2)(a^2-c^2)}, \\ y=\sqrt{(\xi^2-b^2)(\eta^2-b^2)(\zeta^2-b^2)/(b^2-c^2)(b^2-a^2)}, \\ z=\sqrt{(\xi^2-c^2)(\eta^2-c^2)(\zeta^2-c^2)/(c^2-a^2)(c^2-b^2)}, \end{cases}$$

其中 a,b,c是常数，而且 $\xi>a>\eta>b>\zeta>c$。

坐标曲面是：三轴椭球 $\frac{x^2}{\xi^2-a^2}+\frac{y^2}{\xi^2-b^2}+\frac{z^2}{\xi^2-c^2}=1$，单叶双曲面 $-\frac{x^2}{a^2-\eta^2}+\frac{y^2}{\eta^2-b^2}+\frac{z^2}{\eta^2-c^2}=1$，双叶双曲面 $-\frac{x^2}{a^2-\zeta^2}$

$$-\frac{y^2}{b^2-\zeta^2}+\frac{z^2}{\zeta^2-c^2}=1.$$

度规系数是

$$\begin{cases} h_\xi=\sqrt{(\xi^2-\eta^2)(\xi^2-\zeta^2)/(\xi^2-a^2)(\xi^2-b^2)(\xi^2-c^2)}, \\ h_\eta=\sqrt{(\eta^2-\xi^2)(\eta^2-\zeta^2)/(\eta^2-a^2)(\eta^2-b^2)(\eta^2-c^2)}, \\ h_\zeta=\sqrt{(\zeta^2-\xi^2)(\zeta^2-\eta^2)/(\zeta^2-a^2)(\zeta^2-b^2)(\zeta^2-c^2)}. \end{cases}$$

（七）双极坐标 ξ,θ,z

它跟直角坐标的关系是

$$x=\frac{a\,\mathrm{sh}\xi}{\mathrm{ch}\xi-\cos\theta},\quad y=\frac{a\sin\theta}{\mathrm{ch}\xi-\cos\theta},\quad z=z.$$

坐标曲面是：圆柱 $(x-a\,\mathrm{cth}\xi)^2+y^2=a^2\mathrm{csch}^2\xi$ 和 $x^2+(y-a\,\mathrm{ctg}\theta)^2=a^2\csc^2\theta$，以及平面 $z=$常数。

度规系数是

$$h_\xi=h_\theta=\frac{a}{\mathrm{ch}\xi-\cos\theta},\quad h_z=1.$$

（八）双球坐标 ξ,θ,φ

它跟圆柱 ρ,φ,z 的关系是

$$\rho=\frac{a\sin\theta}{\mathrm{ch}\xi-\cos\theta},\quad \varphi=\varphi,\quad z=\frac{a\,\mathrm{sh}\xi}{\mathrm{ch}\xi-\cos\theta}.$$

坐标曲面是：球 $(z-a\,\mathrm{cth}\xi)^2+\rho^2=a^2\mathrm{csch}^2\xi$，曲面 $z^2+(\rho-a\,\mathrm{ctg}\theta)^2=a^2\csc^2\theta$，以及平面 $\varphi=$常数。

度规系数是

$$h_\xi = h_\theta = \frac{a}{\text{ch}\xi - \cos\theta}, \quad h_\varphi = \frac{a\sin\theta}{\text{ch}\xi - \cos\theta}.$$

求解 $\Delta_3 u = 0$ 时，作函数变换$u = v\sqrt{\text{ch}\xi - \cos\theta}$可化简方程。

（九）圆环坐标 ξ, θ, φ

它跟圆柱坐标 ρ, φ, z 的关系是

$$\rho = \frac{a\text{sh}\xi}{\text{ch}\xi - \cos\theta}, \quad \varphi = \varphi, \quad z = \frac{a\sin\theta}{\text{ch}\xi - \cos\theta}.$$

坐标曲面是：圆环面$(\rho - a\text{cth}\xi)^2 + z^2 = a^2\text{csch}^2\xi$，球$\rho^2 + (z - a\text{ctg}\theta)^2 = a^2\csc^2\theta$，以及平面 $\varphi =$ 常数。

度规系数是

$$h_\xi = h_\theta = \frac{a}{\text{ch}\xi - \cos\theta}, \quad h_\varphi = \frac{a\text{sh}\xi}{\text{ch}\xi - \cos\theta}.$$

求解 $\Delta_3 u = 0$ 时，作函数变换$u = v\sqrt{\text{ch}\xi - \cos\theta}$可化简方程。

二十三、$x + h\text{tg}x = 0$ 的前六个根

h	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	1.5708	4.7124	7.8540	10.9956	14.1372	17.2788
0.1	1.6320	4.7335	7.8667	11.0047	14.1443	17.2845
0.2	1.6887	4.7544	7.8794	11.0137	14.1513	17.2903
0.3	1.7414	4.7751	7.8920	11.0228	14.1584	17.2961
0.4	1.7906	4.7956	7.9046	11.0318	14.1654	17.3019
0.5	1.8366	4.8158	7.9171	11.0409	14.1724	17.3076
0.6	1.8798	4.8358	7.9295	11.0498	14.1795	17.3134
0.7	1.9203	4.8556	7.9419	11.0588	14.1865	17.3192
0.8	1.9586	4.8751	7.9542	11.0677	14.1935	17.3249
0.9	1.9947	4.8943	7.9665	11.0767	14.2005	17.3306
1.0	2.0288	4.9132	7.9787	11.0856	14.2075	17.3364

续前表

h	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1.5	2.1716	5.0037	8.0382	11.1296	14.2421	17.3649
2.0	2.2889	5.0870	8.0965	11.1727	14.2764	17.3932
3.0	2.4557	5.2329	8.2045	11.2560	14.3434	17.4490
4.0	2.5704	5.3540	8.3029	11.3349	14.4080	17.5034
5.0	2.6537	5.4544	8.3914	11.4086	14.4699	17.5562
6.0	2.7165	5.5378	8.4703	11.4773	14.5288	17.6072
7.0	2.7654	5.6078	8.5406	11.5408	14.5847	17.6562
8.0	2.8044	5.6669	8.6031	11.5994	14.6374	17.7032
9.0	2.8363	5.7172	8.6587	11.6532	14.6860	17.7481
10.0	2.8628	5.7606	8.7083	11.7027	14.7335	17.7908
15.0	2.9476	5.9080	8.8898	11.8959	14.9251	17.9742
20.0	2.9930	5.9921	9.0010	12.0250	15.0625	18.1136
30.0	3.0406	6.0831	9.1294	12.1807	15.2380	18.3018
40.0	3.0651	6.1311	9.1986	12.2688	15.3417	18.4180
50.0	3.0801	6.1606	9.2420	12.3247	15.4090	18.4953
60.0	3.0901	6.1805	9.2715	12.3632	15.4559	18.5497
80.0	3.1028	6.2058	9.3089	12.4124	15.5164	18.6209
100.0	3.1105	6.2211	9.3317	12.4426	15.5537	18.6650
∞	3.1416	6.2832	9.4248	12.5664	15.7080	18.8496

二十四、Γ函数(第二类欧勒积分)

一般的"高等数学"教材都讲到实变数 x 的 Γ 函数

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{x-1}dt \qquad (x>0). \tag{1}$$

上式右边的积分收敛条件是 $x>0$, 所以(1)式只定义了 $x>0$ 的 Γ 函数。根据定义(1),

$$\begin{cases}\Gamma(1)=\int_0^{\infty}e^{-t}dt=-e^{-t}\Big|_0^{\infty}=1,\\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}dt=\int_0^{\infty}e^{-t}2d\sqrt{t}=2\int_0^{\infty}e^{-(\sqrt{t})^2}d\sqrt{t}=\sqrt{\pi}.\end{cases} \tag{2}$$

上式最后一步利用了附录七的定积分公式(一)。

对$\Gamma(x+1)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^x dt$进行分部积分，可得递推公式

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x),\ 即\ \Gamma(x)=\frac{1}{x}\Gamma(x+1). \tag{3}$$

如x为正整数n，则从(3)式得

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=\cdots=n!\Gamma(1)=n! \tag{4}$$

这样看来，Γ函数是阶乘的推广。

递推公式本来是在$x>0$的情况下推导出来的。通常又用它把Γ函数向$x<0$的区域延拓。例如，对于区间$(-1,0)$上的x，定义

$$\Gamma(x)=\frac{1}{x}\Gamma(x+1),$$

$x+1$在区间$(0,1)$上，上式右边的$\Gamma(x+1)$按(1)式是有定义的。再如，对于区间$(-2,-1)$上的x，定义

$$\Gamma(x)=\frac{1}{x}\Gamma(x+1)=\frac{1}{x(x+1)}\Gamma(x+2),$$

$x+2$在区间$(0,1)$上，上式右边的$\Gamma(x+2)$按(1)式是有定义的。照此类推，对于区间$(-n,-n+1)$上的x，定义

$$\Gamma(x)=\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}\Gamma(x+n), \tag{5}$$

$x+n$在区间$(0,1)$上，上式右边的$\Gamma(x+n)$按(1)式是有定义的。值得注意的是，按照(3)式，

$$\Gamma(0)=\frac{1}{0}\Gamma(1)=\infty.$$

由此递推，$\Gamma(-1)$，$\Gamma(-2)$，…全都是∞. 总之，凡 $x=0$ 或负整数，$\Gamma(x)$就是∞.

式(1)，(3)和(5)定义了实变数 x 的Γ函数，换句话说，在复数 z 平面的实轴上定义了Γ函数。这定义可以延拓到整个复数平面，

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt \quad (\mathrm{Re}z>0), \tag{6}$$

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z), \tag{7}$$

$$\Gamma(z)=\frac{1}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}\Gamma(z+n) \quad (\mathrm{Re}(z+n)>0). \tag{8}$$

零和负整数是$\Gamma(z)$的单极点。事实上，

$$\Gamma(z)|_{z\to 0}=\left[\frac{1}{z}\Gamma(z+1)\right]_{z\to 0}\sim\frac{1}{z}=(-1)^0\frac{1}{0!}\ \frac{1}{z},$$

$$\Gamma(z)|_{z\to -1}=\left[\frac{1}{z(z+1)}\Gamma(z+2)\right]_{z\to -1}\sim\frac{1}{(-1)(z+1)}$$

$$=(-1)^1\frac{1}{1!}\ \frac{1}{z+1},$$

$$\Gamma(z)|_{z\to -2}=\left[\frac{1}{z(z+1)(z+2)}\Gamma(z+3)\right]_{z\to -2}$$

$$\sim\frac{1}{(-2)(-1)(z+2)}=(-1)^2\frac{1}{2!}\ \frac{1}{z+2},$$

……

$$\Gamma(z)|_{z\to -n}=\left[\frac{1}{z(z+1)\cdots(z+n)}\Gamma(z+n)\right]_{z\to -n}$$

$$\sim\frac{1}{(-n)(-n+1)\cdots(-1)(z+n)}=(-1)^n\frac{1}{n!}\ \frac{1}{z+n},$$

可见 $-n$($n=0$ 或正整数) 确是$\Gamma(z)$的单极点，而且留数为 $(-1)^n\frac{1}{n!}$. 除去这些单极点之外，$\Gamma(z)$ 是处处解析的。

关于Γ函数的常用公式有

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin \pi z}, \tag{9}$$

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=-C-\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+z}\right), \tag{10}$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=ze^{Cz}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}} \tag{11}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{1\cdot 2\cdots n}n^{-z}, \tag{12}$$

$$\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z)=2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right), \tag{13}$$

其中C是欧勒常数。下面是这些公式的推导。

在定义(6)之中，令$t=u^2$，可把定义改写成

$$\Gamma(z)=2\int_0^{\infty}e^{-u^2}u^{2z-1}du. \tag{14}$$

暂且设z是实数且$0<z<1$，则

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z)=4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-(x^2+y^2)}x^{2z-1}y^{-(2z-1)}\,dxdy.$$

把“直角坐标”x和y换为“极坐标”ρ和φ，

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=4\int_0^{\infty}(\operatorname{ctg}\varphi)^{2z-1}d\varphi\int_0^{\infty}e^{-\rho^2}\frac{1}{2}d\rho^2$$

$$=2\int_0^{\infty}(\operatorname{ctg}\varphi)^{2z-1}d\varphi.$$

在右边的积分中引用新的积分变数$x=\operatorname{ctg}^2\varphi$，则

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\int_0^{\infty}\frac{x^{z-1}}{1+x}dx=\frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

上式最后一步引用了§18例1。这就是公式(9)，只不过它是在$0<z<1$的条件下导出的。根据§13关于解析延拓的唯一性，可把公式(9)延拓到整个复数平面而取消$0<z<1$的限制。

利用公式(9)可以证明Γ函数在全平面上无零点，事实上，假

如果某个z_0是$\Gamma(z)$的零点，则$1-z_0$必是$\Gamma(1-z)$的极点，即$1-z_0$必是零或负整数，换句话说z_0必是正整数，但(4)式已指出，对于正整数z_0，$\Gamma(z_0)=z_0!$，并不是零。由此可见$\Gamma(z)$没有零点。

$\Gamma(z)$只有零和负整数这样的单极点。当z逼近单极点"$-n$"(n是零或正整数)时，$\Gamma(z)|_{z\to -n}\sim(-1)^n\frac{1}{n!}\frac{1}{z+n}$，

$$\Gamma'(z)|_{z\to -n}\sim(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}\frac{1}{(z+n)^2},$$

$$[\Gamma'(z)/\Gamma(z)]_{z\to -n}\sim-\frac{1}{z+n}.$$

因此可以设想

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z+n}\right)+\text{常数}. \tag{15}$$

(15)式的证明大致如下：取圆C_k，使$\Gamma(z)$的单极点$z=0,-1,-2,\cdots,-k$在圆C_k的内部。对圆C_k上的解析函数$g_k(z)=\Gamma'(z)/\Gamma(z)-\sum\limits_{n=0}^{k}[-1/(z+n)]$应用科希公式(9.3)。令$k\to\infty$，用刘维定理(见§9)证明$\lim\limits_{k\to\infty}g_k(z)$是常数。

以$z=1$代入(15)以确定常数，结果得到

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z+n}\right)$$

$$=-C-\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{z+n}\right).$$

这就是公式(10)，其中欧勒常数C即$-\Gamma'(1)/\Gamma(1)$，

$$C=-\Gamma'(1)/\Gamma(1). \tag{16}$$

公式(10)的一个特例是$z=$整数M的情况

$$\frac{\Gamma'(M)}{\Gamma(M)}=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{M-1}\right)-C\quad(M\text{为整数}). \tag{17}$$

附录十五用到过这个公式。

拿公式(10)从 1 到 z 积分(积分下限不取"零"而取 1, 这是因为$\Gamma(0)=\infty$),得

$$\ln\Gamma(z)=-C(z-1)-\ln z+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{z}{n}-\ln(z+n)\right]$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\ln(n+1)\right]. \quad (18)$$

这式显得相当累赘,现在想个变通办法。考虑函数 $\Gamma(z+1)$, $z=0$ 不是它的奇点,负整数是它的单极点。于是,代替(15)的是

$$\frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{z+n}\right)+\text{常数}。$$

以 $z=0$ 代入上式以确定常数,结果得到

$$\frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)}=-C+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{z+n}\right).$$

拿上式从 0 到 z 积分(这次积分下限可取"零"了),得

$$\ln\Gamma(z+1)=-Cz+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{z}{n}-\ln(z+n)\right]+\sum_{n=1}^{\infty}\ln n.$$

从递推公式 $\Gamma(z)=\Gamma(z+1)/z$ 知 $\ln\Gamma(z)=\ln\Gamma(z+1)-\ln z$, 因而

$$\ln\Gamma(z)=-Cz-\ln z+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{z}{n}-\ln(z+n)\right]+\sum_{n=1}^{\infty}\ln n. \quad (19)$$

(19)式比(18)简洁得多。比较(18)和(19)还可得欧勒常数 C 的值

$$C=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\ln(n+1)-\ln n\right]=\lim_{k\to\infty}\left[\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{k}\ln\frac{n+1}{n}\right]$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left[\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}-\ln\prod_{n=1}^{k}\frac{n+1}{n}\right]=\lim_{k\to\infty}\left[\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}-\ln(k+1)\right]$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}-\ln k\right)+\lim_{k\to\infty}\ln\frac{k}{k+1}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}-\ln k\right)=0.577216\cdots\cdots. \qquad (20)$$

(19)可以改写为

$$\Gamma(z)=\frac{1}{z}e^{-Cz}\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+z}\right)e^{z/n},$$

通常采用上式的倒数形式，即

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=ze^{Cz}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}.$$

这就是公式(11). 上面这个式子即

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=\lim_{k\to\infty}ze^{Cz}\frac{z+1}{1}\cdot\frac{z+2}{2}\cdots\frac{z+k}{k}e^{-z\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{k}\right)}.$$

把C的表示式(20)代入上式，得

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=\lim_{k\to\infty}ze^{-z\ln k}\frac{z+1}{1}\cdot\frac{z+2}{2}\cdots\frac{z+k}{k}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{z(z+1)(z+2)\cdots(z+k)}{1\cdot2\cdot3\cdots k}k^{-z}.$$

这就是公式(12). 现在用公式 (12) 来证明公式(13). 把$\Gamma(z)$和

$\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)$按(12)式写出，又把$\Gamma(2z)$也按(12)写出，但其中的$k$

改为$2k$，于是

$$\frac{2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2z)}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{2^{2z-1}(k!)^2 2z(2z+1)\cdots(2z+2k)}{(2k)!z\left(z+\frac{1}{2}\right)(z+1)\left(z+\frac{3}{2}\right)\cdots(z+k)\left(z+k+\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{k^{2z+\frac{1}{2}}}{(2k)^{2z}}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{2^{k-1}(k!)^2}{(2k)!\sqrt{k}}\cdot\lim_{k\to\infty}\frac{k}{2z+2k+1}=\lim_{k\to\infty}\frac{2^{k-2}(k!)^2}{(2k)!\sqrt{k}}.$$

既然右边跟 z 无关，可见得左边实际上也跟 z 无关。在左边置 $z=\frac{1}{2}$，得

$$\frac{2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2z)}=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

这就是公式(13).

x 很大的 $\Gamma(x)$ 的渐近公式是

$$\Gamma(x)\sim x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}\sqrt{2\pi},$$

$$\ln\Gamma(x)\sim\left(x-\frac{1}{2}\right)\ln x-x+\frac{1}{2}\ln(2\pi). \qquad (21)$$

这叫做斯特令公式。斯特令公式的一个较粗略的近似是

$$\Gamma(x)\sim(x/e)^x,\quad \ln\Gamma(x)\sim x(\ln x-1).$$

最后介绍 β 函数(第一类欧勒积分)，它的定义是

$$B(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt. \qquad (22)$$

用定义(14)，

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}x^{2p-1}y^{2q-1}dxdy.$$

把"直角坐标" x 和 y 换为"极坐标" ρ 和 φ，

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=4\int_0^\infty e^{-\rho^2}\rho^{2p+2q-1}d\rho\int_0^{\pi/2}\sin^{2p-1}\varphi\cos^{2q-1}\varphi d\varphi$$

按照定义(14)，上式即

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=2\Gamma(p+q)\int_0^{\pi/2}\sin^{2p-1}\varphi\cos^{2q-1}\varphi d\varphi.$$

在上式右边把积分变数改为 t，$t=\sin^2\varphi$，则

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=\Gamma(p+q)\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt,$$

即

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \qquad (23)$$

习 题 答 案

§1. 1. (1) 以原点为圆心而半径为2的圆及其内部，

(2) a 与 b 的连线的 垂直平分线，

(3) $x>\frac{1}{2}$的半平面，

(4) 抛物线 $y^2=1-2x$ 及其内部，

(5) 射线$\varphi=\alpha$ 与 $\varphi=\beta$，直线 $x=a$ 与 $x=b$ 所围成的梯形，

(6) 左半平面 $x<0$，但除去圆$(x+1)^2+y^2=2$及其内部，

(7) 右半平面 $x\geqslant 0$，

(8) 圆$(x-1/4)^2+y^2=1/16$，

(9) 双曲线 $x^2-y^2=a^2$，

(10) 平行四边形对角线平方和等于两邻边平方和的两倍.

2. (1) $e^{i\pi/2}$, $\cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2)$，

(2) $e^{i\pi}$, $\cos\pi+i\sin\pi$，

(3) $2e^{i\pi/3}$, $2[\cos(\pi/3)+i\sin(\pi/3)]$，

(4) $[2\sin(\alpha/2)]e^{i\operatorname{arc\,tg}[\operatorname{ctg}(\alpha/2)]}$，

(5) $(x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3)$, $\rho^3e^{i3\varphi}$, $\rho^3(\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi)$，

(6) ee^i, $e(\cos 1+i\sin 1)$，

(7) $-i$, $e^{i3\pi/2}$, $\cos(3\pi/2)+i\sin(3\pi/2)$.

3. (1) $(\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}+a}+i\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a})\sqrt{2}/2$，

(2) $e^{i(\pi/6+2\pi n/3)}$，

(3) $e^{-\pi/2-2\pi n}$，

(4) $e^{\pi/2+2\pi n}$，

(5) $\cos^5\varphi-10\cos^3\varphi\sin^2\varphi+5\cos\varphi\sin^4\varphi$，

(6) $5\cos^4\varphi\sin\varphi-10\cos^2\varphi\sin^3\varphi+\sin^5\varphi$

(7) $\left[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi-\sin\frac{\varphi}{2}\right]\Big/2\sin\frac{\varphi}{2}$.

(8) $\left[\cos\frac{\varphi}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi\right]\Big/2\sin\frac{\varphi}{2}$.

§2. 2. (1) $\frac{1}{2}(e^b+e^{-b})\sin a+i\frac{1}{2}(e^b-e^{-b})\cos a$，

(2) $\frac{1}{2}(e^{-b}+e^{b})\cos a+i\frac{1}{2}(e^{-b}-e^{b})\sin a$,

(3) $i(2n+1)\pi$,

(4) 1,

(5) $\mathrm{ch}x$,

(6) $i\,\mathrm{sh}x$,

(7) $\cos x$,

(8) $i\sin x$,

(9) $e^{-ay+\frac{1}{2}i(e^{-y}-e^{y})\cos a}$。

3. $\frac{1}{2}\pi+2n\pi-i\ln(2\pm\sqrt{3})$。

§3. (1) 一阶支点 $z=a$ 和 $z=\infty$. 里曼面同于图 3b, 但原点 $z=0$ 应代之以 $z=a$.

(2) 一阶支点 $z=a$ 和 $z=b$. 里曼面有两叶, 在第一叶上从 $z=a$ 到 $z=b$ 作切割, 切割下岸连接于第二叶的上岸, 第二叶的下岸则连接于第一叶的上岸。

(3) 无限阶支点 $z=0$ 和 $z=\infty$. 里曼面有无限多叶, 在每一叶上从 $z=0$ 到 $z=\infty$ 作切割, 每一叶的切割下岸连接于下一叶的上岸。

(4) 同(3), 但以 $z=a$ 代替 $z=0$.

§5. 2. (1) $-ie^{z}+iC$, (2) ze^{z},

(3) $\frac{2\sin 2x+i(e^{2y}-e^{-2y})}{e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2x}$ 即 $\mathrm{ctg}z$,

(4) $1/2-1/z$,

(5) $1/z^2$,

(6) $z^2(1-i/2)$,

(7) z^3,

(8) $z^3(1-2i)$,

(9) z^4,

(10) $\ln z$,

(11) $-i\ln z$.

3. $\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0$, $\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial v}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}=0$, 即(5.2)和(5.3)

在极坐标系中的表示式，亦即极坐标系中的拉普拉斯方程。

§6. 1. 在点 $(2,-1)$ 跟直线 $x=2$ 相切以及跟直线 $y=-1$ 相切的圆族。

2. $C_1\ln z+(C_2+iC_3)$。

3. $C_1\ln z+C_2$。

4. $-C_1/z+(C_2+iC_3)$。

5. $\sigma/2\pi R$。

6. 这两直线各交复数平面于一点，取两交点连线为实轴，取连线中点为原点，参照第 3 题复势 $2q\ln[(z+a)/(z-a)]$，电力线为圆族 $x^2+(y-a)^2=a^2(1+1/C_1^2)$，等势线为圆族 $[x-a(C_2+1)^2/(C_2-1)^2]^2+y^2=4C_2a^2/(C_2-1)^2$。

§11. 3. (1) $|z-i|=1$。 (2) $|z-2|=1$。

(3) $|z|<\infty$；只要 z 是有限的，这幂级数就收敛。

(4) $|z|<e$。

(5) $|z-3|=0$；只要 $z\neq3$，这幂级数就发散。

4. (1) 和(2)至少等于 R_1 和 R_2 中间较小的一个。

(3) R_1R_2。 (4) R_1/R_2。

§12. (1) 主值为 $z-\frac{1}{3}z^3+\frac{1}{5}z^5-\frac{1}{7}z^7+\cdots$。

(2) $\sqrt[3]{i}\left\{1+\frac{1}{1!\,i}\frac{1}{3}(z-i)-\frac{1}{2!\,i^2}\cdot\frac{2}{3^2}(z-i)^2+\frac{1}{3!\,i^3}\cdot\frac{2\cdot5}{3^3}(z-i)^3\right.$
$\left.-\frac{1}{4!\,i^4}\cdot\frac{2\cdot5\cdot8}{3^4}(z-i)^4+\cdots\right\}$。

(3) $\ln i+\frac{z-i}{i}-\frac{(z-i)^2}{2i^2}+\frac{(z-i)^3}{3i^3}-\cdots\}$。

(4) $1+\frac{z-1}{m}+\frac{(1-m)}{2!\,m^2}(z-1)^2+\frac{(1-m)(1-2m)}{3!\,m^3}(z-1)^3+\cdots$。

(5) $e\left(1+z+\frac{3}{2!}z^2+\frac{13}{3!}z^3+\cdots\right)$。

(6) $\ln2+\frac{1}{2}z-\frac{1}{8}z^2+\frac{1}{192}z^4+\cdots$。

(7) $e\left(1-\frac{z}{2}+\frac{11}{24}z^2+\cdots\right)$。

(8) $\sin^2 z=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{2^{2k}}{(2k)!}z^{2k}$， $\cos^2 z=1-\sin^2 z=1+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}$

$\times(-1)^k\dfrac{2^{2k}}{(2k)!}z^{2k}$.

314. (1) $z^5+\dfrac{1}{1!}z^4+\dfrac{1}{2!}z^3+\cdots+\dfrac{1}{k!}z^{-(k-5)}+\cdots$.

(2) $\sum\limits_{k=-1}^{\infty}(-1)^k(k+2)(z-1)^k$.

(3) $-\sum\limits_{k=-1}^{\infty}z^k$; $1/(1-z)-1+(z-1)-(z-1)^2+(z-1)^3-\cdots$.

(4) 注意圆环域 $|z|>1$ 的圆心即展开中心 $z=0$ 并不是奇点（奇点是 $z=1$）. 应用 (11.7) 时要注意 $|z|>1$ 而 $|1/z|<1$. $1-\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{2z^2}-\dfrac{1}{6z^3}+\dfrac{1}{24z^4}+\cdots$.

(5) $\sum\limits_{k=-1}^{-\infty}(3^{-(k+1)}-2^{-(k+1)})z^k$.

(6) $1+\sum\limits_{k=-1}^{-\infty}(6\cdot4^{-(k+1)}-2\cdot3^{-(k+1)})z^k$.

(7) $-\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^{k+1}}z^k-\sum\limits_{k=-1}^{-\infty}z^k$.

(8) $\sum\limits_{k=-1}^{-\infty}2^{-(k+1)}z^k-\sum\limits_{k=-1}^{-\infty}z^k$.

(9) 奇点 $z=0$, $\dfrac{1}{z}+\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{k!}z^{k-1}$.

(10) 奇点 $z=0$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\dfrac{1}{(2k)!}z^{2k-2}$.

(11) 奇点 $z=0$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\dfrac{1}{(k+1)!\,z^{2k+1}}$.

(12) 奇点 $z=0$, $\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{3}z-\dfrac{1}{45}z^3-\cdots$.

(13) $\sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{k}{2}+1\right)-1\right]z^k$; $\sum_{k=-\infty}^{-1} z^k+\sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{k}{2}+1\right)\right]z^k$;

$-\frac{1}{z}+\sum_{k=-2}^{-\infty}\left[1-\frac{k+2}{2^{k+1}}\right]z^k$.

(14) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^k}\right)z^k$; $-\sum_{k=-\infty}^{-1} z^k-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}z^k$; $-\sum_{k=-\infty}^{-1} z^k-\sum_{k=-1}^{-\infty}2^{-k}z^k$.

(15) $\frac{1}{z^2}+2+3z^2+4z^4+\cdots+kz^{2k-4}+\cdots$; $\frac{1}{z^6}+\frac{2}{z^8}+\frac{3}{z^{10}}+\cdots+\frac{k-2}{z^{2k}}+\cdots$.

§15. (1) $m+n$ 阶极点。

(2) $m-n$ 阶极点。但如 $m<n$ 则不是奇点。

(3) 极点，阶数等于 m 和 n 中较大的一个。但如 $m=n$ 则阶数可能 $<m$.

§16. 1. (1) 单极点 -1, 留数 $1/e$; 本性奇点 ∞, 留数 $-1/e$.

(2) 单极点 1, 留数 1; 二阶极点 2, 留数 -1;

(3) 单极点 $\pm ia$, 留数 $\pm e^{\pm ia}/2ia$; 本性奇点 ∞, 留数 $(e^{-ia}-e^{ia})/2ia$.

(4) 单极点 $\pm ia$, 留数 $\pm e^{\mp a}/2ia$; 本性奇点 ∞, 留数 $(e^{a}-e^{-a})/2ia$.

(5) 三阶极点 a, 留数 $(1+a/2)e^{a}$; 本性奇点 ∞, 留数 $-(1+a/2)e^{a}$.

(6) 单极点 ± 1, 留数 $-1/2$; 三阶极点 0, 留数 1.

(7) 二阶极点 $\pm i$, 留数 $\mp i/4$.

(8) n 阶极点 -1, 留数 $(-1)^{n+1}(2n)!/(n+1)!(n-1)!$ n 阶极点 ∞, 留数 $(-1)^n(2n)!/(n+1)!(n-1)!$

(9) 本性奇点 $z=1$, 留数 -1.

(10) 单极点 $e^{i(2k+1)\pi/2n}$ ($k=0, 1, 2, \cdots, 2n-1$), 留数 $-e^{i(2k+1)\pi/2n}/2n$.

2. (1) $-\pi i/2$. (2) $-\pi i$.

(3) 0. (4) $-\pi^2 i$.

3. $f(a)$. 这结果正是科希公式(9.3).

§17. 1. (1) $2\pi/\sqrt{3}$. (2) $2\pi/(1-\varepsilon^2)^{3/2}$.

(3) $\pi(1+\varepsilon^4)/(1-\varepsilon^2)$. (4) $(a-\sqrt{a^2-b^2})2\pi/b^2$.

(5) $\pi/4\sqrt{a^2+1}$. (6) $\pi 2\varepsilon/(1-\varepsilon^2)$.

(7) $\pi/2\sqrt{2}$.

(8) $2\pi[1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)]/[2\cdot4\cdot6\cdots(2n)]$.

2. (1) $\sqrt{2}\pi$. (2) $\pi/200$.

(3) $\pi(2a+b)/2a^3b(a+b)^2$.

(4) $\pi/2\sqrt{2}a^3$. (5) $\pi/2$.

(6) $\pi/4a$. (7) $\pi/n\sin[\pi(2m+1)/2n]$.

3. (1) $[\cos(m/\sqrt{2})+\sin(m/\sqrt{2})]\sqrt{2}\pi e^{-m/\sqrt{2}}/4$.

(2) $(1-e^{-ma})\pi/2a^2$. (3) π/e.

(4) $e^{-ma/\sqrt{2}}\pi/2$. (5) $(1+ma)e^{-ma}\pi/4a^3$.

(6) $(e^{-b}/b-e^{-a}/a)\pi/(a^2-b^2)$.

(7) $\pi/2$.

(8) $2\pi i e^{-ma}$; 0.

§21. 1. (1) $\omega/(p^2-\omega^2)$; $p/(p^2-\omega^2)$.

(2) $\omega/[(p+\lambda)^2+\omega^2]$; $(p+\lambda)/[(p+\lambda)^2+\omega^2]$.

(3) $1/\sqrt{p}$.

2. (1) $(p+1)^4\bar{y}=6$. (2) $\bar{y}=3p/(p^2-1)$.

(3) $(p+2)\bar{y}+2\bar{z}=1+10/(p-2)$, $-2\bar{y}+(p+1)\bar{z}=3+7/(p-2)$.

(4) $(p-1)^5\bar{y}=2$.

(5) $(p+c_1)\bar{y}_1=N_0$, $(p+c_2)\bar{y}_2=c_1\bar{y}_1$, $(p+c_3)\bar{y}_3=c_2\bar{y}_2$, $p\bar{y}_4=c_3\bar{y}_3$.

(6) $2pd\bar{y}/dp+(p^2+\lambda a+2)\bar{y}=py(0)+y'(0)$.

(7) $p(p-1)d\bar{y}/dp+\bar{y}(p-\lambda-1)=0$.

§22 和 §23. 1. (1) t^3e^{-t}. (2) $3\text{ch}t$ 即 $3(e^t+e^{-t})/2$.

(3) $y(t)=e^{2t}$, $z(t)=3e^{2t}$. (4) $2t^4e^t/4$;

2. 如 $R^2-\frac{4L}{C}=0$, 则 $j(t)=\frac{E}{L}\left(e^{-(R/2L)t}-\frac{R}{2L}te^{-(R/2L)t}\right)$; 如 $R^2-4L/C>0$, 则

$$j(t)=\frac{E}{\sqrt{R^2-4L/C}}e^{-(R/2L)t}\left[\frac{R+\sqrt{R^2-4L/C}}{L}e^{-\frac{\sqrt{R^2-4L/C}}{2L}t}\right.$$

$$\left.-\frac{R-\sqrt{R^2-4L/C}}{L}e^{\frac{\sqrt{R^2-4L/C}}{2L}t}\right]=\frac{E}{\sqrt{R^2-4L/C}}e^{-(R/2L)t}$$

$$\times\left[\frac{\sqrt{R^2-4L/C}}{L}\text{ch}\frac{\sqrt{R^2-4L/C}}{2L}t-\frac{R}{L}\text{sh}\frac{\sqrt{R^2-4L/C}}{2L}t.\right.$$

如 $R^2-4L/C<0$，则

$$j(t)=\frac{E}{\sqrt{4L/C-R^2}}e^{-(R/2L)t}\left[\frac{\sqrt{4L/C-R^2}}{L}\cos\frac{\sqrt{4L/C-R^2}}{2L}t\right.$$
$$\left.-\frac{R}{L}\sin\frac{\sqrt{4L/C-R^2}}{2L}t\right].$$

3. $$N_4(t)=N_0+\frac{C_2C_3N_0}{(C_1-C_2)(C_3-C_1)}e^{-C_1t}+\frac{C_3C_1N_0}{(C_2-C_3)(C_1-C_2)}e^{-C_2t}$$
$$+\frac{C_1C_2N_0}{(C_3-C_1)(C_2-C_3)}e^{-C_3t}.$$

4. $y(t)=\frac{1}{2}\lambda\mu\left(t^2-\frac{1}{3}Ct^3\right)e^{-Ct}.$

5. $j(t)=\frac{E_0}{R^2+1/C^2\omega^2}\left[R\sin\omega t+\frac{1}{C\omega}\cos\omega t\right]-\frac{E_0/C\omega}{R^2+1/C^2\omega^2}e^{-t/RC}$，第一项也可写成 $\frac{E_0}{\sqrt{R^2+1/C^2\omega^2}}\sin(\omega t+\theta)$，其中

$$\theta=\arccos\frac{R}{\sqrt{R^2+1/C^2\omega^2}}=\arcsin\frac{1/C\omega}{\sqrt{R^2+1/C^2\omega^2}}.$$

6. $T(t)=\frac{Al}{\pi a}\frac{1}{\omega^2-\pi^2a^2/l^2}\left(\omega\sin\frac{\pi at}{l}-\frac{\pi a}{l}\sin\omega t\right).$

7. $T(t)=\frac{1}{\omega a}\frac{1}{2i}\int_0^t g(\tau)[e^{i\omega a(t-\tau)}-e^{-i\omega a(t-\tau)}]d\tau.$

8. $T(t)=\int_0^t e^{-\omega^2a^2(t-\tau)}g(\tau)d\tau.$

9. 用分部积分法可导出公式 $\int e^{p^2/4}p^kdp=2e^{p^2/4}p^{k-1}-2(k-1)\times\int e^{p^2/4}p^{k-2}dp$. 因此，如 $\frac{\lambda}{2}$ 为偶数，可选 $C_2=0, C_1\neq0$，一次又一次分部积分可得 $\bar{y}(p)$ 为 $1/p$ 的多项式，相应的原函数必亦为多项式；如 $\frac{\lambda}{2}$ 为奇数，可选 $C_1=0, C_2\neq0$，亦得多项式。但如 $\frac{\lambda}{2}$ 不是整数，则不可能得到多项式。

10. λ 应为整数。

11. $\omega^2=k/m.$

12. (1) $e^{-at}\pi/2a.$ (2) $\pi/2.$
(3) $(1-e^{-t})\pi/2.$ (4) $\pi t/2.$

§24. 1. $\frac{1}{2\pi}E_0(1+\cos\alpha\pi)+\frac{1}{4\pi}E_0(\cos 2\alpha\pi-1)\cos\omega t+\frac{1}{4}E_0\Big[2(1-\alpha)$

$+\frac{1}{\pi}\sin 2\alpha\pi\Big]\sin\omega t+\frac{1}{\pi}E_0\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{1-k^2}[\cos\alpha\pi\cos k\alpha\pi+k\sin\alpha\pi$

$\times\sin k\alpha\pi+(-1)^k]\cos k\omega t+\frac{1}{\pi}E_0\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{1-k^2}[\cos\alpha\pi\sin k\alpha\pi$

$-k\sin\alpha\pi\cos k\alpha\pi]\sin k\omega t.$

2. $\frac{1}{6}T-\frac{1}{3\pi}T\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\frac{2k\pi x}{T}.$

3. $\frac{2}{\pi}E_0+\frac{4}{\pi}E_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-4n^2}\cos 2n\omega t$. 基波消失，直流成份和谐波各自加倍。

4. (1) $a_0=\frac{1}{\lambda l}\mathrm{sh}\lambda l,\ a_k=(-1)^k\frac{2\lambda l}{\lambda^2l^2+k^2\pi^2}\mathrm{sh}\lambda l,$

$b_k=(-1)^{k+1}\frac{2\lambda l}{\lambda^2l^2+k^2\pi^2}\mathrm{sh}\lambda l.$

(2) $\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}.$

(3) $a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos 2kx+b_k\sin 2kx)$, 其中 $a_0=1-\frac{2}{\pi}$,

$a_k=\frac{1}{\pi\left(4k^2-\frac{1}{4}\right)},\quad b_k=\frac{4k}{\pi\left(4k^2-\frac{1}{4}\right)}.$

(4) $a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\pi x+b_k\sin k\pi x)$, 其中 $a_0=\frac{1}{2}$,

$a_k=\frac{1}{k^2\pi^2}[1-(-1)^k]+\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2},\quad b_k=\frac{1}{k\pi}-\frac{2}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2}.$

(5) $a_0=\frac{1}{\pi},\ a_k=(-1)^{k+1}\frac{4k}{4k^2-1},\ b_k=\frac{1}{\pi}\frac{4k}{4k^2-1}.$

(6) $\frac{1}{3}\pi^2+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos kx+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kx.$

§25. (1) $\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x$. 这个傅里叶级数只有两项。

(2) $1+2\sum_{k=1}^{\infty}a^k\cos kx$.

(3) $\sum_{k=0}^{\infty}a^k\cos kx$.

(4) $\sum_{k=1}^{\infty}a^k\sin kx$.

(5) $\frac{1}{3}\pi^2+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos kx$.

(6) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin kx$.

(7) $\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin 2nx}{4n^2-1}$.

(8) $\frac{2\sin\pi\alpha}{\pi}\left[\frac{1}{2\alpha}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\alpha\cos kx}{k^2-\alpha^2}\right]$.

(9) $\frac{2\sin\pi\alpha}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k k\sin kx}{\alpha^2-k^2}$.

(10) $\frac{2\operatorname{sh}\alpha\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2\alpha}+\alpha\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\cos kx}{k^2+\alpha^2}\right]$.

(11) $\frac{2\operatorname{sh}\alpha\pi}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}k\sin kx}{k^2+\alpha^2}$.

(12) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}8k}{\pi(4k^2-1)}\sin\frac{2k\pi x}{l}$.

(13) $\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\cos x+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos 2nx$.

§26. 1. (1) $\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kx,\ b_k=\frac{2k}{\pi(k^2-\alpha^2)}[1+(-1)^{k+1}\cos\alpha\pi]$.

(2) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left[\frac{12}{k^3}-\frac{2\pi^2}{k}\right]\sin kx$.

(3) $\frac{2a}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\frac{k\pi x}{l}$.

(4) $\frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}$.

(5) 同§25 例 1。

2. (1) $\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi x}{l}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos\frac{2n\pi x}{l}$,

(2) $\frac{\pi^3}{4}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx$, $a_{2n}=\frac{3\pi}{2n^2}$, $a_{2n+1}=\frac{24}{\pi}\frac{1}{(2n+1)^4}-\frac{6\pi}{(2n+1)^2}$.

(3) $\frac{a}{2}+\frac{4a}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{l}$.

(4) $\frac{l}{4}-\frac{8l}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n+2)^2}\cos\frac{(4n+2)\pi x}{l}$.

(5) 1. 这是只有单项的傅里叶级数。

3. $\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n 4l}{(2n+1)\pi}-\frac{8l}{(2n+1)^2\pi^2}\right]\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$,

4. $\sum_{k}\sum_{n}\frac{4(-1)^{k+n}}{kn}\sin kx\sin ny$.

§27. 1. $\frac{H\tau}{T}+\left(\sum_{k=-\infty}^{-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\right)\frac{H}{k\pi}\sin\frac{k\pi\tau}{T}e^{i\frac{2k\pi t}{T}}$.

2. $\frac{H}{2}+\left(\sum_{k=-\infty}^{-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\right)\frac{iH}{2k\pi}e^{i\frac{2k\pi t}{T}}$.

§28. 1. $A(\omega)=[\cos\omega T+\omega T\sin\omega T-1]k/\pi\omega^2$, $B(\omega)=[\sin\omega T-\omega T\cos\omega T]k/\pi\omega^2$.

2. $A(\omega)=1-H(\omega-\Omega)$. 这频谱的图象同于图 38 的 $f(t)$，而本题的 $f(t)$ 的图象则同于图 39的 $A(\omega)$. 这是由于公式(28.10)和(28.11)

对变数 x 和 ω 对称的缘故。

3. $B(\omega)=\frac{2h}{\pi}\frac{1-\cos\omega T}{\omega}$。

4. (1) 同例 1,

(2) 同上题。

5. $\int_0^\infty \frac{2\omega}{\lambda^2+\omega^2}\sin\omega x d\omega$.

6. $\int_0^\infty \frac{2}{\pi}\frac{\sin\omega a}{\omega}\cos\omega x d\omega$.

§29. 1. $\delta(t-\tau)\rightleftharpoons 1$.　　　　3. $\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\omega x d\omega$.

§31. 1. $u_{tt}-a^2u_{xx}=0$.

2. $u_{tt}=a^2\frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}(x^2u_x)$，坐标 x 以锥顶为原点。

3. $u_{tt}-a^2u_{xx}+\frac{R}{\rho}u_t=0$.

5. $c\rho u_t-\left[\frac{\partial}{\partial x}(ku_x)+\frac{\partial}{\partial y}(ku_y)+\frac{\partial}{\partial z}(ku_z)\right]=Q_0\beta e^{-\beta t}$，其中 Q_0 是开始时储存的水化热密度。

6. $c\rho u_t-k\Delta u=j^2r$.

7. $u_{tt}-\frac{1}{2}\omega^2\frac{\partial}{\partial x}\left[(l^2-x^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right]=0$.

8. 取 x 轴向下，原点在固定端，则 $u_{tt}-g\frac{\partial}{\partial x}\left[(l-x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]-\omega^2u=0$.

9. $\theta_{tt}=\frac{\pi R^4N}{2I}\theta_{xx}$，其中 I 是单位长杆对于纵轴的转动惯量。

10. 取 x 沿槽的长度方向，u 为水的质点的 x 方向位移，则 $u_{tt}=ghu_{xx}$.

§32. 1. $u|_{t=0}=F_0(l-h)x/T_0l$（在 $[0, h]$ 上），$=F_0h(l-x)/T_0l$（在 $[h, l]$ 上）.

2. $YSu_x|_{x=0}=F_0$, $YSu_x|_{x=l}=F_0$.

3. $-ku_x|_{x=0}=q_0$, $ku_x|_{x=l}=q_0$.

4. 取极坐标的极轴垂直于阳光，则 $(\partial u/\partial\rho+Hu)|_{\rho=R}=q\sin\varphi\,(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$, $=0\,(\pi\leqslant\varphi\leqslant2\pi)$.

5. 否。在振动过程中，点 $x=h$ 并不是折点。

6. 把连接处的坐标记作 $x=0$，则

$u^{\mathrm{I}}|_{x=0}=u^{\mathrm{II}}|_{x=0}$, $Y^{\mathrm{I}}Su_x^{\mathrm{I}}|_{x=0}=Y^{\mathrm{II}}Su_x^{\mathrm{II}}|_{x=0}$.

7. 电势 u 连续，即 $u^{\mathrm{I}}|_{\Sigma}=u^{\mathrm{II}}|_{\Sigma}$，$\Sigma$ 表示电介质表面。电位移法向分量连续，即 $(\varepsilon^{\mathrm{I}}\partial u^{\mathrm{I}}/\partial n)|_{\Sigma}=(\varepsilon^{\mathrm{II}}\partial u^{\mathrm{II}}/\partial n)|_{\Sigma}$。

8. 设两端分别在 $x=x_1$ 和 $x=x_3$，两段以 $x=x_2$ 点分界。$u_t^{\mathrm{I}}-(k^{\mathrm{I}}/c^{\mathrm{I}}\rho^{\mathrm{I}})u_{xx}^{\mathrm{I}}=0$，$u^{\mathrm{I}}|_{t=0}=u_0$，$u^{\mathrm{I}}|_{x=x_1}=0$；$u_t^{\mathrm{II}}-(k^{\mathrm{II}}/c^{\mathrm{II}}\rho^{\mathrm{II}})u_{xx}^{\mathrm{II}}=0$，$u^{\mathrm{II}}|_{t=0}=u_0$，$u^{\mathrm{II}}|_{x=x_3}=0$；$u^{\mathrm{I}}|_{x=x_2}=u^{\mathrm{II}}|_{x=x_2}$，$k^{\mathrm{I}}u_x^{\mathrm{I}}|_{x=x_2}=k^{\mathrm{II}}u_x^{\mathrm{II}}|_{x=x_2}$。

§33. 1. (1) 令 $\xi=y-x$，$\eta=x$，则 $u_{\eta\eta}+\frac{c-b}{a}u_\xi+\frac{b}{a}u_\eta+\frac{1}{a}u=0$。

(2) 令 $\xi=x-y$，$\eta=3x+y$，则 $4u_{\xi\eta}-u_\xi+3u_\eta=0$。

(3) 令 $\xi=y-2x$，$\eta=x$，则 $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+u_\eta=0$。

(4) 对于 $y<0$，令 $\xi=x+2\sqrt{-y}$，$\eta=x-2\sqrt{-y}$，则 $(\xi-\eta)u_{\xi\eta}+\frac{1}{2}(u_\xi+u_\eta)=0$。对于 $y>0$，令 $\xi=x$，$\eta=2\sqrt{y}$，则 $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-\frac{1}{\eta}u_\eta=0$。

(5) 对于 $x<0$，令 $\xi=\frac{3}{2}y+(\sqrt{-x})^3$，$\eta=\frac{3}{2}y-(\sqrt{-x})^3$，则 $u_{\xi\eta}-\frac{1}{6(\xi-\eta)}(u_\xi-u_\eta)=0$。对于 $x>0$，令 $\xi=\frac{3}{2}y$，$\eta=-\sqrt{x^3}$，则 $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\frac{1}{\xi\eta}u_\eta=0$。

(6) 令 $\xi=y^2$，$\eta=x^2$，则 $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\frac{1}{2\xi}u_\xi+\frac{1}{2\eta}u_\eta=0$。

(7) 令 $\xi=y^2+e^x$，$\eta=y^2-e^x$，则 $2(\xi+\eta)^2u_{\xi\eta}+u_\xi+u_\eta=0$。

2. (1) 令 $u=e^{-\frac{\alpha}{2}x-\frac{\beta}{2}y}v$，则 $v_{xx}+v_{yy}+\left(\gamma-\frac{1}{4}\alpha^2-\frac{1}{4}\beta^2\right)v=0$。

(2) 令 $u=e^{\frac{\beta}{2}x-a^2(\alpha+\frac{\beta^2}{4})y}v$，则 $v_{xx}-\frac{1}{a^2}v_y=0$。

(3) 令 $u=e^{\frac{b^2-4a}{4a(c-b)}x-\frac{b}{2a}y}v$，则 $v_{xx}+\frac{c-b}{a}v_y=0$。

(4) 令 $u=e^{-4x-3y}$，则 $v_{xy}-10v=0$。

(5) 令 $\xi=y-x/2$，$\eta=x/2$，$u=e^{\frac{b-2c}{a}x-\frac{b}{a}y}v$，则 $v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}+\frac{2}{a}\left(\frac{2bc-b^2-2c^2}{a}+1\right)=0$。

§34. 1. $u=\varphi(x-at)$，只朝一个方向传播。

2. $v=A\cos k(x-at)$，$j=\sqrt{C/L}A\cos k(x-at)$.

3. $e^{-(R/L)t}\left\{\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi\right\}$.

4. $u=H[x-(x_0-at)]-H[x-(x_0+at)]$.

5. $u=\frac{1}{x}[f_1(x-at)+f_2(x+at)]$.

6. 于 $t>x/a$，$u=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_0^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi+\frac{1}{2a}$

$\times\int_0^{t-at}\psi(\xi)d\xi+\frac{aA}{YS\omega}\cos\omega\left(t-\frac{x}{a}\right)$.

7. 匹配的条件是 $R_0=\sqrt{L/C}$，因此 $\sqrt{L/C}$ 叫作特征阻抗。

8. $u=0$（于 $t<x/a$）；$=A\sin\omega(t-x/a)$（于 $t>x/a$）。

9. 透射波 $\frac{2T}{Ma}e^{-\frac{2T}{Ma}(t-\frac{x}{a})}\int_0^{t-x/a}e^{\frac{2T}{Ma}\tau}f(\tau)d\tau-\frac{Ma}{2T}g\left(t-\frac{x}{a}\right)$

$+\frac{M^2a^2}{4T^2}g[1-e^{-\frac{2T}{Ma}(t-\frac{x}{a})}]$，反射波 $\frac{2T}{Ma}e^{-\frac{2T}{Ma}(t+\frac{x}{a})}\int_0^{t+\frac{x}{a}}e^{\frac{2T}{Ma}\tau}f(\tau)d\tau$

$-f\left(t+\frac{x}{a}\right)-\frac{Ma}{2T}g\left(t+\frac{x}{a}\right)+\frac{M^2a^2}{4T^2}g[1-e^{-\frac{2T}{Ma}(t+\frac{x}{a})}]$.

10. 反射光波 $E=\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}E_0\sin\omega\left(t+\frac{n_1}{a}x\right)$，透射光 $E=\frac{2n_1}{n_1+n_2}E_0\sin\omega$

$\times\left(t-\frac{n_2}{a}x\right)$.

§35. 1. 这不是"顾名思义"而是"望文生义"。本征解(35.13)诚然是分离变数形式的，一般解(35.14)作为本征解的叠加就不是分离变数形式的了。事实上，不管 $u(x,t)$ 是否分离变数的，总可以展开为傅里叶级数例如(35.17)，其每一项各是分离变数形式的。

2. $u(x,t)=\frac{2n_0^2h}{(n_0-1)\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{n_0}\cos\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}$.

3. $u(x,t)=\frac{2I}{\pi a\rho}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x_0}{l}\sin\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}$.

§36. 1. 初始位移 $=F_0(l-x_0)x/lT\,(0<x<x_0)$，$=F_0x_0(l-x)/lT\,(x_0<x<l)$。$u(x,t)=\frac{2F_0l}{T\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi x_0}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi at}{l}$.

2. $\frac{8b}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2}{l^2}t}$.

3. ①初速$=v_0(x_0-\delta<x<x_0+\delta)$,

$$u=\frac{4v_0 l}{\pi^2 a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi x_0}{l}\sin\frac{n\pi\delta}{l}\sin\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

②初速$=v_0\cos\frac{x-x_0}{2\delta}\pi(x_0-\delta<x<x_0+\delta)$,

$$u=\frac{8v_0\delta}{\pi^2 a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{1-\left(\frac{2\delta n}{l}\right)^2}\sin\frac{n\pi x_0}{l}\cos\frac{n\pi\delta}{l}\sin\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

4. $\frac{8e}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{n\pi at}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}$.

5. $\frac{8F_0 l}{YS\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi at}{l}\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}$.

6. 定解条件是：$v|_{x=0}=0, v_x|_{x=l}=-\left(R+L\frac{d}{dt}\right)j|_{x=l}=0$, $v|_{t=0}=v_0$,

$v_t|_{t=0}=-\frac{1}{C}j_x|_{t=0}=0$. 解 $v(x,t)=\frac{4v_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}$

$\times\cos\frac{(2n+1)\pi at}{2l}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{l}$.

7. 以重力作用下的平衡状态作为基准来计算位移u，则泛定方程是齐次的。

$$u(x,t)=\frac{2v_0 l}{\pi^2 a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi at}{l}.$$

8. $a\pi/\sqrt{3}$.

9. $u(x,t)=N_0-\frac{4N_0}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2}{l^2}t}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}$. 对于较大的 t，$u(x,t)=N_0-\frac{4N_0}{\pi}e^{-\frac{\pi^2a^2}{l^2}t}\sin\frac{\pi x}{l}$.

10. $\frac{4\Phi_0}{l}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\delta_k}e^{-\frac{4k^2\pi^2a^2t}{l^2}}\cos\frac{2k\pi x}{l}$.

对于较大的 t，$u=\frac{2\Phi_0}{l}+\frac{4\Phi_0}{l}e^{-\frac{4\pi^2a^2t}{l^2}}\cos\frac{2\pi x}{l}$.

11. $u_1+\frac{u_2-u_1}{l}x+2\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(u_0-u_1)}{n\pi}[(-1)^n-1]+\frac{(u_2-u_1)}{n\pi}(-1)^n\right\}$

$$\times\sin\frac{n\pi x}{l}e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t}.$$

12. $Al\left(1-\frac{x}{l}\right)-\frac{l^2A}{6a^2}\left[\left(\frac{x}{l}\right)^3-3\left(\frac{x}{l}\right)^2+2\left(\frac{x}{l}\right)\right]$

$$+\frac{2Al^2}{\pi^3a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\sin\frac{n\pi x}{l}e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t}\Bigg].$$

13. $\frac{F_0a}{YS\omega\cos\frac{\omega l}{a}}\sin\frac{\omega x}{a}\sin\omega t+\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi at}{l}\right.$

$$\left.+B_n\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi at}{a}\right)\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l},$$

其中 $A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\xi}{l}d\xi$,

$$B_n=\frac{2}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi a}\int_0^l\psi(\xi)\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\xi}{l}d\xi.$$

14. $u(x,t)=\frac{mg}{YS}x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l+\frac{\rho Sm}{\rho^2S^2+m^2\lambda_n}}\left[\frac{mg}{YS\lambda_n}\left(\sqrt{\lambda_n}\,l\cos\sqrt{\lambda_n}\,l\right.\right.$

$$\left.\left.-\sin\sqrt{\lambda_n}\,l\right)-\frac{m^2g}{YS^2}l\sin\sqrt{\lambda_n}\,l\right]\sin\sqrt{\lambda_n}\,x\cos a\sqrt{\lambda_n}\,t,$$

其中 λ_n 是 $\sqrt{\lambda}\,\mathrm{tg}\sqrt{\lambda}\,l=\frac{S\rho}{m}$ 的第 n 个根。注意，本题的本征函数 $\sin\sqrt{\lambda_n}x$ 并不彼此正交，即 $\int_0^l\sin\sqrt{\lambda_m}x\sin\sqrt{\lambda_n}xdx\neq0$，而是

$$\int_0^l \sin\sqrt{\lambda_m}x\sin\sqrt{\lambda_n}x dx+\frac{m}{S\rho}\sin\sqrt{\lambda_m}l\sin\sqrt{\lambda_n}l=0.$$

15. $u_0-\frac{4u_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}e^{-(2n+1)^2\pi^2a^2t/4l^2}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}.$

16. $B\frac{\operatorname{sh}[\pi(b-y)/a]}{\operatorname{sh}(\pi b/a)}\sin\frac{\pi x}{a}+\frac{8Ab^2}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\frac{2n+1}{b}\pi(a-x)}{(2n+1)^3\operatorname{sh}\frac{2n+1}{b}\pi a}$

$$\times\sin\frac{(2n+1)\pi y}{b}.$$

17. $\frac{4u_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{a}e^{-(2n+1)\pi y/a}.$

18. $\frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-n\pi y/a}\sin\frac{n\pi x}{a}.$

19. $(A_{mn}\cos\omega_{mn}t+B_{mn}\sin\omega_{mn}t)\sin\frac{m\pi x}{l_1}\sin\frac{n\pi y}{l_2}$，其中

$$\omega_{mn}=\pi a\sqrt{\left(\frac{m}{l_1}\right)^2+\left(\frac{n}{l_2}\right)^2}.$$

除边缘外，平行于 y 轴的节线有 $m-1$ 条，即 $x=\frac{l_1}{m}$ 的整倍数；平行于 x 轴的节线有 $n-1$ 条，即 $y=\frac{l_2}{n}$ 的整倍数。节线保持不动，节线两方振动方向相反。

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n^2\pi^2at}{l^2}+B_n\sin\frac{n^2\pi^2at}{l^2}\right)\sin\frac{n\pi x}{l},$

系数 A_n 和 B_n 由初始位移 $\varphi(x)$ 和速度 $\psi(x)$ 决定，

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi,\ B_n=\frac{2l}{n^2\pi^2a}\int_0^l\psi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi.$$

21. $u(\varphi,t)=\sum_{n=0}^{\infty}(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)e^{-n^2a^2t/R^2}$，其中 A_n 和 B_n 是 $f(\varphi)$ 的傅里叶系数。$\left(本题泛定方程为\ u_t=\frac{a^2}{R^2}u_{\varphi\varphi}.\right)$

22. ① $\frac{A}{a}\rho\cos\varphi$，　② $A+\frac{B}{a}\rho\sin\varphi$.

23. $\frac{4u_0}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\left(\frac{\rho}{a}\right)^{2k+1}\sin(2k+1)\varphi$。

24. $u_内=-\frac{2E_0}{1+\varepsilon}\rho\cos\varphi$，$u_外=-\left(\rho-\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\frac{a^2}{\rho}\right)E_0\cos\varphi$。柱内为匀强电场，$E=\frac{2}{1+\varepsilon}E_0$。柱内极化强度 $P=(\varepsilon-1)\varepsilon_0E=2\varepsilon_0\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}E_0$。柱面束缚电荷面密度$=P$的法向分量$=2\varepsilon_0\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}E_0\cos\varphi$。

25. $$u(\rho,\varphi)=\frac{q}{H\pi}+\frac{1}{k+Ha}\frac{q}{2}\rho\sin\varphi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2q}{\pi a^{2n-1}(2nk+Ha)(1-n^2)}\rho^{2n}\cos 2n\varphi.$$

26. $$\frac{\beta_0^{(1)}\ln R_2-\beta_0^{(2)}\ln R_1}{2(\ln R_2-\ln R_1)}+\frac{\beta_0^{(2)}-\beta_0^{(1)}}{2(\ln R_2-\ln R_1)}\ln\rho$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\beta_n^{(1)}R_2^{-n}-\beta_n^{(2)}R_1^{-n}}{R_1^nR_2^{-n}-R_1^{-n}R_2^n}\rho^n-\frac{\beta_n^{(1)}R_2^n-\beta_n^{(2)}R_1^n}{R_1^nR_2^{-n}-R_1^{-n}R_2^n}\rho^{-n}\right]\cos n\varphi$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\alpha_n^{(1)}R_2^{-n}-\alpha_n^{(2)}R_1^{-n}}{R_1^nR_2^{-n}-R_1^{-n}R_2^n}\rho^n-\frac{\alpha_n^{(1)}R_2^n-\alpha_n^{(2)}R_1^n}{R_1^nR_2^{-n}-R_1^{-n}R_2^n}\rho^{-n}\right]\sin n\varphi,$$

其中 $\beta_0^{(1)}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_1(\varphi)d\varphi$，　$\beta_0^{(2)}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_2(\varphi)d\varphi$，

$\beta_n^{(1)}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_1(\varphi)\cos n\varphi d\varphi$，$\beta_n^{(2)}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_2(\varphi)\cos n\varphi d\varphi$，

$\alpha_n^{(1)}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_1(\varphi)\sin n\varphi d\varphi$，$\alpha_n^{(2)}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_2(\varphi)\sin n\varphi d\varphi$。

27. $v_0\rho\cos\varphi+v_0\frac{a^2}{\rho}\cos\varphi+\frac{\Gamma}{2\pi}\varphi$，$\Gamma$ 任意。

28. $v=v_0\sin[\omega(l-x)\sqrt{LC}]\sin\omega t/\sin(\omega l\sqrt{LC})$，

$j=-v_0\sqrt{\frac{C}{L}}\cos[\omega(l-x)\sqrt{LC}]\cos\omega t/\sin(\omega l\sqrt{LC})$。

$Z_{输入}=v_{max}|_{x=0}:j_{max}|_{x=0}=\sqrt{\frac{L}{C}}\mathrm{tg}(\omega l\sqrt{LC})$。如 $l=\frac{1}{4}$ 波长，则 $Z_{输入}=\infty$。

29. $v=Ae^{i(\omega t+\sqrt{(R+i\omega L)(G+i\omega C)}x)}+Be^{i(\omega t-\sqrt{(R+i\omega L)(G+i\omega C)}x)}$，

$$j=-A\sqrt{\frac{G+i\omega C}{R+i\omega L}}e^{i(\omega t+\sqrt{(R+i\omega L)(G+i\omega C)}x)}$$

$$+B\sqrt{\frac{G+i\omega C}{R+i\omega L}}e^{i(\omega t-\sqrt{(R+i\omega L)(G+i\omega C)}x)}$$，其中

$$A=v_0\frac{(R_0+i\omega L_0-i/C_0\omega)-\sqrt{(R+i\omega L)/(G+i\omega C)}}{R_0+i\omega L_0-i/C_0\omega}$$

$$B=v_0\frac{(R_0+i\omega L_0-i/C_0\omega)+\sqrt{(R+i\omega L)/(G+i\omega C)}}{R_0+i\omega L_0-i/C_0\omega}.$$

没有反射波即 $A=0$，这要求 $R_0+i\omega L_0-i/C_0\omega=\sqrt{\dfrac{R+i\omega L}{G+i\omega C}}$，等号右边叫作传输线的特征阻抗。

30. $\dfrac{aF_0}{YS\omega\cos(\omega l/a)}\sin\dfrac{\omega x}{a}\sin\omega t$.

§37. 1. $\dfrac{2}{\pi a}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\int_0^l\Phi(\xi)\sin\dfrac{n\pi\xi}{l}d\xi\left[\dfrac{\omega\sin\dfrac{n\pi a}{l}t-\dfrac{n\pi a}{l}\sin\omega t}{\omega^2-n^2\pi^2a^2/l^2}\right]$

$\times\sin\dfrac{n\pi x}{l}$. 如外力的频率等于基音或谐音的频率，则[ ]为0/0，按罗毕达法则其极限为$\left[\dfrac{1}{2\omega}\sin\omega t-\dfrac{1}{2}t\cos\omega t\right]$，其中第二部分的振幅为$\dfrac{1}{2}t$，随时间而增长，这就是共振。

2. $\dfrac{2f_0}{\pi a}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi x_0}{l}\sin\dfrac{n\pi x}{l}\left[\dfrac{\omega\sin\dfrac{n\pi a}{l}t-\dfrac{n\pi a}{l}\sin t}{\omega^2-n^2\pi^2a^2/l^2}\right]$.

3. 把泛定方程记作 $u_t-a^2u_{xx}+\dfrac{h}{c\rho}u=\dfrac{1}{c\rho}I^2R$，则解

$$u=\frac{4I^2R}{lc\rho}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\frac{1}{(2n+1)^2\pi^2a^2/l^2+h/c\rho}$$
$$\times\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}\left[1-e^{-\left(\frac{(2n+1)^2\pi^2a^2}{l^2}+\frac{h}{c\rho}\right)t}\right].$$

4. $a^2-\rho^2$.

5. $\dfrac{1}{24}\rho^2(a^2-\rho^2)\sin 2\varphi$.

6. $x(a-x)-\dfrac{8a^2}{\pi^3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{ch[(2n+1)\pi y/a]\sin[(2n+1)\pi x/a]}{(2n+1)^3ch\left[\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi b/a\right]}$.

7. $\frac{xy}{12}(a^3-x^3)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^4b[(-1)^n n^2\pi^2+2-2(-1)^n]}{n^5\pi^5 sh(n\pi b/2a)}sh\frac{n\pi y}{a}\sin\frac{n\pi x}{a}$.

§38. 1. $u(x,t)=\int X(x;k)T(t;k)dk,\ X(x;k)=e^{\pm ikx}$,

$T(t;k)=e^{-\frac{R}{2L}t-\frac{G}{2C}t\pm\sqrt{\left(\frac{R}{L}-\frac{G}{C}\right)^2-\frac{4k^2}{LC}}t}$. 如 $k<\frac{\sqrt{LC}}{2}\left(\frac{R}{L}-\frac{G}{C}\right)$，则

$T(t;k)$ 单纯衰减而不振荡，故传输线相当于低通滤波器，只通过

$k<\frac{\sqrt{LC}}{2}\left(\frac{R}{L}-\frac{G}{C}\right)$的振荡。

$$\text{波速}=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{4}{LC}-\frac{1}{k^2}\left(\frac{R}{L}-\frac{G}{C}\right)},$$

随 k 的不同而不同，这叫色散现象。如 $G:C=R:L$ 则对通过的频率并无限制，而且无色散。

2. $\frac{K}{2}e^{-(a^2\lambda^2)t^2}\left\{e^{(a^2\lambda x)t}\operatorname{erfc}\left(\frac{2a^2\lambda t-x}{2a\sqrt{t}}\right)-e^{-(a^2\lambda x)t}\operatorname{erfc}\left(\frac{2a^2\lambda t+x}{2a\sqrt{t}}\right)\right\}$

$$+\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right).$$

3. $\frac{aB}{k\sqrt{\omega}}e^{-x\sqrt{\omega/2a^2}}\sin\left(\omega t-x\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}-\frac{\pi}{4}\right)$.

4. 球内：$u(r,t)=1\left(t<\frac{1-r}{a}\right)$,

$$=\frac{1}{2r}(r-at)\left(\frac{1-r}{a}<t<\frac{1+r}{a}\right),\quad =0\left(t>\frac{1+r}{a}\right).$$

球外：$u(x,t)=0\left(t<\frac{r-1}{a}\right)$,

$$=\frac{1}{2r}(r-at)\left(\frac{r-1}{a}<t<\frac{r+1}{a}\right),\quad =0\left(t>\frac{r+1}{a}\right).$$

5. 球内：$u=\frac{A}{2R}\left[(r-at)\cos\frac{\pi(r-at)}{2r_0}\right.$

$$\left.+(r+at)\cos\frac{\pi(r+at)}{2r_0}\right]\left(t<\frac{r_0-r}{a}\right),$$

$$=\frac{A}{2R}(r-at)\cos\frac{\pi(r-at)}{2r_0}\left(\frac{r_0-r}{a}<t<\frac{r_0+r}{a}\right),$$

$$=0\left(t>\frac{r_0+r}{a}\right).$$

球外：$u=0\left(t<\frac{r-r_0}{a}\right)$,

$$=\frac{A}{2R}(r-at)\cos\frac{\pi(r-at)}{2r_0}\left(\frac{r-r_0}{a}<t<\frac{r+r_0}{a}\right),$$

$$=0\left(t>\frac{r+r_0}{a}\right).$$

6. $u|_{\rho=0}=1\left(t<1/a\right),\quad =1-\frac{at}{\sqrt{a^2t^2-1}}\left(t>1/a\right).$

7. $u(r,t)=\iiint\varphi(r')\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3}e^{-\frac{|r-r'|^2}{4a^2t}}dx'dy'dz'.$

8. 同泊松公式，但球面 S^r_{at} 改为 $S^r_{a|t|}$.

§39. 1. $At-\int_0^t A\operatorname{erf}(x/2a\sqrt{t-\tau})d\tau=A\int_0^t\operatorname{erfc}(x/2a\sqrt{t-\tau})d\tau.$

2. $f(0)\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)+\int_0^t f'(\tau)\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right)d\tau$

$$+\int_{x/2a\sqrt{t}}^{\infty}\varphi(x+z2a\sqrt{t})\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}dz$$

$$-\int_{x/2a\sqrt{t}}^{\infty}\varphi(z2a\sqrt{t}-x)\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}dz.$$

3. $q(t)e^{-x}-\frac{1}{2}q(0)e^{-4a^2t^2}\left\{e^{4a^2xt}\operatorname{erfc}\left(\frac{2a^2t-x}{2a\sqrt{t}}\right)\right.$

$$\left.-e^{-4a^2xt}\operatorname{erfc}\left(\frac{2a^2t+x}{2a\sqrt{t}}\right)\right\}+\int_0^t\frac{1}{2}[a^2q(\tau)-q'(\tau)]$$

$$\times e^{-4a^2(t-\tau)^2}\left\{e^{4a^2x(t-\tau)}\operatorname{erfc}\left(\frac{2a^2(t-\tau)-x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right)\right.$$

$$\left.-e^{-4a^2x(t-\tau)}\operatorname{erfc}\left(\frac{2a^2(t-\tau)+x}{2a\sqrt{t}}\right)\right\}d\tau.$$

6. 超前势 $\frac{1}{4\pi a^2}\iiint\limits_{T^r_{a|t|}}\frac{f(r,t+R/a)}{R}dx'dy'dz'.$

§40. 1. $T(t)=A\cos kat+B\sin kat,\quad \Phi(\varphi)=C\cos m\varphi+D\sin m\varphi$

$(m=0,1,2,\cdots)$,

贝塞耳方程 $\frac{d^2R}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dR}{dx}+\left(1-\frac{m^2}{x^2}\right)R=0$，其中 $x=k\rho$。

2. $T(t)=Ae^{-k^2a^2t}$，$\Phi(\varphi)$ 和 $R(\rho)$ 同上题。

3. 令 $u(r,\theta,\varphi)=R(r)Y(\theta,\varphi)$，则Y满足球函数方程，

$R(r)$ 满足 $\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\left[\frac{8\pi^2\mu}{h^2}\left(E+\frac{Ze^2}{r}\right)-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]R=0.$

4. ① $\varepsilon_z=A\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$,　② $\mathscr{H}_z=A\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}$.

其中 m 和 n 都是正整数，而且 $\frac{m^2\pi^2}{a^2}+\frac{n^2\pi^2}{b^2}=k^2-h^2$。如

$$k^2<\frac{m^2\pi^2}{a^2}+\frac{n^2\pi^2}{b^2},$$

则 h 为虚数，表示该种模式（对应于这个 m 和 n 的）电磁波不能通过这波导传输。设 $a>b$，则凡 $k<\pi/a$ 的波以任何模式都通不过。所以，截止波矢量 $k_c=\pi/a$，截止圆频率 $\omega_c=c\pi/a$，截止频率 $f_c=c/2a$，截止波长 $\lambda_c=2a$。

§41. 1. $y(x)=a_0y_0(x)+a_1y_1(x)$,

$$y_0(x)=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{1\cdot4}{6!}x^6+\cdots+\frac{1\cdot4\cdot7\cdots(3k-2)}{(3k)!}x^{3k}+\cdots,$$

$$y_1(x)=x+\frac{2}{4!}x^4+\frac{2\cdot5}{7!}x^7+\frac{2\cdot5\cdot8}{10!}x^{10}+\cdots$$

$$+\frac{2\cdot5\cdot8\cdots(3k-1)}{(3k+1)!}x^{3k+1}+\cdots.$$ 收敛半径无限大。

2. $y(x)=a_0y_0(x)+a_1y_1(x)$,

$$y_0(x)=1+\frac{1-\lambda}{2!}x^2+\frac{(1-\lambda)(5-\lambda)}{4!}x^4+\cdots$$

$$+\frac{(1-\lambda)(5-\lambda)\cdots(4k-3-\lambda)}{(2k)!}x^{2k}+\cdots,$$

$$y_1(x)=x+\frac{3-\lambda}{3!}x^3+\frac{(3-\lambda)(7-\lambda)}{5!}x^5+\cdots$$

$$+\frac{(3-\lambda)(7-\lambda)\cdots(4k-1-\lambda)}{(2k+1)!}x^{2k+1}+\cdots.$$

当 $\lambda=$ 奇数 $2k+1$，其中 k 是偶数时，$y_0(x)$ 成为 k 次多项式；

当 $\lambda=$ 奇数 $2k+1$，其中 k 是奇数时，$y_1(x)$ 成为 k 次多项式。

$H_0=1, H_1=2x, H_2=4x^2-2, H_3=8x^3-12x, H_4=16x^4-48x^2+12,$
$H_5=32x^5-160x^3+120x, \cdots.$

3. $y(x)=a_0y_0(x)+a_1y_1(x)$,

$$y_0(x)=1+\frac{(-1)\cdot 6}{2!}x^2+\frac{(+1)(-1)\cdot 6\cdot 8}{4!}x^4+\cdots$$

$$+\frac{(2k-3)(2k-5)\cdots(-1)\cdot 6\cdot 8\cdots(2k+4)}{(2k)!}x^{2k}+\cdots,$$

$y_1(x)=x.$

在(41.7)之中，以 $l=3$ 代人，并求二阶导数，则正是本题的 $y_0(x)$ 乘以常数$(-3)\cdot 4$. 在(41.8)之中，以 $l=3$ 代人，并求二阶导数，则正是本例的 $y_1(x)$ 乘以常数 $(-2)\cdot 5$. 因此，可以说本题的解正是3阶勒让德方程的解的二阶导数。

4. $y=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$，递推公式

$$a_{k+2}=\frac{(k-\lambda)(k+\alpha+\beta+\lambda+1)}{(k+2)(k+1)}a_k+\frac{\alpha-\beta}{k+2}a_{k+1}.$$

可以写出前几个系数，但难以写出一般的系数公式。

§ 42. 1. $y(x)=a_0 x^l+a_1/x^{l+1}$.

2. $y=a_0\Big[1+\frac{-\lambda}{(1!)^2}x+\frac{(-\lambda)(1-\lambda)}{(2!)^2}x^2+\cdots$

$$+\frac{(-\lambda)(1-\lambda)\cdots(k-1-\lambda)}{(k!)^2}x^k+\cdots.$$

$\lambda=$整数 n，则退化为 n 次多项式。

$L_0(x)=1,\qquad L_1(x)=-x+1,\qquad L_2(x)=x^2-4x+2,$

$L_3(x)=-x^3+9x^2-18x+6,\quad L_4(x)=x^4-16x^3+72x^2-96x+24.$

3. $y=a_0x^{l+1}\Big\{1+\frac{(l+1-Z/\lambda)}{1!(2l+2)}(2\lambda x)^2$

$$+\frac{(l+1-Z/\lambda)(l+2-Z/\lambda)}{2!(2l+2)(2l+3)}(2\lambda x)^2+\cdots.$$

如 $Z/\lambda=$整数 n，则级数退化 $n_r=n-l-1$ 次多项式，即

$$\xi^{l+1}\frac{d^{2l+1}}{d\xi^{2l+1}}L_{n+l}(\xi),\text{ 其中 }\xi=\frac{2Zx}{n}.$$

4. $I_{\pm m}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\Gamma(\pm m+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\pm m+2k}$. 易见

$$I_{\pm m}(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^{\pm m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\Gamma(\pm m+k+1)}\left(\frac{x^2}{4}\right)^k,$$

在Σ下只出现x^2的幂次，而且较后的系数全同号，因而没有实的零点。

$$J_{\pm m}(ix)=i^{\pm m}I_{\pm m}(x).$$

5. $y=a_0\left[1-\frac{\Gamma(l+2)}{\Gamma(l)}\frac{1}{(1!)^2}\left(\frac{1-x}{2}\right)+\frac{\Gamma(l+3)}{\Gamma(l-1)}\frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{1-x}{2}\right)^2\right.$
$\left.-\frac{\Gamma(l+4)}{\Gamma(l-2)}\frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{1-x}{2}\right)^3+\cdots\right].$

如 $l=$整数则退化为多项式。

6. $y=a_0x+a_1\left[+x\ln x-1+\frac{0!}{1!\,2!}x^2+\frac{1!}{2!\,3!}x^3+\frac{2!}{3!\,4!}x^4+\cdots\right].$

7. $y_0(x)=a_0\left(x-\frac{1}{1!\,2!}x^2+\frac{1}{2!\,3!}x^3-\frac{1}{3!\,4!}x^4+\cdots\right),$

$y_1(x)=a_1y_0\ln x+a_1\left[-1+\frac{1}{1!\,2!}\left(\frac{3}{1\cdot2}\right)x^2+\cdots\right.$
$+(-1)^k\frac{1}{(k-1)!\,k!}\left(\frac{3}{1\cdot2}+\frac{5}{2\cdot3}+\frac{7}{3\cdot4}+\cdots\right.$
$\left.\left.+\frac{2k-1}{(k-1)k}\right)x^k+\cdots\right].$

8. $y_1=1+\frac{\alpha\beta}{1!\,\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\ \beta(\beta+1)}{2!\,\gamma(\gamma+1)}x^2$
$+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{3!\,\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\cdots\equiv F(\alpha,\beta,\gamma;x);$

$y_2=x^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma,\beta+1-\gamma,2-\gamma;x).$

9. $y_1=1+\frac{\alpha}{1!\,\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)}{2!\,\gamma(\gamma+1)}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{3!\,\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\cdots$
$\equiv F(\alpha,\gamma;x);\quad y_2=x^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma,2-\gamma;x).$

§ 44. 1. 如$n<l$，则积分$=0$。如$n>l$而$n-l=$奇数，则积分$=0$。如$n>l$而$n-l=$偶数，则答案是$\frac{2l+1}{2}\frac{n!}{l!\,(n-l)!}\frac{(2l)!!\,(n-l-1)!!}{(n+l+1)!!}$。记号$k!!=k(k-2)(k-4)\cdots$直到1或2为止。

2. (1) $P_13/5+P_32/5.$　　(2) $P_48/35+P_24/7+P_01/5.$

(3) $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(4n+1)}{2^{2n}(n-1)!}\frac{(2n-2)!}{(n+1)!}P_{2n}(x).$

(4) $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}P_1(x)+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4n+1}{2}\frac{(2n-3)!!}{(2n+2)!!}P_{2n}(x).$

3. $u(r,\theta)=-E_0 r\cos\theta+E_0\frac{a^3}{r^2}\cos\theta$.

4. $u=\frac{q}{\sqrt{d^2-2rd\cos\theta+r^2}}-q\sum_{l=0}^{\infty}\frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}d^{l+1}}P_l(\cos\theta)$

$$=\frac{q}{\sqrt{d^2-2rd\cos\theta+r^2}}-\frac{qa/d}{\sqrt{(a^2/d)^2-2(a^2/d)r\cos\theta+r^2}},$$

第二项是电象的电势。

5. $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\frac{r^2}{a^2}P_2(\cos\theta)$.

6. 球内 $v=\frac{v_1+v_2}{2}+\frac{v_1-v_2}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(4k+3)\frac{(2k-1)!!}{(2k+2)!!}\left(\frac{r}{a}\right)^{2k+1}$

$\times P_{2k+1}(\cos\theta)$,

球外 $v=\frac{v_1+v_2}{2}\frac{a}{r}+\frac{v_1-v_2}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(4k+3)\frac{(2k-1)!!}{(2k+2)!!}$

$\times\left(\frac{a}{r}\right)^{2k+2}P_{2k+1}(\cos\theta)$.

7. ① $u_0\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(4k+3)\frac{(2k-1)!!}{(2k+2)!!}\left(\frac{r}{a}\right)^{2k+1}P_{2k+1}(\cos\theta)$. ② u_0.

8. $\Delta_3 u=0\,(r<a)$, $\left(\frac{\partial u}{\partial r}+Hu\right)\Big|_{r=a}=f(\theta)\equiv\begin{cases}q_0\cos\theta & (0<\theta<\pi/2),\\ 0 & (\pi/2<\theta<\pi).\end{cases}$

$$u=\frac{q_0}{4H}+\frac{1}{Ha+1}\frac{q_0}{2}rP_1(\cos\theta)+\frac{1}{Ha+2}\frac{q_0}{a}\frac{5}{16}r^2P_2(\cos\theta)$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{Ha+2n}\frac{q_0}{a^{2n-1}}(-1)^{n+1}\frac{4n+1}{2}$$
$$\times\frac{(2n-3)!!}{(2n+2)!!}r^{2n}P_{2n}(\cos\theta).$$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}[A_n\cos\sqrt{4n(2n-1)}\omega lt+B_n\sin\sqrt{4n(2n-1)}\omega lt]P_{2n-1}\left(\frac{x}{l}\right)$,

系数 $A_n=\frac{4n-1}{l}\int_0^l\varphi(x)P_{2n-1}\left(\frac{x}{l}\right)dx$,

$$B_n=\frac{4n-1}{\sqrt{4n(2n-1)}\omega l^2}\int_0^l\psi(x)P_{2n-1}\left(\frac{x}{l}\right)dx.$$

10. $u(r,\theta)=\frac{q}{a}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{2^k k!}\left(\frac{r}{a}\right)^{2k}P_{2k}(\cos\theta)\quad (r<a)$;

$$u=\frac{q}{a}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{2^k k!}\left(\frac{a}{r}\right)^{2k+1}P_{2k}(\cos\theta)\quad (r>a).$$

§ 45. 1. (1) $\frac{1}{3}-\frac{1}{3}P_2(\cos\theta)+\frac{1}{6}P_2^2(\cos\theta)\cos 2\varphi$.

(2) $P_1^1(\cos\theta)\cos\varphi+P_2^1(\cos\theta)\cos\varphi$.

(3) $$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(4n+1)\frac{(2n-3)!!}{(2n+2)!!}P_{2n}(\cos\theta)$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(4n+1)\left[1+\frac{6}{(2n-1)(2n+2)}\right]$$

$$\times\frac{(2n-2)!\,(2n-1)!!}{(2n+2)!\,(2n)!!}P_{2n}^2(\cos\theta)\cos 2\varphi.$$

2. $$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1}[A_l^m\cos m\varphi+B_l^m\sin m\varphi]P_l^m(\cos\theta),$$

$$A_l^m=\frac{(2l+1)}{2\pi\delta_m}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\iint_s f(\theta,\varphi)P_l^m(\cos\theta)\cos m\varphi\sin\theta d\theta d\varphi,$$

$$B_l^m=\frac{2l+1}{2\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\iint_s f(\theta,\varphi)P_l^m(\cos\theta)\sin m\varphi\sin\theta d\theta d\varphi.$$

3. (1) $$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\frac{r^l}{la^{l-1}}[A_l^m\cos m\varphi+B_l^m\sin m\varphi]P_l^m(\cos\theta),$$

A_l^m 和 B_l^m 见上题。

(2) $$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\frac{-a^{l+2}}{(l+1)r^{l+1}}[A_l^m\cos m\varphi+B_l^m\sin m\varphi]P_l^m(\cos\theta).$$

对于特例，(1) $A\frac{r}{a}\cos\theta$，(2) $A\frac{a^2}{r^2}\cos\theta$.

§ 46. 1. (1) $x^3J_1(x)+2x^2J_0(x)-4xJ_1(x)+C$.

(2) $x^2(8-x^2)J_0(x)+4x(x^2-4)J_1(x)+C$.

(3) $J_0(x)-4x^{-1}J_1(x)+C$.

2. $\sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0(x_k^{(0)}x)$，其中 $x_k^{(0)}$ 为 $J_0(x)$ 的第 k 个根。

$$A_k = 2/x_k^{(0)} J_1(x_k^{(0)})。$$

3. (1) $(A/p\omega^2)\left[J_0\left(\frac{\omega}{a}\rho\right)\Big/ J_0\left(\frac{\omega}{a}R\right) - 1\right]\sin\omega t$，

p 是膜每单位面积的质量。

(2) $\left[\frac{4Aa^2}{pR^2\omega^4}\left(\frac{J_0\left(\frac{\omega}{a}\rho\right)}{J_0\left(\frac{\omega}{a}R\right)} - 1\right) + \frac{A}{p\omega^2}\left(\frac{\rho^2}{R^2} - 1\right)\right]\sin\omega t$。

4. $8H\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{[x_n^{(0)}]^3 J_1(x_n^{(0)})} J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right)\cos\frac{x_n^{(0)}}{R}at$。

5. $\frac{K}{ap}\frac{2\rho_0}{\pi R^2}\sum_m\sum_n \sin(ax_n^{(m)}t)\frac{1}{x_n^{(m)}[J_m'(x_n^{(m)})]^2} J_m\left(\frac{x_n^{(m)}}{R}\rho_0\right)$

$$\times J_m\left(\frac{x_n^{(m)}}{R}\rho\right)\cos m(\varphi - \varphi_0)。$$

6. 本征频率 $ax_n^{(m)}/R$，本征振动

$$J_m\left(\frac{x_n^{(m)}}{R}\rho\right)\sin m\varphi\left[A\cos\frac{ax_n^{(m)}t}{R} + B\sin\frac{ax_n^{(m)}t}{R}\right]。$$

7. $2R^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x_n^{(0)}J_1(x_n^{(0)})}\left(1 - \frac{1}{(x_n^{(0)})^2}\right)\left(\mathrm{sh}\frac{x_n^{(0)}z}{R}\Big/\mathrm{sh}\frac{x_n^{(0)}H}{R}\right)J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right)$。

8. $u_2 + \frac{u_1 - u_2}{H}z - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{16u_1}{(2k+1)^3\pi^3}\left[I_0\left(\frac{(2k+1)}{H}\rho\right)\Big/ I_0\left(\frac{(2k+1)}{H}R\right)\right]$

$$\times\sin\frac{(2k+1)\pi z}{H}。$$

9. $\frac{q_0}{k}z - \frac{q_0 H}{k} + \frac{2q_0 H}{k\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi z}{H} I_0\left(\frac{n\pi\rho}{H}\right)\Big/ I_0\left(\frac{n\pi R}{H}\right)$。

10. $\mathscr{E}_\rho = \frac{imkR^2}{[x_n^{(m)}]^2\rho}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}J_m\left(\frac{x_n^{(m)}}{R}\rho\right)\begin{Bmatrix}-\sin m\varphi\\ \cos m\varphi\end{Bmatrix}$，

$$\mathscr{E}_\varphi = \frac{ikR}{x_n^{(m)}}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}J_m'\left(\frac{x_n^{(m)}}{R}\rho\right)\begin{Bmatrix}-\cos m\varphi\\ -\sin m\varphi\end{Bmatrix}。$$

$\mathscr{E}_z=0$; $\mathscr{H}_\rho=\dfrac{ihR}{x_n^{(m)}}J'_m\left(\dfrac{x_n^{(m)}}{R}\rho\right)\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{Bmatrix}$,

$$\mathscr{H}_\varphi=\frac{ihR^2}{[x_n^{(m)}]^2\rho}J_m\left(\frac{x_n^{(m)}}{R}\rho\right)\begin{Bmatrix}-\sin m\varphi\\ \cos m\varphi\end{Bmatrix},$$

$$\mathscr{H}_z=J_m\left(\frac{x_n^{(m)}}{R}\rho\right)\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{Bmatrix}.$$ $x_n^{(m)}$ 是 $J'_m(x)$ 的第 n 个零点。

11. $2.405\dfrac{a}{\sqrt{\beta}}$.

12. $\dfrac{1}{a^2\left[\left(\dfrac{2.405}{R}\right)^2+\left(\dfrac{\pi}{H}\right)^2\right]}$.

13. $$\frac{2v_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[(-1)^{n+1}+\frac{l^2}{l^2-4n^2\delta^2}\cos\frac{n\pi\delta}{l}\right]\frac{I_0\left(\frac{n\pi}{l}\rho\right)}{I_0\left(\frac{n\pi}{l}R\right)}\sin\frac{n\pi z}{l}$$

$$+\sum_n\frac{2v_0}{x_n^{(0)}J_1(x_n^{(0)})}\frac{\operatorname{sh}\frac{x_n^{(0)}}{R}z}{\operatorname{sh}\frac{x_n^{(0)}}{R}l}J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right).$$

§47. 1. $\pi a/\sqrt{\beta}$.

2. $$\frac{2}{r_0}\frac{1}{r}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{r_0^2}t}\sin\frac{n\pi r}{r_0}\int_0^{r_0}rf(r)\sin\frac{n\pi r}{r_0}dr.$$

3. $$\frac{2}{r_0^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{j_1(k_nr)}{[j_0(k_nr_0)]^2}P_1(\cos\theta)e^{-a^2k_n^2t}\int_0^{r_0}j_1(k_nr)f(r)r^2dr,$$

其中 k_n 是 $\operatorname{tg}kr_0=kr_0$ 的第 n 根.

4. $$\sum_{n=1}^{\infty}A_n\frac{1}{r}\sin\frac{n\pi r}{2r_0}\cdot e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{4r_0^2}t},$$ 其中 $A_{2k}=(-1)^{k+1}u_0r_0/k\pi$,

$A_{2k+1}=(-1)^k4u_0r_0/(2k+1)^2\pi^2$.

5. $$u_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(U-u_0)}{Hk_n^2}\frac{1}{r}\sin k_nr_0\sin k_nre^{-k_n^2a^2t},$$

其中 k_n 是 $\operatorname{tg}kr_0=Hr_0k/(H-r_0)$ 的第 n 个根。

6. $$\operatorname{Re}\left\{-i\frac{v_0k^3r_0^4}{9}h_2^{(1)}(kr)P_2(\cos\theta)e^{-i\omega t}\right\}.$$

在远场区，$\dfrac{v_0k^2r_0^4}{9r}P_2(\cos\theta)\cos k(r-at)$.

§48. 1. $U=\mathrm{Re}\left\{\left[\frac{v_0\rho_0}{4}H_0^{(1)}(k\rho)+\sum_{m=1}^{\infty}H_m^{(1)}(k\rho)\right.\right.$

$$\left.\left.\times\frac{v_0k^m\rho_0^{m+1}}{2^m m!}(\cos m\varphi_0\cos m\varphi+\sin m\varphi_0\sin m\varphi)\right]e^{-i\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)}\right\}.$$

2. $\mathrm{Re}\left\{-i\frac{v_0k^3r_0^4}{9}h_2^{(1)}(kr)P_2^2(\cos\theta)\sin 2\varphi\cdot e^{-i\omega t}\right\}.$

远场区$\frac{v_0k^2r_0^4}{9r}P_2^2(\cos\theta)\sin 2\varphi\cos k(r-at)$.

§50. 1. 见(50.24). 2. 见(50.25).

3. 本题如用(50.24)，则积分可利用留数定理算出，参看§17 例2和习题1(6).

答案 ① $u(\rho_0,\varphi_0)=\frac{A}{a}\rho_0\cos\varphi_0$, ② $u(\rho_0,\varphi_0)=A+\frac{B}{a}\rho_0\sin\varphi_0$.

本题亦即§36 习题22，可对照。

4. $u(\rho_0,\varphi_0)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{\delta_n}\cos n\varphi_0\int_0^{2\pi}f(\varphi)\cos n\varphi d\varphi\right.$

$$\left.+\sin n\varphi_0\int_0^{2\pi}f(\varphi)\sin n\varphi d\varphi\right]\frac{1}{a^n}\rho_0^n.$$

5. 平面 $z=0$ 和 $z=H$ 好比两面镜子反复反射，造成无限多电象。对于(x_0,y_0,z_0)处的电荷，所有$(x_0,y_0,2nH+z_0)$处的电象带同号电荷，所有$(x_0,y_0,2nH-z_0)$处的电象带异号电荷。

$$G(r;r_0)=-\frac{1}{4\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-2nH-z_0)^2}}$$

$$+\frac{1}{4\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-2nH+z_0)^2}}.$$

虽然积分公式的形式是有限的，格林函数本身却是无穷级数。

§51. 1. 黎曼函数 $v\equiv1$,

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

2. $\frac{1}{2}\varphi(xt)+\frac{1}{2}t\varphi\left(\frac{x}{t}\right)+\frac{1}{t}\sqrt{xt}\int_{xt}^{x/t}\varphi(\xi)\xi^{-3/2}d\xi$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{xt}\int_{xt}^{x/t}\psi(\xi)\xi^{-3/2}d\xi.$$

§52. 1. $u=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\left[\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\right]d\xi.$

2. $\frac{\Phi_0}{a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}.$

3. $\int_{\xi=-\infty}^{\infty}\int_{\tau=0}^{t}\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-t_0)}}e^{-(x-\xi)^2/4a^2(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi d\tau.$

4. $\frac{d}{dt}\int_0^t f'(t-\tau)\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{\tau}}\right)d\tau.$

5. $\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi$

$$+\frac{1}{2a}\int_{\tau=0}^{t}\int_{\xi=x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

§54. 1. $\operatorname{Re}\left[-\frac{Q}{\varepsilon_0 2\pi}\ln\frac{z^3-ia^3}{z^3+ia^3}\right].$

2. $\operatorname{Re}\left[-\frac{Q}{\varepsilon_0 2\pi}\ln\left(\frac{a}{b}\frac{z-b}{z-a^2/b}\right)\right].$

3. $\varepsilon_0 2\pi/\ln\left[\frac{b}{a}+\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2-1}\right]$，即 $\varepsilon_0 2\pi/\operatorname{arc\,ch}\frac{b}{a}.$

4. $z_1=z/(a-z)$，$z_2=z_1e^{-i\pi/6}$，$z_3=z_2^{6/5}$，$\zeta=az_3/(z_3+1)$，
电势$=C_1\operatorname{Im}\zeta+C_2.$

5. $z_1=z/(a-z)$，$z_2=z_1e^{-i\pi/6}$，$z_3=z_2^{6/5}$，$z_4=(z_3-1)/(z_3+1)$，

$z_4=\frac{1}{2}(\zeta+1/\zeta)$，电势$=C_1\ln|\zeta|+C_2.$

6. (1) $z_1=[z+\sqrt{3}-i]/[-z+\sqrt{3}+i]$，$z_2=z_1^3$，$\zeta=\frac{z_2-i}{z_2+i}.$

(2) $z_1=ze^{-i\pi/2}$，$z_2=z_1^{2/3}$，$z_3=\frac{1}{2}(z_2/2^{2/3}+2^{2/3}/z_2)$，

$\zeta=(z_3-i)/(z_3+i).$

(3) $z_1=\frac{1}{z-2}$，$z_2=e^{iz_1}$，$z_3=z_2e^{i/4}$，$z_4=z_3^{4\pi/3}$，$\zeta=(z_4-i)/(z_4+i).$

(4) $z_1=(z-3)/(z+3)$, $z_2=iz_1$, $z_3=\sqrt{z_2^2+1/49}$,

$\zeta=(z-i)/(z+i)$,

(5) $z_1=(z-1)/(z+1)$, $z_2=-iz_1$, $z_3=\sqrt{z_2^2+1}$,

$\zeta=(z_3-i)/(z_3+i)$.

(6) $\zeta=\sqrt{z}$. (7) $\zeta=z^2$。

7. $z/a=(\zeta+1/\zeta)/2$, 电势$=C_1\ln|\zeta|+C_2$.

8. $z/\sqrt{a^2-b^2}=(\zeta+1/\zeta)/2$, 电势$=C_1\ln|\zeta|+C_2$。

9. $C=\varepsilon_0 2\pi/\ln[(a_2+b_2)/(a_1+b_1)]$.

10. $z/a=(\zeta+1/\zeta)/2$, 速度势$=C_1\ln|\zeta|+C_2$.

11. $z^3=(\zeta^3+1/\zeta^3)/2$.

12. 取图 102 标有×记号处为原点，x 轴向右，y 轴向上。$(0,0)$, $(\infty,0$ 或 $ih)$, (H,h), $(0$ 或 $H, i\infty)$四"点"连成四角形，把这四点依次变为 ζ_1 平面实轴上的$(0,0)$, $(1,0)$, $(a^2,0)$, $(\pm\infty,0)$四点，变换是

$$z=\frac{2i}{\pi}\left[h\,\mathrm{arctg}\left(\frac{h}{H}\sqrt{\frac{\zeta_1}{\zeta_1-a^2}}\right)+H\,\mathrm{arc\,th}\sqrt{\frac{\zeta_1}{\zeta_1-a^2}}\right],$$

a^2不能任意指定，它$=1+\dfrac{h^2}{H^2}$. 再作变换 $\zeta=\dfrac{V}{\pi}\ln\dfrac{1+\sqrt{\zeta_1}}{1-\sqrt{\zeta_1}}$, 把 ζ_1 面的平$(0,0)$, $(1,0)$, $(\pm\infty,0)$变为 ζ 平面的$(0,0)$, $(\infty,0$ 或$iV)$, $(0,V)$. 复势$=\zeta$. 磁场 $B=H=\left|\dfrac{d\zeta}{dz}\right|=\left|\dfrac{d\zeta}{d\zeta_1}\Big/\dfrac{dz}{d\zeta_1}\right|$

$$=\left|\frac{V}{\pi\sqrt{\zeta_1}(1-\zeta_1)}\Big/\frac{iH\sqrt{\zeta_1-a^2}}{\pi(\zeta_1-1)\sqrt{\zeta_1}}\right|=\left|\frac{V}{H\sqrt{\zeta_1-a^2}}\right|.$$ 于 $\zeta_1=0$, $B=B_{\min}$; 于 $\zeta_1=1$, $B=B_{\max}$.

$$B_{\max}:B_{\min}=\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}=\frac{\sqrt{H^2+h^2}}{h}.$$

13. $\zeta=-\cos\dfrac{\pi z}{a}$ 把$(0,0)$, $(a,0)$, $(0$ 或 $a,\infty)$变为 ζ 平面实轴上的$(-1,0)$, $(1,0)$, $(\pm\infty,0)$. 利用(50.25), 在 ζ 平面解得

$$u=\frac{u_0}{\pi}\mathrm{arc\,tg}\frac{2\eta}{\xi^2+\eta^2-1}.$$

回到原自变数，$u=\dfrac{v_0}{\pi}\mathrm{arc\,tg}\dfrac{2\mathrm{sh}(\pi y/a)\sin(\pi x/a)}{\mathrm{sh}^2(\pi y/a)-\sin^2(\pi x/a)}$.

14. 取图 103 的动片右端点为原点，x 轴向右，y 轴向上。

$$z=\frac{h_2}{\pi}\ln(1-\zeta)+\frac{h_1}{\pi}\ln\left(1+\frac{h_2}{h_1}\zeta\right)$$

把 z 平面的 $(-\infty, 0$ 或 $-ih_2)$，$(\infty, -ih_2$ 或 $+ih_1)$，$(-\infty, +ih_1$ 或 $0)$，$(0, 0)$ 变为 ζ 平面实轴的 $(1, 0)$，$(\pm\infty, 0)$，$(-h_1/h_2, 0)$，$(0, 0)$。设定片和动片的电势分别为 v_0 和 0，利用(50.25)，在 ζ 平面解得

$$u=v_0-\frac{v_0}{\pi}\text{arctg}\frac{\eta(1+h_1/h_2)}{\xi^2+\eta^2+(h_1/h_2-1)\xi-h_1/h_2}.$$

回到原自变数即得解。

15. 取图 104D 形盒的中心点为原点，x 轴向右，y 轴向上。

$$z=iH+\frac{4Ha}{\pi(a^2-1)^2}\left[\zeta_1+\frac{a^2}{\zeta_1}\right]-\frac{2H}{\pi}\ln\frac{\zeta_1-a}{\zeta_1+a}$$

把 $(\pm\infty, H)$，$(-h, H)$，$(-\infty, \pm H)$，$(-h, -H)$，$(\pm\infty, -H)$，$(h, -H)$，$(\infty, \pm H)$，(h, H) 变为 $(\pm\infty, 0)$，$(-b, 0)$，$(-a, 0)$，$(-1, 0)$，$(0, 0)$，$(1, 0)$，$(a, 0)$，$(b, 0)$，其中 $b=a^2$，a 应满足

$$\frac{4Ha}{\pi(a^2-1)^2}(a^2+1)-\frac{2H}{\pi}\ln\frac{a-1}{a+1}=h.$$

再作变换 $\zeta=\ln\zeta_1$，则电势 $v=v_1+\frac{v_2-v_1}{\pi}\eta$，从而 $v=v_1+\frac{v_2-v_1}{\pi}\arg\zeta_1$。回到原自变数即得解。

人名对照表

Bessel 贝塞耳
Carson 卡孙
Cauchy 科希
Christoffel 克利斯多菲
d'Alembert 达朗伯
Dirichlet 狄里希利
Euler 欧勒
Fourier 傅里叶
Fresnel 斐涅耳
Gauss 高斯
Gibbs 吉布斯
Green 格林
Hankel 汉克
Heaviside 亥维赛
Helmholtz 亥姆霍兹
Hermite 厄密
Hilbert 希耳伯
Jeffreys 杰弗莱斯
Jordan 约当
Kelvin (即 W. Thomson) 开耳芬
Kirchhoff 基尔霍夫
Laguerre 拉盖尔
Laplace 拉普拉斯
Laurant 罗朗
Leibnitz 莱布尼兹
Legendre 勒让德
l'Hospital 罗毕达
Livouville 刘维
Mellin 梅林
Neumann 诺依曼
Parseval 巴塞瓦
Poisson 泊松
Rayleigh 瑞利
Riemann 里曼
Ritz 里兹
Rodrigues 洛德利格斯
Rogowski 洛果夫斯基
Rouchè 儒歇
Schläfli 施列夫利
Schwarz 施瓦兹
Sommerfeld 索末菲
Sturm 斯特姆
Taylor 泰勒
Walsh 瓦耳希
Wronski 朗斯基
Жуковский 儒阔夫斯基
Остроградский 奥斯特洛格拉德斯基
Чебышев 车贝雪夫

目　　录

第一篇　复变函数论

第二篇　数学物理方程

第一篇　复变函数论

第一章　复 变 函 数

§1.1　复数与复数运算

(一) 复数的基本概念

一个复数 z 总可以表为某个实数 x 与某个纯虚数 $\mathrm{i}y$ 的和，

$$z=x+\mathrm{i}y, \tag{1.1.1}$$

这叫作复数的**代数式**，x 和 y 则分别叫作该复数的**实部**和**虚部**，并分别记作 $\mathrm{Re}z$ 和 $\mathrm{Im}z$.

如果把 x 和 y 当作平面上的点的坐标(图 1-1)，复数 z 就跟平面上的点一一对应起来. 这个平面叫作**复数平面**，两个坐标轴分别叫作**实轴**和**虚轴**.

如果把 x 和 y 当作矢量的直角坐标分量(图 1-1)，复数 z 还可以用复数平面上的矢量来表示.

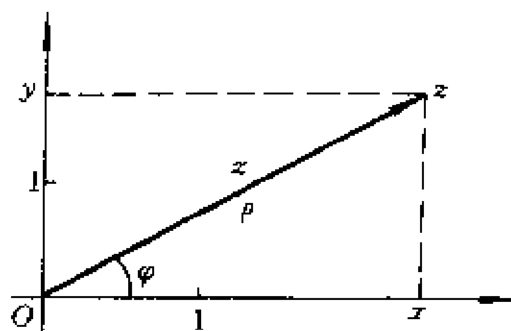


图 1-1

改用极坐标 ρ 和 φ(图 1-1)代替直角坐标 x 和 y,

$$\begin{cases}\rho=\sqrt{x^2+y^2},\\ \varphi=\text{arc tg}(y/x);\end{cases}\qquad\begin{cases}x=\rho\cos\varphi,\\ y=\rho\sin\varphi.\end{cases}\tag{1.1.2}$$

则复数 z 可表为**三角式或指数式**，即

$$z=\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi),\tag{1.1.3}$$

或

$$z=\rho e^{\mathrm{i}\varphi}.\tag{1.1.4}$$

ρ 叫作该复数的**模**，记作 $|z|$. φ 叫作该复数的**辐角**，记作 $\mathrm{Arg}z$.

一个复数的辐角值不能唯一地确定，可以取无穷多个值，并且彼此相差 2π 的整数倍. 通常约定，以 $\arg z$ 表示其中满足条件

$$0\leqslant\mathrm{Arg}z<2\pi$$

的一个特定值，并称 $\arg z$ 为 $\mathrm{Arg}z$ 的**主值**，或 z 的**主辐角**. 于是有

$$\varphi=\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi.\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

复数"零"(即实部 x 和虚部 y 都等于零的复数)的辐角没有明确意义.

一个复数 z 的共轭复数 z^*，指的是对应的点对实轴的反映，即

$$z^*=x-\mathrm{i}y=\rho(\cos\varphi-\mathrm{i}\sin\varphi)=\rho e^{-\mathrm{i}\varphi}.\tag{1.1.5}$$

(二) 无限远点

前面我们将模为有限的复数跟复数平面上的有限远点一一对应起来，在复变函数论中，通常还将模为无限大的复数也跟复数平面上的一点相对应，并且称这一点为**无限远点**. 关于无限远点，可作如下理解. 把一个球放在复数平面上，球以南极 S 跟复数平面相切于原点，如图 1-2 所示. 在复数平面上任取一点 A，它与球的北极 N 的联线跟球面相交于 A'. 这样，复数平面上的有限远点跟球面上 N 以外的点一一对应了起来. 这种对应关系叫作**测地投影**，这个球叫作**复数球**，设想 A 点沿着一根通过原点的直线向无限远移动，对应的点 A'就沿着一根子午线(经线)向北极 N 逼近. 如果 A 沿着另一根通过原点的直线向无限远移动，则 A'沿着另一根子午线向北极 N 逼近. 其实，不管 A 沿着什么样的曲线向无限

远移动，A'总是相应地沿着某种曲线逼近于 N. 因此，可以把平面上的无限远看作一点，即通过测地投影而跟复数球上北极 N 相应的那一点. 我们把无限远点记作∞，它的模为无限大，它的辐角则没有明确意义.

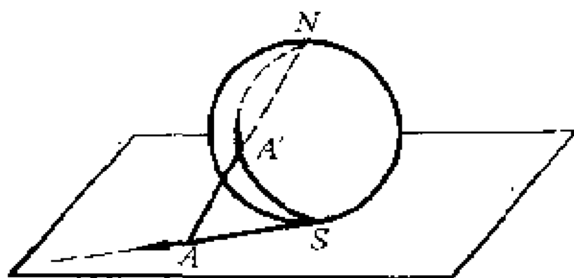


图 1-2

（三）复数的运算

现在再来说说复数的运算.

复数 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$ 的**和** z_1+z_2 的定义是

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2). \qquad (1.1.6)$$

由此明显可见加法的**交换律**和**结合律**成立. 从对应的矢量来看，两个复数的和对应于两个矢量的合矢量. 从而可以知道

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|. \qquad (1.1.7)$$

复数 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$ 的**差** z_1-z_2 被定义为 z_1 与 $-z_2=-x_2-iy_2$ 的和，即

$$z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2). \qquad (1.1.8)$$

从而可以知道

$$|z_1-z_2|\geqslant|z_1|-|z_2|. \qquad (1.1.9)$$

复数 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$ 的**积** z_1z_2 的定义是

$$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1). \qquad (1.1.10)$$

从这个定义出发，很容易验证，乘法的**交换律**、**结合律**与**分配律**都成立. 这样，定义(1.1.10)可以理解为

$$\begin{aligned}z_1z_2&=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=x_1x_2+iy_1x_2+ix_1y_2+i^2y_1y_2\\&=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1).\end{aligned}$$

复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 与 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 的商 z_1/z_2 的定义是

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}. \tag{1.1.11}$$

从这个定义出发,很容易验证,除法确是乘法的逆运算.

定义(1.1.11)可以理解为

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+\mathrm{i}y_1}{x_2+\mathrm{i}y_2}=\frac{(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2-\mathrm{i}y_2)}{(x_2+\mathrm{i}y_2)(x_2-\mathrm{i}y_2)}$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

复数的乘、除、乘方和开方等运算,采用三角式或指数式往往比代数式来得方便.例如,乘积的定义(1.1.10)就化为

$$z_1z_2=\rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+\mathrm{i}\sin(\varphi_1+\varphi_2)] \tag{1.1.12}$$

$$=\rho_1\rho_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)}. \tag{1.1.13}$$

商的定义(1.1.11)就化为

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+\mathrm{i}\sin(\varphi_1-\varphi_2)] \tag{1.1.14}$$

$$=\frac{\rho_1}{\rho_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1-\varphi_2)}. \tag{1.1.15}$$

这样,n(整数)次幂 z^n 应是

$$z^n=\rho^n(\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi) \tag{1.1.16}$$

$$=\rho^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}, \tag{1.1.17}$$

而 n(整数)次根式 $\sqrt[n]{z}$ 则应是

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{n}\right) \tag{1.1.18}$$

$$=\sqrt[n]{\rho}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{n}}. \tag{1.1.19}$$

我们知道,复数 z 的辐角 φ 不能唯一地确定,它可以加减 2π 的整倍数.这样,根式 $\sqrt[n]{z}$ 的辐角 φ/n 也就可以加减 $2\pi/n$ 的整倍数,从而对于给定的 z,$\sqrt[n]{z}$ 可以取 n 个不同的值.

注意区别 $|z|^2$ 与 z^2. $|z|^2$ 是复数 z 的模 ρ 的平方,由(1.1.12)和(1.1.13)可知 $zz^*=|z|^2$;z^2 则是复数 z 的自乘,即 $zz=z^2$.

以上是关于复数与复数运算的复习.

既然复数可以用实部和虚部表出，复数的研究往往就归结为一对实数（即该复数的实部和虚部）的研究.

例如，复变数 $z=x+\mathrm{i}y$ 逼近复常数 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 即

$$z\to z_0$$

的问题，完全可以归结为一对实变数 x 和 y 分别逼近实常数 x_0 和 y_0，即

$$x\to x_0, \qquad y\to y_0$$

的问题. 这样，关于实变数的和、差、积、商的极限的定理，关于实变数的极限是否存在的判据，显然全都适用于复变数，不必一一细说.

习　　题

1. 下列式子在复数平面上各具有怎样的意义？

(1) $|z|\leqslant 2$，　(2) $|z-a|=|z-b|$　（a,b 为复常数），

(3) $\mathrm{Re}z>\frac{1}{2}$，　(4) $|z|+\mathrm{Re}z\leqslant 1$，

(5) $\alpha<\arg z<\beta, a<\mathrm{Re}z<b$　（α,β,a 和 b 为实常数），

(6) $0<\arg\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}<\frac{\pi}{4}$，　(7) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|\leqslant 1$，

(8) $\mathrm{Re}(1/z)=2$，　(9) $\mathrm{Re}z^2=a^2$　（a 是实常数），

(10) $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2$.

2. 把下列复数用代数式、三角式和指数式几种形式表示出来.

(1) i；　(2) 1，

(3) $1+\mathrm{i}\sqrt{3}$，　(4) $1-\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha$　（α 是实常数），

(5) z^3，　(6) $e^{1+\mathrm{i}}$，

(7) $(1-\mathrm{i})/(1+\mathrm{i})$.

3. 计算下列数值.（a,b 和 φ 为实常数）

(1) $\sqrt{a+\mathrm{i}b}$，　(2) $\sqrt[3]{\mathrm{i}}$，

(3) i^{i}，　(4) $\sqrt[\mathrm{i}]{\mathrm{i}}$，

(5) $\cos 5\varphi$，　(6) $\sin 5\varphi$，

(7) $\cos\varphi+\cos2\varphi+\cos3\varphi+\cdots+\cos n\varphi$,

(8) $\sin\varphi+\sin2\varphi+\sin3\varphi+\cdots+\sin n\varphi$.

§1.2 复变函数

(一) 复变函数的定义

若在复数平面(或球面)上存在一个**点集** E(复数的集合),对于 E 的每一点(每一个 z 值),按照一定的规律,有一个或多个复数值 w 与之相对应,则称 w 为 z 的函数——**复变函数**. z 称为 w 的**宗量**,**定义域**为 E,记作

$$w=f(z),\qquad z\in E$$

在复变函数论中,着重研究的是**解析函数**(§1.4).

(二) 区域的概念

在解析函数论中,函数的定义域不是一般的点集,而是满足一定条件的点集,称为**区域**,用 B 来表示.

为了说明区域的概念,首先介绍邻域、内点、外点以及境界点.

邻域　以复数 z_0 为圆心,以任意小正实数 ϵ 为半径作一圆,则圆内所有点的集合称为 z_0 的邻域.

内点　若 z_0 及其邻域均属于点集 E,则称 z_0 为该点集的内点.

外点　若 z_0 及其邻域均不属于点集 E,则称 z_0 为该点集的外点.

境界点　若在 z_0 的每个邻域内,既有属于 E 的点,也有不属于 E 的点,则称 z_0 为该点集的境界点.它既不是 E 的内点,也不是 E 的外点.境界点的全体称为**境界线**.

现在介绍区域的概念.直观说来,区域就是宗量 z 在复数平面上的取值范围.严格地说,区域是指满足下列两个条件的点集:

(1)**全由内点组成**;

(2)**具有连通性**,即点集中的任意两点都可以用一条折线连接

起来，且折线上的点全都属于该点集.

闭区域 区域 B 及其境界线所组成的点集称为闭区域，以 $\overline{B}$ 表示.

区域可以是各种各样的，例如圆形域及环形域. 圆形域可以用不等式 $|z-z_0|<r$ 来表示，式中 z_0 为圆心，r 为半径；环形域可以用 $a<|z-z_0|<b$ 来表示，z_0 为环心，a 为内半径，b 为外半径，若将其中的"$<$"换成"$\leqslant$"，则这两个式子分别表示闭圆域和闭环域.

（三）复变函数例

这里举几个复变函数的例子.

多项式

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n \quad (n\text{ 为正整数}), \tag{1.2.1}$$

有理分式

$$\frac{a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n}{b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots+b_mz^m} \quad (m\text{ 和 }n\text{ 为正整数}), \tag{1.2.2}$$

根式

$$\sqrt{z-a}, \tag{1.2.3}$$

式中 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, b_0, b_1, b_2, \cdots, b_m, a$ 是复常数. 下面列举几个初等函数的定义式：

$$e^z=e^{x+iy}=e^xe^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y), \tag{1.2.4}$$

$$\sin z=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz}), \tag{1.2.5}$$

$$\cos z=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz}), \tag{1.2.6}$$

$$\operatorname{sh} z=\frac{1}{2}(e^z-e^{-z}), \tag{1.2.7}$$

$$\operatorname{ch} z=\frac{1}{2}(e^z+e^{-z}), \tag{1.2.8}$$

$$\ln z=\ln(|z|e^{i\operatorname{Arg}z})=\ln|z|+i\operatorname{Arg}z, \tag{1.2.9}$$

$$z^s=e^{s\ln z}\ (s\text{ 为复数}). \tag{1.2.10}$$

由定义(1.2.5)和(1.2.6)不难看出，$\sin z$ 和 $\cos z$ 具有实周期

2π,即

$$\sin(z+2\pi)=\sin z,\cos(z+2\pi)=\cos z. \qquad (1.2.11)$$

大家知道,在实数领域中,$|\sin x|\leqslant 1$,$|\cos x|\leqslant 1$.把定义(1.2.5)和(1.2.6)按照(1.2.4)展开为实部和虚部,就求得模

$$|\sin z|=\frac{1}{2}\sqrt{(e^{2y}+e^{-2y})+2(\sin^2 x-\cos^2 x)}, \quad (1.2.12)$$

$$|\cos z|=\frac{1}{2}\sqrt{(e^{2y}+e^{-2y})+2(\cos^2 x-\sin^2 x)}, \quad (1.2.13)$$

这样,$|\sin z|$和$|\cos z|$完全可以大于1.

由定义(1.2.4),(1.2.7)和(1.2.8)不难看出,e^z,$\mathrm{sh}z$和$\mathrm{ch}z$具有纯虚数周期$2\pi i$,即

$$e^{z+2\pi i}=e^z,\mathrm{sh}(z+2\pi i)=\mathrm{sh}z,\mathrm{ch}(z+2\pi i)=\mathrm{ch}z. \qquad (1.2.14)$$

辐角$\mathrm{Arg}\,z$不能唯一地确定,它可以加减2π的整倍数.因此,按照定义(1.2.9),对于给定的z,对数函数$\ln z=\ln|z|+i\mathrm{Arg}\,z$有无限多个值.

在实数领域中,负数的对数没有意义.但是,按照(1.2.9),当z为负实数时,复变函数$\ln z$仍有意义,即

$$\ln z=\ln(|z|e^{i\pi+i2n\pi})=\ln|z|+i(2n+1)\pi.$$

把复变函数$f(z)$的实部和虚部分别记作$u(x,y)$和$v(x,y)$,

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y). \qquad (1.2.15)$$

这是说,复变函数可以归结为一对二元实变函数.因此,实变函数论的许多定义、公式、定理都可以**直接地移植**到复变函数论中.

例如,复变函数$f(z)$在点$z_0=x_0+iy_0$**连续**的定义是

$$\text{当 } z\to z_0 \text{ 时},f(z)\to f(z_0). \qquad (1.2.16)$$

这可以归结为一对二元实变函数$u(x,y)$和$v(x,y)$在点(x_0,y_0)连续,即

$$\text{当}\begin{cases}x\to x_0\\ y\to y_0\end{cases}\text{时},\quad \begin{cases}u(x,y)\to u(x_0,y_0),\\ v(x,y)\to v(x_0,y_0).\end{cases}$$

习　题

1. 试验证(1.2.11)～(1.2.14)几个式子.
2. 计算下列数值.(a 和 b 为实常数,x 为实变数)

   (1)$\sin(a+ib)$，　(2)$\cos(a+ib)$，　(3)$\ln(-1)$，

   (4)$\operatorname{ch}^2 z-\operatorname{sh}^2 z$，　(5)$\cos ix$，　(6)$\sin ix$，

   (7)$\operatorname{ch} ix$，　(8)$\operatorname{sh} ix$，　(9)$|e^{iax-ib\sin x}|$.
3. 求解方程 $\sin z=2$.

§1.3 导　　数

设函数 $w=f(z)$是在区域 B 上定义的单值函数,即对于 B 上的每一个 z 值,有且只有一个 w 值与之相对应.若在 B 上的某点 z,极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

存在,并且与 $\Delta z\to 0$ 的方式无关,则称函数 $w=f(z)$在 z 点**可导**(或**单演**),此(有限的)极限叫作函数 $f(z)$在 z 点的**导数**(或**微商**),以 $f'(z)$或 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}z$ 表示.

复变函数的导数定义,在形式上跟实变函数的导数定义一样,因而实变函数论中关于导数的规则和公式往往可应用于复变函数,例如

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(w_1\pm w_2)=\dfrac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}z}\pm\dfrac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}z},\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(w_1w_2)=\dfrac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}z}w_2+w_1\dfrac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}z},\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\dfrac{w_1}{w_2}\right)=\dfrac{w_1'w_2-w_1w_2'}{w_2^2},\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=1/\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w},\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}F(w)=\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}w}\cdot\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z};\end{cases}\qquad\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}z^n=nz^{n-1},\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}e^z=e^z,\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sin z=\cos z,\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\cos z=-\sin z,\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln z=\dfrac{1}{z}.\end{cases}$$

必须指出，复变函数和实变函数的导数定义，虽然形式上一样，实质上却有很大的不同. 这是因为实变数 Δx 只能沿着实轴逼近零，复变数 Δz 却可以沿复数平面上的任一曲线逼近零. 因此，跟实变函数的可导相比，复变函数的可导是一种**严格得多**的要求.

现在让我们比较 Δz 沿平行于实轴方向逼近零和沿平行于虚轴方向逼近零的两种情形.

先看 Δz 沿平行于实轴方向逼近零的情形. 这时 $\Delta y \equiv 0$，而 $\Delta z = \Delta x \to 0$，于是

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)+\mathrm{i}v(x+\Delta x,y)-u(x,y)-\mathrm{i}v(x,y)}{\Delta x}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}+\mathrm{i}\,\frac{v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x}\right\}\\
&=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial x}.
\end{aligned}\tag{1.3.1}$$

再看 Δz 沿平行于虚轴方向逼近零的情形. 这时 $\Delta x \equiv 0$，而 $\Delta z = \mathrm{i}\Delta y \to 0$，于是

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x,y+\Delta y)+\mathrm{i}v(x,y+\Delta y)-u(x,y)-\mathrm{i}v(x,y)}{\mathrm{i}\Delta y}\\
&=\lim_{\Delta y\to 0}\left\{\frac{v(x,y+\Delta y)-v(x,y)}{\Delta y}-\mathrm{i}\,\frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{\Delta y}\right\}\\
&=\frac{\partial v}{\partial y}-\mathrm{i}\,\frac{\partial u}{\partial y}.
\end{aligned}\tag{1.3.2}$$

如果函数 $f(z)$ 在点 z 可导，(1.3.1)和(1.3.2)两个极限必须都存在而且彼此相等，即

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-\mathrm{i}\,\frac{\partial u}{\partial y}.$$

这个等式两边的实部和虚部必须分别相等，即

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}.\end{cases}\tag{1.3.3}$$

这两个方程叫作**柯西-黎曼方程**，或**柯西-黎曼条件**（简称 **C-R 条件**），是复变函数可导的必要条件.

例如处处连续的函数 $w=\mathrm{Re}z=x$ 的实部和虚部分别是 $u(x,y)=x$，$v(x,y)=0$. 于是

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=0$$

在任一点都存在，但在任一点都不满足柯西-黎曼方程，所以处处连续的函数 $w=\mathrm{Re}z$是处处不可导的. 事实上，当 $\Delta z=\Delta x\to 0$ 时，$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\Delta x}{\Delta x}=1\to 1$，而当 $\Delta z=\mathrm{i}\Delta y\to 0$ 时，$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{0}{\mathrm{i}\Delta y}=0\to 0$. 两个极限并不相等.

柯西-黎曼方程只保证 Δz 沿实轴逼近零和沿虚轴逼近零时，$\Delta f/\Delta z$ 逼近同一极限，并不保证 Δz 沿任意曲线逼近零时，$\Delta f/\Delta z$ 总是逼近同一极限. 因此，柯西-黎曼方程不是复变函数可导的充分条件.

例如复变函数 $f(z)=\sqrt{\mathrm{Re}z\cdot\mathrm{Im}z}$，在第一、三象限，它的实部和虚部分别是 $u(x,y)=\sqrt{xy}$，$v(x,y)\equiv 0$，而在第二、四象限，$u(x,y)\equiv 0$，$v=\sqrt{|xy|}$. 因而，在点 $z=0$，

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{z=0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(\Delta x,0)-u(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{z=0}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(0,\Delta y)-u(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0,$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{z=0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(\Delta x,0)-v(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0,$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{z=0}=\lim_{\Delta y}\frac{v(0,\Delta y)-v(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0,$$

这显然满足柯西-黎曼方程.

那么，复变函数 $f(z)=\sqrt{\mathrm{Re}z\cdot\mathrm{Im}z}$在点 $z=0$ 是否可导呢？试令 Δz 的辐角 φ 保持一定，而模 $\Delta\rho\to 0$，即 $\Delta z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\Delta\rho\to 0$，则在第一、三象限，$\Delta f/\Delta z$ 的极限是

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(0+\Delta z)-f(0)}{\Delta z}=\lim_{\Delta\rho\to 0}\frac{\sqrt{(\Delta\rho)\cos\varphi(\Delta\rho)\sin\varphi}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\Delta\rho}=\frac{\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}.$$

类似地，在第二、四象限，$\Delta f/\Delta z$ 的极限是 $\mathrm{i}\sqrt{|\cos\varphi\sin\varphi|}/\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$. 可见，极限值随 φ 的不同而不同，从而，$f(z)$在点 $z=0$ 不可导.

如果 Δz 沿实轴或虚轴逼近零，即 $\varphi=0$ 或 $\pi/2$，在这两种情形下，$\Delta f/\Delta z$ 的极限相等（都是零），从而满足柯西-黎曼方程. 可见，柯西-黎曼方程不是复

变函数可导的充分条件.

现在证明,函数 $f(z)$ 可导的充分必要条件是:函数 $f(z)$ 的偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$ 存在,且连续,并且满足柯西-黎曼方程.

证 由于这些偏导数连续,二元函数 u 和 v 的增量可分别写为

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y,$$

$$\Delta v=\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_3\Delta x+\varepsilon_4\Delta y,$$

其中各个 ε 值随 $\Delta z\to0$(即 $\Delta x,\Delta y$ 各自趋于零)而趋于零. 于是有

$$\lim_{\Delta z\to0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to0}\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to0}\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right)}{\Delta z}.$$

最后一步已考虑到 $|\Delta x/\Delta z|$ 和 $|\Delta y/\Delta z|$ 为有限值,从而所有含 ε 的项都随 $\Delta z\to0$ 而趋于零. 根据柯西-黎曼条件,上式即

$$\lim_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\frac{\frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x+i\Delta y)+i\frac{\partial v}{\partial x}(\Delta x+i\Delta y)}{\Delta x+i\Delta y}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

这一极限是与 $\Delta z\to0$ 的方式无关的有限值. 证毕.

我们说过,复变函数的可导比实变函数的可导是严格得多的要求. 其具体表现之一就是**函数的实部和虚部通过柯西-黎曼方程而联系起来**.

复变函数的导数可用(1.3.1)或(1.3.2)表示.

在极坐标系中,比较 Δz 沿径向逼近零(即 $\Delta z=e^{i\varphi}\Delta\rho\to0$)和沿横向逼近零(即 $\Delta z=\rho\Delta(e^{i\varphi})=i\rho e^{i\varphi}\Delta\varphi\to0$)两种情况下 $\Delta f/\Delta z$ 的极限,就得到极坐标系中的**柯西-黎曼方程**

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial\rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\varphi},\\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi}=-\frac{\partial v}{\partial\rho}.\end{cases}\tag{1.3.4}$$

或者从直角坐标系中的柯西-黎曼方程(1.3.3)出发，按照变换公式(1.1.2)变换到极坐标系，也可得到极坐标系中的柯西-黎曼方程(1.3.4).

习　题

试推导极坐标系中的柯西-黎曼方程(1.3.4).

§1.4　解析函数

若函数 $f(z)$ 在点 z_0 及其邻域上处处可导，则称 $f(z)$ 在 z_0 点**解析**. 又若 $f(z)$ 在区域 B 上每一点都解析，则称 $f(z)$ 是区域 B 上的**解析函数**. 可见，函数若在某一点解析，则必在该点可导. 反之却不一定成立. 例如，函数 $f(z)=|z|^2$ 仅在 $z=0$ 点可导，而在其它点均不可导，由解析性的定义可知，它在 $z=0$ 点并且在整个复平面上处处不解析. 这表明函数在一点可导与解析是不等价的. 但是，函数若在某一区域 B 上解析，意味着函数在区域 B 上处处可导. 因此，函数在某区域上可导与解析是等价的.

解析函数是一类具有特殊性质的复变函数，在物理学中有着重要的用途. 下面介绍解析函数的几条主要的性质.

1. 若函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 在区域 B 上解析，则

$$u(x,y)=C_1,v(x,y)=C_2$$

(C_1,C_2 为常数)是 B 上的两组正交曲线族.

事实上，将柯西-黎曼条件(1.3.3)两边分别相乘，得

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y},$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}=0. \qquad (1.4.1)$$

这是说，梯度 ∇u $\left(\text{其直角坐标分量为}\frac{\partial u}{\partial x}\text{和}\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ 跟梯度 ∇v $\left(\text{其直角坐标分量为}\frac{\partial v}{\partial x}\text{和}\frac{\partial v}{\partial y}\right)$ 正交. 我们知道，∇u 和 ∇v 分别是曲线“$u=$

常数"和"$v=$常数"的法向矢量，因而(1.4.1)表明"$u=$常数"和"$v=$常数"是**互相正交的两曲线族**.

2. 若函数$f(z)=u+\mathrm{i}v$在区域B上解析，则u，v均为B上的**调和函数**. ["调和函数"一词说的是，如果某函数$H(x,y)$在区域B上有二阶连续偏导数，且满足拉普拉斯方程$\nabla^2 H=0$，则称$H(x,y)$为区域B上的调和函数.]

§2.3将证明，某个区域上的解析函数在该区域上必有任意阶的导数. 这样，二阶偏导数$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$和$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$当然都存在且连续. 现在拿柯西-黎曼方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

的前一式对x求导，后一式对y求导，然后相加，这就消去了v而得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \tag{1.4.2}$$

同理消去u可得

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0. \tag{1.4.3}$$

这是说，$u(x,y)$和$v(x,y)$都满足二维的拉普拉斯方程，换句话说，它们都是调和函数. 由于它们是同一个复变函数的实部和虚部，所以又特别叫作**共轭调和函数**.

这样，若给定一个二元的调和函数，我们可以把它看作某个解析函数的实部(或虚部)，利用柯西-黎曼条件求出相应的虚部(或实部)，这也就确定了这个解析函数.

为确定起见，设给定的二元调和函数$u(x,y)$是解析函数的实部，试求相应的虚部$v(x,y)$. 首先，二元函数$v(x,y)$的微分式是

$$\mathrm{d}v=\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

根据柯西-黎曼条件，上式可以改写为

$$dv = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy. \qquad (1.4.4)$$

易于验证上式是全微分.事实上,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

于是,可用下列方法计算出 $v(x,y)=\int dv$.

(1)**曲线积分法** 全微分的积分与路径无关,故可选取特殊积分路径,使积分容易算出.

(2)**凑全微分显式法** 把微分式(1.4.4)的右端凑成全微分显式,$v(x,y)$自然就求出了.

(3)**不定积分法**

这些方法同样适用于从虚部 v 求实部 u 的情况.具体运作请见下面的例题.

例 1 已知解析函数 $f(z)$的实部 $u(x,y)=x^2-y^2$,求虚部和这个解析函数.

解 首先验证 u 是调和函数,我们有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2.$$

因此,u 确是某个解析函数的实部.

(1)曲线积分法 先计算 u 的偏导数

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-2y.$$

根据柯西-黎曼条件,我们有

$$\frac{\partial v}{\partial x}=2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=2x.$$

于是

$$dv=2ydx+2xdy.$$

右端应是全微分,积分值

$$v=\int^{(x,y)} 2ydx+2xdy+C$$

与路径无关.为便于算出积分，选取积分路径如图 1-3，

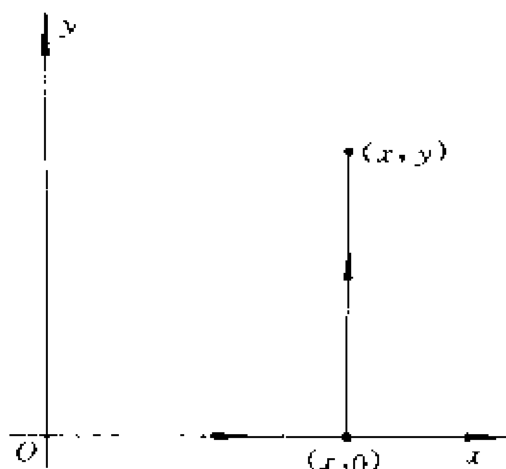


图 1-3

$$v=\int_{(0,0)}^{(x,0)}2y\mathrm{d}x+2x\mathrm{d}y+\int_{(x,0)}^{(x,y)}2y\mathrm{d}x+2x\mathrm{d}y+C$$

$$=\int_{(x,0)}^{(x,y)}2x\mathrm{d}y+C=2xy+C,$$

其中 C 为积分常数.

(2)凑全微分显式法　由上面已知

$$\mathrm{d}v=2y\mathrm{d}x+2x\mathrm{d}y.$$

右端很容易改写成全微分显式 $\mathrm{d}(2xy)$，这样

$$\mathrm{d}v=\mathrm{d}(2xy),$$

显然

$$v=2xy+C.$$

可见，这一方法与曲线积分法无本质差别，在容易将右端凑成全微分显式时，这一方法是很方便的.

(3)不定积分法　上面已算出

$$\frac{\partial v}{\partial y}=2x,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=2y.$$

将上面第一式对 y 积分，x 视作参数，有

$$v=\int 2x\mathrm{d}y+\varphi(x)=2xy+\varphi(x),$$

其中 $\varphi(x)$ 为 x 的任意函数. 将上式两边再对 x 求导,

$$\frac{\partial v}{\partial x}=2y+\varphi'(x).$$

由柯西-黎曼条件知, $\varphi'(x)=0$, 从而 $\varphi(x)=C$(常数), 因此

$$v=2xy+C.$$

最后, 我们得到所求的解析函数为

$$f(z)=x^2-y^2+i(2xy+C)=z^2+iC.$$

例 2 已知解析函数 $f(z)$ 的虚部 $v(x,y)=\sqrt{-x+\sqrt{x^2+y^2}}$, 求实部 $u(x,y)$ 和这个解析函数 $f(z)$.

解 偏导数 $\frac{\partial v}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial y}$ 的计算比较费事, 试改用极坐标系,

$$v=\sqrt{-\rho\cos\varphi+\rho}=\sqrt{\rho(1-\cos\varphi)}=\sqrt{2\rho}\sin\frac{\varphi}{2}.$$

下面先求 $u(x,y)$. 和例 1 一样, 可用三种方法计算, 只是柯西-黎曼条件需改用极坐标形式. 这里只介绍全微分显式法. 其它两种方法, 请读者自行演算.

计算 v 的偏导数,

$$\frac{\partial v}{\partial \rho}=\sqrt{\frac{1}{2\rho}}\sin\frac{\varphi}{2},\qquad \frac{\partial v}{\partial \varphi}=\sqrt{\frac{\rho}{2}}\cos\frac{\varphi}{2}.$$

按照柯西-黎曼方程(1.3.4), 这是说,

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}=\sqrt{\frac{1}{2\rho}}\cos\frac{\varphi}{2},\qquad \frac{\partial u}{\partial \varphi}=-\sqrt{\frac{\rho}{2}}\sin\frac{\varphi}{2}.$$

于是

$$\begin{aligned}du&=\frac{\partial u}{\partial \rho}d\rho+\frac{\partial u}{\partial \varphi}d\varphi=\sqrt{\frac{1}{2\rho}}\cos\frac{\varphi}{2}d\rho-\sqrt{\frac{\rho}{2}}\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi\\&=\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}d\sqrt{\rho}+\sqrt{2\rho}\,d\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)=d\left(\sqrt{2\rho}\cos\frac{\varphi}{2}\right).\end{aligned}$$

因此,

$$u=\sqrt{2\rho}\cos\frac{\varphi}{2}+C=\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}+C,$$

$$f(z)=\sqrt{2\rho}\cos\frac{\varphi}{2}+C+\mathrm{i}\sqrt{2\rho}\sin\frac{\varphi}{2}$$
$$=\sqrt{2\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2}\right)+C=\sqrt{2z}+C.$$

习　题

1. 某个区域上的解析函数如为实函数，试证它必为常数.

2. 已知解析函数 $f(z)$ 的实部 $u(x,y)$ 或虚部 $v(x,y)$，求该解析函数.

(1) $u=e^x\sin y$,　　　　(2) $u=e^x(x\cos y-y\sin y)$, $f(0)=0$,

(3) $u=\dfrac{2\sin 2x}{e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2x}$, $f(0)=0$,

(4) $v=\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $f(2)=0$,

(5) $u=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$, $f(\infty)=0$,

(6) $u=x^2-y^2+xy$, $f(0)=0$,

(7) $u=x^3-3xy^2$, $f(0)=0$,

(8) $u=x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3$, $f(0)=0$

(9) $u=x^4-6x^2y^2+y^4$, $f(0)=0$,

(10) $u=\ln\rho$, $f(1)=0$,

(11) $u=\varphi$, $f(1)=0$.

3. 试从极坐标系中的柯西-黎曼方程(1.3.4)消去 u 或 v.

本题答案就是拉普拉斯方程(1.4.2)在极坐标系中的表示式.

§1.5　平面标量场

物理上及工程技术上常常需要研究各种各样的**场**，例如电磁场、声场、温度场等.通常，这些场均随时间而变，随空间地点而异.若场与时间无关，则称为**恒定场**，例如静电场、流体中的定常流速场等.若所研究的场在空间某方向上是均匀的，从而只需要在垂直于该方向的平面上研究它，这样的场便称为**平面场**.本节拟对解析函数在平面场研究中的应用作一介绍.

首先研究**平面静电场**. 在没有电荷的区域，静电场的电势满足二维拉普拉斯方程. 这样，电场所处区域上的某一解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$的实部或虚部就可以被用来表示该区域上静电场的电势. 我们把这一解析函数叫作该平面静电场的**复势**，因为它的实部或虚部就是电势.

为叙述的确定起见，不妨说 $u(x,y)$是**电势**，曲线族"$u(x,y)=$常数"是等势线族. 从(1.4.1)知道，曲线族"$v(x,y)=$常数"垂直于等势线族"$u(x,y)=$常数"，因而"$v(x,y)=$常数"正是电场线族. 不仅如此，v 的值本身就具有物理意义. 取定两点 $A(x_1,y_1)$和 $B(x_2,y_2)$，任作一曲线联接 A 和 B(图 1-4). 试计算穿过曲线 AB 的电通量(这其实指的是通过一块柱面的电通量，这块柱面跟我们所研究的平面相交于曲线 AB，柱面的母线垂直于所研究的平面，柱高为 1)

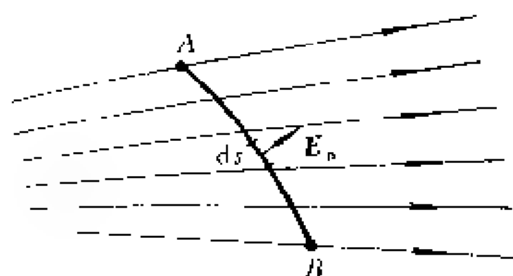


图 1-4

$$N=\int_A^B E_n \mathrm{d}s.$$

曲线 AB 的切线的方向余弦是$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$和$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$，所以法线 n 的方向余弦是 $n_x=-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$和 $n_y=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$. 这样，

$$E_n=E\cdot n=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}.$$

于是

$$\begin{aligned}N&=\int_A^B \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x=\int_A^B \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x\\&=\int_A^B \mathrm{d}v=v(x_2,y_2)-v(x_1,y_1).\end{aligned}$$

这是说，$v(x,y)$在 A 和 B 两点所取的值之差就是 A 和 B 两点之间穿过的电通量. 函数 $v(x,y)$叫作**通量函数**. 由此可见，只要给出

复势，就不仅给出了电势分布，而且还直接给出电场线族的方程、电通量密度并从而给出电荷密度.

同理，在液体的无旋流动中，有所谓**平面无旋液流**. 由于没有涡旋，速度矢量可以表为某个标量的梯度，这个标量叫作**速度势**. 借助于速度势就把平面无旋液流问题表为平面标量场问题. 在没有源和汇的区域上，速度势满足拉普拉斯方程(参看流体力学书籍或本书 § 7.1). 因此，某个区域上的解析函数

$$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$$

的实部或虚部总可以表示该区域上某种平面无旋液流的速度势. 解析函数 $f(z)$ 就叫作该平面无旋液流的**复势**. 为确定起见，设 $v(x,y)$ 是速度势，则曲线族"$u(x,y)=$常数"就是流线族，$u(x,y)$ 是**流量函数**，它在 A 和 B 两点所取的值之差就是 A 和 B 两点之间穿过的流量.

同理，在物体的稳定温度分布中，有所谓**平面温度场**. 均匀物体中的稳定温度分布满足拉普拉斯方程(参看本书 § 7.1). 因此，某个区域上的解析函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 的实部或虚部总可以表示该区域上某种平面温度场的温度分布. 为确定起见，设 $u(x,y)$ 是**温度分布**，则曲线族"$v(x,y)=$常数"就是热流线族，$v(x,y)$ 是**热流量函数**，它在 A 和 B 两点所取的值之差则正比于 A 和 B 两点之间穿过的热流量.

通常借用平面温度场的词汇把曲线族"$u(x,y)=$常数"和"$v(x,y)=$常数"叫作**等温网**.

例 1 开平面上的解析函数

$$f(z)=z^2=(x^2-y^2)+\mathrm{i}2xy$$

的实部和虚部分别是

$$\begin{cases} u(x,y)=x^2-y^2, \\ v(x,y)=2xy. \end{cases}$$

图 1-5 用虚线描画曲线族"$u(x,y)=$常数"，用实线描画曲线族"$v(x,y)=$常数"，后者包括实轴和虚轴在内.

作为平面静电场看，这是两块互相垂直的很大的带电导体平面（实轴和虚轴是它们的截口）的静电场，实线是等势线，虚线是电场线.

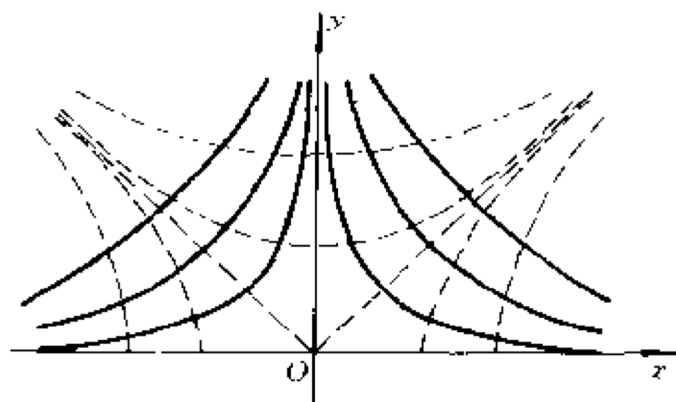
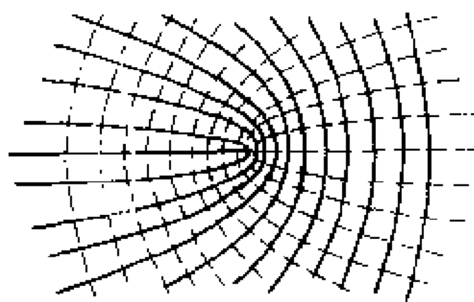


图 1-5


图 1-6

作为平面无旋液流看，这是液体从虚轴的 $+\infty$ 方向流来，被 x 轴阻拦而分向两方流去的情形，实线是流线，虚线是等速度势线.

例 2 已知平面静电场的电场线为抛物线族

$$y^2=c^2+2cx \quad (\text{参数 } c>0)$$

（见图 1-6 中的虚线），求等势线.

解 从电场线方程解出参数 c，

$$c=-x\pm\sqrt{x^2+y^2}.$$

题已注明 $c>0$，所以根号前应取＋号，即

$$-x+\sqrt{x^2+y^2}=c.$$

我们知道，电场线的方程应该是"$v(x,y)=$常数"，拿这跟上式比较，似乎可以得到

$$v(x,y)=-x+\sqrt{x^2+y^2}.$$

但这是完全错误的！道理很简单，$v(x,y)$ 必须是调和函数（即满足拉普拉斯方程），而 $-x+\sqrt{x^2+y^2}$ 并不是调和函数. 这里只能说

$$v=F(t) \qquad (t=-x+\sqrt{x^2+y^2}),$$

其中 F 是某个尚待确定的函数关系，这是因为把上式代入"$v=$常数"同样可得电场线方程 $-x+\sqrt{x^2+y^2}=c$.

现在根据 $v(x,y)$ 是调和函数这个条件来确定函数 $F(t)$.

$$\frac{\partial v}{\partial x}=F'(t)\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-1\right],$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=F''(t)\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-1\right]^2+F'(t)\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right]$$

$$=F''(t)\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-1\right]^2+F'(t)\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

同理,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=F''(t)\left[\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]^2+F'(t)\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

代入拉普拉斯方程得

$$2\left[1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]F''(t)+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}F'(t)=0,$$

即
$$2\left[\sqrt{x^2+y^2}-x\right]F''(t)+F'(t)=0,$$

亦即
$$\frac{F''(t)}{F'(t)}=-\frac{1}{2t}.$$

积分一次,

$$F'(t)=\frac{C}{\sqrt{t}},$$

再积分一次,

$$F(t)=C_1\sqrt{t}+C_2.$$

于是求得

$$v=F(t)=C_1\sqrt{t}+C_2=C_1\sqrt{-x+\sqrt{x^2+y^2}}+C_2.$$

引用 §1.4 例 2 的结果就求出

$$u=C_1\sqrt{2\rho}\cos\frac{\varphi}{2}+C_3.$$

从而等势线方程为

$$C_1\sqrt{2\rho}\cos\frac{\varphi}{2}+C_3=\text{常数}.$$

变换到直角坐标,得

$$y^2=c^2-2cx \quad (c>0).$$

这也是抛物线族，如图 1-6 的实线所描画. 这是一块很大的带电金属平板（负实轴是它的截口）的静电场.

读者可以注意到，本节只是任取某个解析函数，然后阐明它描写什么样的平面场，最多也不过从等温网的两族曲线中的一族出发阐明所描写的是什么样的平面场，因此具有很大的局限性. 实际上更重要的问题是针对具体的平面场找出适当的复势，关于这个问题参看本书第十四章保角变换法.

习　题

1. 已知复势 $f(z)=1/(z-2+i)$，试描画等温网.

2. 已知流线族的方程为"$y/x=$常数"，求复势.

3. 已知等势线族的方程为"$x^2+y^2=$常数"，求复势.

4. 已知电力线为跟实轴相切于原点的圆族，求复势.

5. 在圆柱 $|z|=R$ 的外部的平面静电场的复势为 $f(z)=i2\sigma\ln(R/z)$，求柱面上的电荷面密度.

6. 有两个平行而均匀带电的线电荷，每单位长度所带电量分别是 $+q$ 和 $-q$，两线相距 $2a$. 求这个平面静电场的复势、电场线和等势线.

* §1.6 多值函数

前面介绍的初等函数中，除了单值函数外，还有根式函数、对数函数等多值函数. 本节以根式函数

$$w=\sqrt{z} \qquad (1.6.1)$$

为例介绍多值函数的一些基本性质.

由(1.1.19)，$w=\sqrt{z}=\sqrt{|z|}\,e^{i(\operatorname{Arg} z)/2}$. 把 w 的模和辐角分别记作 r 和 θ，则除了 $z=0$ 以外，有

$$r=\sqrt{|z|}, \quad \theta=\frac{1}{2}\operatorname{Arg} z=\frac{1}{2}\arg z+n\pi. \qquad (1.6.2)$$

这样，w 的主辐角有两个值(对应于 $n=0$ 和 $n=1$)：

$$\theta_1=\frac{1}{2}\arg z,\quad \theta_2=\frac{1}{2}\arg z+\pi, \tag{1.6.3}$$

相应地给出两个不同的 w 值

$$\begin{cases} w_1=\sqrt{|z|}e^{i(\arg z)/2} \\ w_2=\sqrt{|z|}e^{i(\arg z)/2+i\pi} \end{cases} \tag{1.6.4}$$

这称为多值函数 $w=\sqrt{z}$ 的两个**单值分支**.

实变函数也有多值的.例如，对于任意指定的非零实数 x，二次根式 $\sqrt{x}$ 有 $+\sqrt{x}$ 和 $-\sqrt{x}$ 两个单值分支.但是，$+\sqrt{x}$ 和 $-\sqrt{x}$ 完全可以看作两个独立的单值函数.复变函数的单值分支则不然，它们并非互相独立.例如，以(1.6.4)的单值分支之一 w_1 而论，设 z 从图 1-7 的某个点 z_0 出发，相应地，w 从 $w_1=\sqrt{|z_0|}e^{i(\arg z_0)/2}$ 出发.z 沿闭合路径 l(l 包围 $z=0$)绕行一周而回到 z_0，Arg z 增加了 2π.按照(1.6.2)，w 的辐角增加 π，从而 $w=\sqrt{|z_0|}e^{i(\arg z_0)/2+i\pi}$，这就进入了另一单值分支 w_2.由此可见，(1.6.4)的 w_1 和 w_2 不能看作两个独立的单值函数.当然，如果从 z_0 出发，沿另一闭合路径 l'(l' 不包围 $z=0$)绕行一周而回到 z_0，Arg z 没有改变，w 仍然等于 $\sqrt{|z_0|}e^{i(\arg z_0)/2}$，仍然在单值分支 w_1，没有转入单值分支 w_2.

因此，$z=0$ 点具有这样的特征：当 z 绕该点一周回到原处时，对应的函数值不复原.

一般地说，对于多值函数 $w=f(z)$，若 z 绕某点一周，函数值 w 不复原，而在该点各单值分支函数值相同，则称该点为多值函数的**支点**.若当 z 绕支点 n 周，函数值 w 复原，便称该点为多值函数的 $n-1$ **阶**支点.例如，函数 $w=\sqrt{z}$，显然，z 沿 l 绕支点 $z=0$ 两周后，w 值还原，因此，$z=0$ 是 $w=\sqrt{z}$ 的一阶支点.

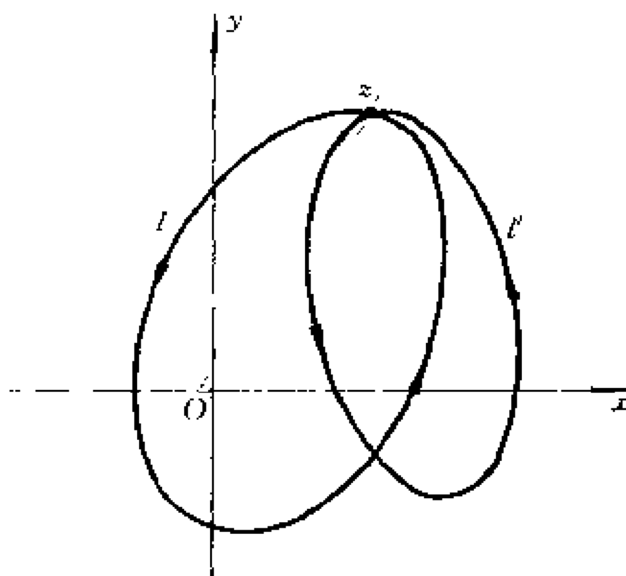


图 1-7

除了 $z=0$ 外，$z=\infty$ 亦是 $w=\sqrt{z}$ 的一阶支点. 要说明这一点，只需令 $z=\frac{1}{t}$，则有 $w=\sqrt{\frac{1}{t}}=\frac{1}{\sqrt{t}}$，当 t 绕 $t=0$ 一周回到原处时，w 值不还原，绕两周后 w 值还原，因此 $t=0$，即 $z=\infty$ 为 $w=\sqrt{z}$ 的一阶支点.

现在试用一种形象化的方式来描述多值函数 $w=\sqrt{z}$ 的值的变化情况. 这里约定，对两个单值分支，宗量的变化范围分别是

对于单值分支 w_1，　$0\leqslant \mathrm{Arg}\ z<2\pi$；

对于单值分支 w_2，　$2\pi\leqslant \mathrm{Arg}\ z<4\pi$.

现在用几何图形来表示(图 1-8)，在平面 T_1 上，从 $z=0$ 开始，沿正实轴方向至无限远点将其割开，并规定，割线上缘对应 $\mathrm{Arg}\ z=0$，下缘 $\mathrm{Arg}\ z=2\pi$，这样，z 在该平面上变化时，只要不跨越割线，其辐角便被限制在 $0\leqslant \mathrm{Arg}\ z<2\pi$ 范围内，相应的函数值位于 w 平面的上半平面，$0\leqslant \mathrm{Arg}\ w<\pi$. 在平面 T_2 上也作类似的切割，但割线上缘对应于 $\mathrm{Arg}\ z=2\pi$，下缘对应于 $\mathrm{Arg}\ z=4\pi$，同样，z 在该平面上变化时亦不得跨越割线，与该平面上的 z 值对应的函数值位于 w 平面的下半平面.



图 1-8a

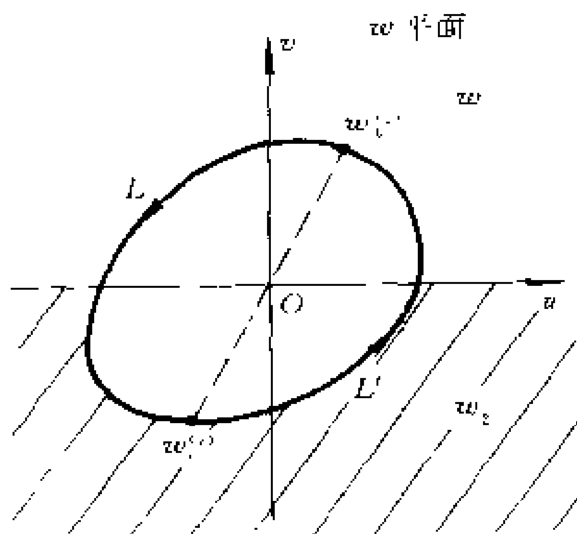


图 1-8b

由于在割开的两个平面上，宗量变化时均不得跨越割线，因而任何闭曲线都不包含支点 $z=0$ 于其内，因此函数值也只能在一个单值分支上变化.

进而，我们将平面 T_1 和平面 T_2 作如下结合，将平面 T_1 的割线上缘与平面 T_2 的割线下缘连起来，而将平面 T_1 的割线下缘与平面 T_2 的割线上缘连起来，构成一个两叶的面，称为函数 $w=\sqrt{z}$ 的**黎曼面**.

现在让我们来观察一下当 z 在这双叶黎曼面上变化时，函数值 w 如何变化. 设 z 从平面 T_1 上某点 $z_0^{(1)}$ 出发而连续变化. 绕 $z=0$ 一圈，它的轨迹 l 将跨越割线 $\text{Arg}\, z=2\pi$ 而到达平面 T_2 上与 $z_0^{(1)}$ 复数值相同的 $z_0^{(2)}$ 点，相应的函数值从图 1-8(b)中的 $w_0^{(1)}$ 沿

与 l 相应的 L 路线到达 $w_0^{(2)}$，当 z 继续再绕 $z=0$ 一圈，它的轨迹 l' 将跨越连起来的割线 $\text{Arg } z=0$ 和 $\text{Arg } z=4\pi$ 而回到平面 T_1 上的 $z_0^{(1)}$，相应的 w 值也从 $w_0^{(2)}$ 沿相应路径 L' 从 $w_0^{(2)}$ 回到 $w_0^{(1)}$. 这样，l 和 l' 相接而构成黎曼面上的一条闭合路径，相应地，曲线 L 和 L' 相接构成 w 平面上的一条闭合路径. 我们看到黎曼面上的点与 w 平面上的点是一一对应的，而且，从黎曼面的结构可以看出，两个单值分支相互衔接，并可连续过渡，从一支到达另一支.

习　题

指出下列多值函数的支点及其阶，并作出黎曼面.

(1) $\sqrt{z-a}$，　　(2) $\sqrt{(z-a)(z-b)}$，

(3) $\ln z$，　　(4) $\ln(z-a)$.



第二章　复变函数的积分

§2.1　复变函数的积分

设在复数平面的某分段光滑曲线 l 上定义了连续函数 $f(z)$. 在 l 上取一系列分点 z_0(即起点 A), $z_1, z_2, \cdots z_n$(即终点 B), 把 l 分成 n 个小段(图 2-1). 在每一小段 $[z_{k-1}, z_k]$ 上任取一点 ζ_k, 作和

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}).$$

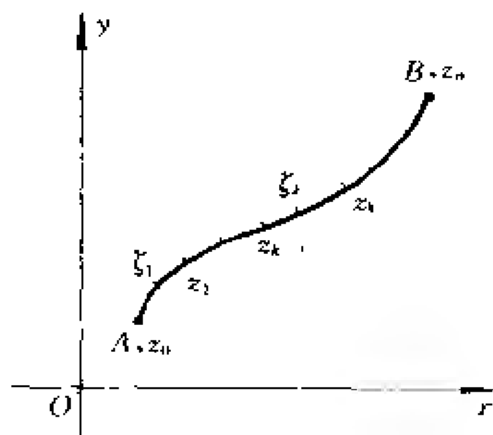


图 2-1

于 $n\to\infty$ 而且每一小段都无限缩短时, 如果这个和的极限存在, 而且其值与各个 ζ_k 的选取无关, 则这个和的极限称为函数 $f(z)$ 沿曲线 l 从 A 到 B 的**路积分**, 记作 $\int_l f(z)\mathrm{d}z$, 即

$$\int_l f(z)\mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) \qquad (2.1.1)$$

把 z_k 和 $f(z)$ 都用实部和虚部表出,

$$z_k = x_k + \mathrm{i}y_k, f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y),$$

则 $$\int_l f(z)\mathrm{d}z = \int_l u(x,y)\mathrm{d}x - v(x,y)\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_l v(x,y)\mathrm{d}x + u(x,y)\mathrm{d}y. \tag{2.1-2}$$

这样，复变函数的路积分可以归结为两个实变函数线积分，它们分别是路积分的实部和虚部. 因而实变函数线积分的许多性质也对路积分成立，例如

1. 常数因子可以移到积分号之外，
2. 函数的和的积分等于各个函数的积分之和，
3. 反转积分路径，积分变号，
4. 全路径上的积分等于各段上积分之和.

例 试计算积分

$$I_1 = \int_{l_1} \mathrm{Re}z\mathrm{d}z, \quad I_2 = \int_{l_2} \mathrm{Re}z\mathrm{d}z,$$

l_1、l_2 分别如图 2-2 所示. 两条路径的起点和终点相同，均自 $z=0$ 至 $z=1+\mathrm{i}$.

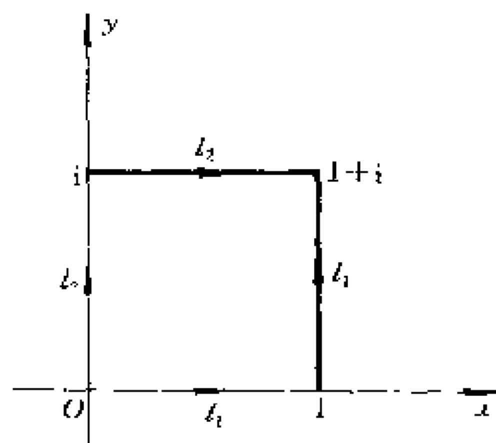


图 2-2

解 先计算 I_1，

$$I_1 = \int_0^1 x\mathrm{d}x + \int_0^1 i\mathrm{d}y = \frac{1}{2} + \mathrm{i}.$$

再计算 I_2，

$$I_2 = \int_0^1 o \cdot \mathrm{i}\mathrm{d}y + \int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

可见，两个积分，虽然被积函数相同，起点、终点亦相同，但由于积分路径不同，其结果并不相同. 一般说来，复变函数的积分值不仅依赖于起点和终点，同时还与积分路径有关.

§2.2 柯西定理

§2.1 指出，一般说来，复变函数的积分值不仅依赖于积分的起点和终点，而且与积分路径有关. 本节就来讨论复变函数的积分值与积分路径的关系，主要介绍复变函数积分的重要定理——柯西定理. 下面分两种情形来说明.

（一）单通区域情形

所谓**单通区域**是这样的区域，在其中作任何简单的闭合围线，围线内的点都是属于该区域内的点.

单通区域柯西定理 如果函数 $f(z)$ 在闭单通区域 $\overline{B}$ 上解析，则沿 $\overline{B}$ 上任一分段光滑闭合曲线 l（也可以是 $\overline{B}$ 的边界），有

$$\oint_l f(z)\mathrm{d}z = 0. \qquad (2.2.1)$$

证明 按(2.1.2)，

$$\oint_l f(z)\mathrm{d}z = \oint_l u(x,y)\mathrm{d}x - v(x,y)\mathrm{d}y + \mathrm{i}\oint_l v(x,y)\mathrm{d}x + u(x,y)\mathrm{d}y.$$

由于 $f(z)$ 在 $\overline{B}$ 上解析，因而 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$，在 $\overline{B}$ 上连续，对上式右端实部虚部分别应用格林公式

$$\oint_l P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad (2.2.2)$$

将回路积分化成面积分，有

$$\oint_l f(z)\mathrm{d}z = -\iint_S \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \mathrm{i}\iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

同样，由于 $f(z)$ 在 $\overline{B}$ 上解析，其实部 u 和虚部 v 在 $\overline{B}$ 上满足柯

西 黎曼条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}.$$

因而两个积分均为零，即得(2.2.1).

上述柯西定理还可以推广．如果函数 $f(z)$ 在单通区域 B 上解析，在闭单通区域 $\bar{B}$ 上连续，则沿 $\bar{B}$ 上任一分段光滑闭合曲线 l（也可以是 $\bar{B}$ 的边界），有

$$\oint_l f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

此定理的证明可参看例如 И. И. 普里瓦洛夫的《复变函数引论》第四章 § 2.

(二) 复通区域情形

有时，所研究的函数在区域上并非处处解析，而是在某些点或者某些子区域上不可导（甚至不连续或根本没有定义），即存在**奇点**．为了将这些奇点排除在区域之外，就需要作一些适当的闭合曲线把这些奇点分隔出去，或者形象地说把这些奇点挖掉而形成某种带“孔”的区域，即所谓**复通区域**.

一般说来，在区域内，只要有一个简单的闭合曲线其内有不属于该区域的点，这样的区域便称为**复通区域**.

对于区域（单通区域及复通区域）的境界线，通常这样来规定其（内、外）**正方向**：当观察者沿着这个方向前进时，区域总是在观察者的左边.

复通区域柯西定理 如果 $f(z)$ 是闭复通区域上的单值解析函数，则

$$\oint_l f(z)\mathrm{d}z + \sum_{i=1}^{n}\oint_{l_i} f(z)\mathrm{d}z = 0, \qquad (2.2.3)$$

式中 l 为区域外境界线，诸 l_i 为区域内境界线，积分均沿境界线的正方向进行.

证明 考虑图 2-3 中以 $l, l_1, l_2, \cdots l_n$ 为境界的复通区域（图中只画出 l, l_1, l_2），作割线连接内外境界线．原来的复通区域变成了

以 $ABl_1B'A'$，l 的 $A'C$ 段，$CDl_2D'C'$，l 的 $C'A$ 段为境界线的单通区域，而在这单通区域上 $f(z)$ 是解析的．按单通区域柯西定理

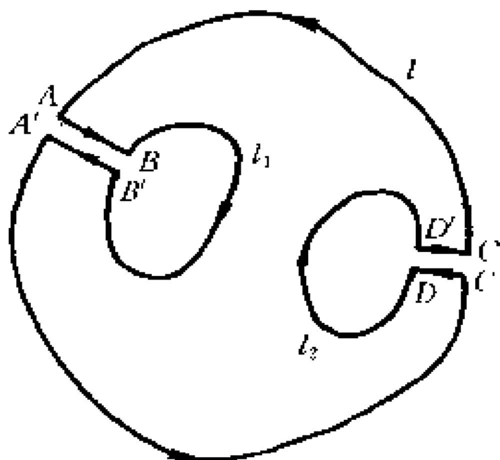


图 2-3

$$\oint_l f(z)\mathrm{d}z + \int_{AB} f(z)\mathrm{d}z + \oint_{l_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{B'A'} f(z)\mathrm{d}z$$

$$+ \int_{CD} f(z)\mathrm{d}z + \oint_{l_2} f(z)\mathrm{d}z + \int_{D'C'} f(z)\mathrm{d}z + \cdots = 0.$$

其中沿同一割线两边缘上的积分值相互抵消，于是有

$$\oint_l f(z)\mathrm{d}z + \oint_{l_1} f(z)\mathrm{d}z + \oint_{l_2} f(z)\mathrm{d}z + \cdots = 0,$$

即得(2.2.3).

将(2.2.3)中求和项移到等号右边，改写成

$$\oint_l f(z)\mathrm{d}z = -\sum_{i=1}^{n} \oint_{l_i} f(z)\mathrm{d}z,$$

即

$$\oint_l f(z)\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} \oint_{l_i} f(z)\mathrm{d}z. \qquad (2.2.4)$$

这是说，沿内外境界线逆时针方向积分相等．[注意(2.2.4)积分号上叠置的圆圈带有箭头！]

总结起来，**柯西定理**说的是

1．闭单通区域上的解析函数沿境界线积分为零，

2．闭复通区域上的解析函数沿所有内外境界线正方向积分和为零．

3. 闭复通区域上的解析函数沿外境界线逆时针方向积分等于沿所有内境界线逆时针方向积分之和.

从柯西定理又知道,对于某个闭单通或闭复通区域上为解析的函数,只要起点和终点固定不变,当积分路径连续变形(就是说不跳过"孔")时,函数的路积分的值不变.

§2.3 不定积分

根据柯西定理,我们知道,若函数 $f(z)$ 在单通区域 B 上解析,则沿 B 上任一路径 l 的积分 $\int_l f(z)\mathrm{d}z$ 的值只跟起点和终点有关,而与路径无关. 因此当起点 z_0 固定时,这个不定积分就定义了一个单值函数,记作

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta. \tag{2.3.1}$$

可以证明,$F(z)$ 在 B 上是解析的,且 $F'(z) = f(z)$,即 $F(z)$ 是 $f(z)$ 的一个**原函数**.

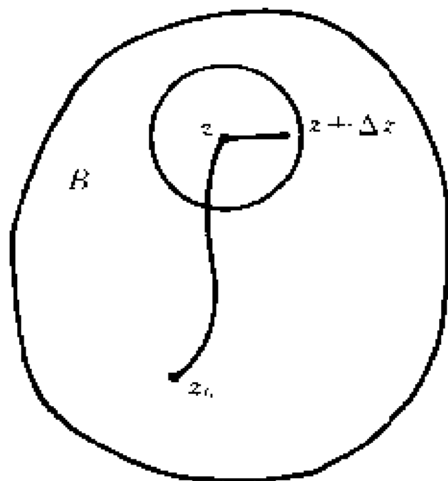


图 2-4

证明 我们只要对 B 上任一点 z 证明 $F'(z)=f(z)$ 就行了. 以 z 为圆心作一含于 B 的小圆. 在小圆内取 $z+\Delta z$ 点(图 2-4),试考虑

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z}\left[\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta - \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right]$$

在 $\Delta z\to 0$ 时的极限. 由于积分与路径无关, $\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 的积分路径可以考虑为由 z_0 到 z, 再从 z 沿直线段到 $z+\Delta z$, 而由 z_0 到 z 的积分与括号内第二项相消, 于是有

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta.$$

注意到 $f(z)$ 是与积分变量 ζ 无关的定值, 所以有

$$f(z)=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)\mathrm{d}\zeta.$$

于是

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}[f(\zeta)-f(z)]\mathrm{d}\zeta.$$

由于 $f(z)$ 在 B 上连续, 对任意给定的正数 ϵ, 必存在正数 δ, 使得当 $|\zeta-z|<\delta$ 时, $|f(\zeta)-f(z)|<\epsilon$, 即只要小圆取得足够小, 则小圆内的一切点均满足 $|f(\zeta)-f(z)|<\epsilon$. 这样

$$\begin{aligned}&\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|\\ =&\left|\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}[f(\zeta)-f(z)]\mathrm{d}\zeta\right|<\frac{1}{|\Delta z|}\int_{z}^{z+\Delta z}\epsilon|\mathrm{d}\zeta|=\epsilon\frac{|\Delta z|}{|\Delta z|}=\epsilon,\end{aligned}$$

即

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=f(z).$$

还可以证明

$$\int_{z_1}^{z_2} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta=F(z_2)-F(z_1). \qquad (2.3.2)$$

就是说, 路积分的值等于原函数的改变量.

下面给出一个重要的例题.

例 计算积分

$$I=\oint_l (z-\alpha)^n\mathrm{d}z. \qquad (n\ 为整数) \qquad (2.3.3)$$

解 若回路 l 不包围点 α, 则被积函数在 l 所围区域上是解析的, 按照柯西定理, 积分值为零.

接着讨论 l 包围 α 的情况. 如 $n\geqslant 0$, 被积函数在 l 所围区域上是解析的; 如 $n<0$, 被积函数在 l 所围区域中有一个奇点 α. 不管 $n\geqslant 0$ 还是 $n<0$, 我们总可以把 l 变形为以点 α 为圆心而半径为 R

的圆周 C,R 是相当任意的(图 2-5). 在 C 上,$z-\alpha=Re^{i\varphi}$,

$$\begin{aligned} I &= \oint_l (z-\alpha)^n \mathrm{d}z \\ &= \oint_C R^n e^{in\varphi} \mathrm{d}(\alpha + Re^{i\varphi}) \\ &= \int_0^{2\pi} R^n e^{in\varphi} Re^{i\varphi} i \mathrm{d}\varphi \\ &= iR^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\varphi} \mathrm{d}\varphi. \end{aligned}$$

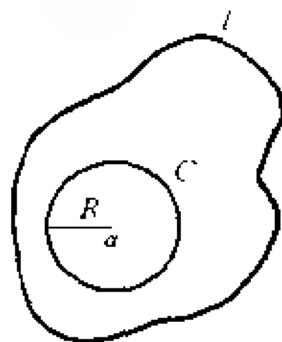


图 2-5

这样,如 $n\neq-1$,则

$$I=iR^{n+1}\frac{1}{i(n+1)}e^{i(n+1)\varphi}\Big|_0^{2\pi}=0;$$

如 $n=-1$,则

$$I=i\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi=2\pi i.$$

其实,从原函数角度来看,这个结果是很显然的. 如 $n\neq-1$,$(z-\alpha)^n$ 的原函数是单值函数 $(z-\alpha)^{n+1}/(n+1)$,绕 α 一周,原函数的改变量为零. 如 $n=-1$,$(z-\alpha)^{-1}$ 的原函数是多值函数 $\ln(z-\alpha)$,逆时针绕 α 一周,$\ln(z-\alpha)$ 的改变量为 $2\pi i$.

总结起来,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{\mathrm{d}z}{z-\alpha}=\begin{cases}0,(l\text{ 不包围 }\alpha)\\ 1.\quad(l\text{ 包围 }\alpha)\end{cases} \tag{2.3.4}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_l (z-\alpha)^n \mathrm{d}z=0.\qquad(n\neq-1) \tag{2.3.5}$$

(2.3.4)和(2.3.5)很有用,从它们可以引出一系列重要结果,例如下节的柯西公式以及 § 4.1 的留数定理.

§ 2.4 柯 西 公 式

若 $f(z)$ 在闭单通区域 $\overline{B}$ 上解析,l 为 $\overline{B}$ 的境界线,α 为 B 内的任一点,则有**柯西公式**

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{f(z)}{z-\alpha}dz. \qquad (2.4.1)$$

现在来证明柯西公式. 首先注意到,由(2.3.4)显然有

$$f(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{2\pi i}\oint_l \frac{1}{z-\alpha}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{f(\alpha)}{z-\alpha}dz.$$

将此式与(2.4.1)比较,可以看出,为了证明(2.4.1),只需证明

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}dz = 0.$$

由于 $z=\alpha$ 一般为被积函数 $[f(z)-f(\alpha)]/(z-\alpha)$ 的奇点,因此,以 α 为圆心,ε 为半径作小圆 C_ε,于是在 l 及 C_ε 所围复通区域上 $[f(z)-f(\alpha)]/(z-\alpha)$ 单值解析. 按柯西定理,

$$\oint_l \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}dz = \oint_{C_\varepsilon} \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}dz. \qquad (2.4.2)$$

现对(2.4.2)右端的值作一估计,

$$\left|\oint_{C_\varepsilon} \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}dz\right| \leqslant \frac{\max|f(z)-f(\alpha)|}{\varepsilon}2\pi\varepsilon,$$

其中 $\max|f(z)-f(\alpha)|$ 是 $|f(z)-f(\alpha)|$ 在 C_ε 上的最大值. 令 $\varepsilon\to 0$,则 $C_\varepsilon\to\alpha$,由于 $f(z)$ 的连续性,因而有 $f(z)\to f(\alpha)$,即 $\max|f(z)-f(\alpha)|\to 0$,于是,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\oint_{C_\varepsilon} \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}dz\right| \leqslant \lim_{\varepsilon\to 0}2\pi\cdot\max|f(z)-f(\alpha)| = 0.$$

由于(2.4.2)左端与 ε 无关,故必有

$$\oint_l \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}dz = 0.$$

从而柯西公式得证.

柯西公式将解析函数在任一内点 α 的值 $f(\alpha)$ 用沿境界线 l 的回路积分表示了出来. 这并不奇怪,因为解析函数在各点的值通过柯西-黎曼方程相互联系着. 从物理上说,解析函数紧密联系于平面标量场,而平面场的边界条件决定着区域内部的场.

因为 α 是任取的,所以通常把 α 改记作 z,积分变数则改用 ζ

表示，于是柯西公式(2.4.1)改写为

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta. \tag{2.4.3}$$

若 $f(z)$在 l 所围区域上存在奇点，这就要考虑挖去奇点后的复通区域. 在复通区域上 $f(z)$解析，显然柯西公式仍然成立. 只要将 l 理解为所有境界线，并且其方向均取正向.

柯西公式(2.4.3)适用于 l 所围的内部区域. 它也可推广到 l 的外部包含无限远点的区域.

设 $f(z)$在闭回路 l 的外部解析，以 $z=0$ 为圆心，充分大的 R 为半径，作圆 C_R，使回路 l 包含于 C_R 内，于是 $f(z)$在 l 及 C_R 所围复通区域上解析，应用复通区域上的柯西公式，有

$$f(z)=\oint_l \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\oint_{C_R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

由于 $f(z)$在无限远处连续，即任给 $\varepsilon>0$，总能相应找到 R_1，使得当 $|z|>R_1$ 时，有 $|f(z)-f(\infty)|<\varepsilon$，其中 $f(\infty)$有界，于是只要 $R>R_1$，则有

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-f(\infty)\right|\\ =&\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R}\frac{f(\infty)}{\zeta-z}d\zeta\right|\\ \leqslant&\frac{1}{2\pi}\oint_{C_R}\frac{|f(\zeta)-f(\infty)|}{|\zeta-z|}|d\zeta|<\frac{1}{2\pi}\frac{\varepsilon}{R}\cdot 2\pi R.\end{aligned}$$

即

$$\lim_{R\to\infty}\oint_{C_R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=f(\infty),$$

所以

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+f(\infty). \tag{2.4.4}$$

特别是当 $f(\infty)=0$ 时，有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta. \tag{2.4.5}$$

柯西公式的一个重要推论是解析函数可求导任意多次. 简单地说，由于 z 为区域的内点，积分变数在区域的境界线上，$\zeta-z\neq 0$，积分号下的函数 $f(\zeta)/(\zeta-z)$在区域上处处可导. 因此，(2.4.5)可在积分号下对 z 求导，得

$$f'(z)=\frac{1!}{2\pi i}\oint_l \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta, \tag{2.4.6}$$

反复在积分号下求导,得

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_l \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta. \tag{2.4.7}$$

以下是柯西公式的两个推论.

模数原理 设 $f(z)$ 在某个闭区域上为解析,则 $|f(z)|$ 只能在境界线 l 上取极大值.

证 对函数 $[f(z)]^n$ 应用柯西公式,得

$$[f(z)]^n=\frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{[f(\zeta)]^n}{\zeta-z}d\zeta. \tag{2.4.8}$$

如 $|f(\zeta)|$ 在 l 上的极大值为 M, $|\zeta-z|$ 的极小值为 δ, l 的长为 s,则从(2.4.8)可估计出

$$|f(z)|^n\leqslant\frac{1}{2\pi}\frac{M^n}{\delta}s,$$

即

$$|f(z)|\leqslant M\left(\frac{s}{2\pi\delta}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

令 $n\to\infty$,即得

$$|f(z)|\leqslant M. \tag{2.4.9}$$

这就证明了模数原理.(2.4.9)式只有当 $f(z)$ 为常数时才适用等号.

刘维尔定理 如 $f(z)$ 在全平面上为解析,并且是有界的,即 $|f(z)|\leqslant N$,则 $f(z)$ 必为常数.

证 对 $f'(z)$ 应用柯西公式,得

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta. \tag{2.4.10}$$

以 z 为圆心作半径为 R 的圆周,拿这圆周作为 l,可从(2.4.10)估计出

$$|f'(z)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\frac{N}{R^2}2\pi R=\frac{N}{R}. \tag{2.4.11}$$

R 是任意选定的,不妨令 $R\to\infty$,于是从(2.4.11)得知

$$f'(z)=0,$$

亦即 $f(z)$ 等于常数.

习　题

1. 已知函数 $\Psi(t,x)=e^{2tx-t^2}$. 把 x 当作参数,把 t 认为是复变数,试应用

柯西公式把$\left.\dfrac{\partial^n \Psi}{\partial t^n}\right|_{t=0}$表为回路积分.

对回路积分进行积分变数的代换 $t=x-z$,并借以证明

$$\left.\frac{\partial^n \Psi}{\partial t^n}\right|_{t=0}=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}.$$

(本题的 $\Psi(t,x)$是埃尔米特多项式的母函数,见附录九).

2. 已知函数 $\Psi(t,x)=e^{-xt/(1-t)}/(1-t)$. 把 x 当作参数,把 t 认为是复变数,试应用柯西公式把$\dfrac{\partial^n \Psi}{\partial t^n}\Big|_{t=0}$表为回路积分.

对回路积分进行积分变数的代换 $t=(z-x)/z$,并借以证明

$$\left.\frac{\partial^n \Psi}{\partial t^n}\right|_{t=0}=e^{x}\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}).$$

(本题的 $\Psi(t,x)$是拉盖尔多项式的母函数,见附录十).

第三章　幂级数展开

读者已经熟悉实变函数展开为幂级数，那是很有用的. 例如，截取幂级数的前面有限项可作为函数的近似表达式（项数取决于要达到的近似程度）. 又如，常微分方程往往可用级数形式解出. 本章研究复变函数的幂级数展开.

§3.1　复数项级数

设有复数项的无穷级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} w_k = w_1 + w_2 + \cdots + w_k + \cdots, \qquad (3.1.1)$$

它的每一项都可分为实部和虚部，

$$w_k = u_k + \mathrm{i} v_k.$$

那么，(3.1.1)的前 n 项的和 $\sum_{k=1}^{n} w_k = \sum_{k=1}^{n} u_k + \mathrm{i} \sum_{k=1}^{n} v_k$，从而

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} w_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k + \mathrm{i} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} v_k.$$

这样，复数项无穷级数(3.1.1)的**收敛性问题**就归结为两个实数项级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \quad 与 \quad \sum_{k=1}^{\infty} v_k \qquad (3.1.2)$$

的收敛性问题. 于是，实数项级数的许多性质和规律常可移用于复数项级数，现在列举一些如下.

柯西收敛判据成立. 这是说，复数项级数(3.1.1)收敛的充分必要条件是，对于任一给定的小正数 ε，必有 N 存在，使得 $n>N$ 时，

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} w_k\right|<\varepsilon,$$

式中 p 为任意正整数.

如果复数项级数(3.1.1)各项的模(这是正的实数)组成的级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}|w_k| = \sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{u_k^2+v_k^2} \tag{3.1.3}$$

收敛,就把复数项级数(3.1.1)叫作**绝对收敛**.绝对收敛的复数项级数必是收敛的.绝对收敛级数各项先后次序可以改变,其和并不因此改变.

设有两个绝对收敛的复数项级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}p_k \quad 与 \quad \sum_{k=1}^{\infty}q_k, \tag{3.1.4}$$

把它们逐项相乘,得

$$p_1q_1+(p_1q_2+p_2q_1)+(p_1q_3+p_2q_2+p_3q_1)+\cdots. \tag{3.1.5}$$

(3.1.5)也是绝对收敛的,而且它的和就等于(3.1.4)那两个级数的和之积.

特别讨论复变项级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}w_k(z) = w_1(z)+w_2(z)+\cdots+w_k(z)+\cdots, \tag{3.1.6}$$

它的各项是 z 的函数.如果在某个区域 B(或某根曲线 l)上所有的点,级数(3.1.6)都收敛,就叫作在 B(或 l)上收敛.应用柯西判据,复变项级数(3.1.6)在 B(或 l)上收敛的充分必要条件是,在 B(或 l)上各点 z,对于任一给定的小正数 ε,必有 $N(z)$ 存在,使得 $n>N(z)$时,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} w_k(z)\right|<\varepsilon,$$

式中 p 为任意正整数.如果 N 跟 z 无关,就把复变项级数叫作在 B(或 l)上**一致收敛**.

在 B 上一致收敛的复变项级数的每一项都是 B 上的连续函数，则级数的和也是 B 上的连续函数.

在 l 上一致收敛的复变项级数的每一项都是 l 上的连续函数，则级数的和也是 l 上的连续函数，而且级数可以沿 l 逐项积分.

如果对于某个区域 B(或曲线 l)上所有各点 z，复变项级数(3.1.6)的各项的模 $|w_k(z)|\leqslant m_k$，而正的常数项级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} m_k$$

收敛，则复变项级数在 B(或 l)上绝对且一致收敛.

§3.2 幂 级 数

本节专门研究这样的复变项级数，它的各项都是幂函数，

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots, \tag{3.2.1}$$

其中 $z_0, a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots$ 都是复常数. 这样的级数叫作以 z_0 为**中心的幂级数**.

试考察由(3.2.1)各项的模所组成的正项级数

$$|a_0| + |a_1||z-z_0| + |a_2||z-z_0|^2 + \cdots + |a_k||z-z_0|^k + \cdots. \tag{3.2.2}$$

应用正项级数的**比值判别法(达朗贝尔判别法)**可知，如果

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}||z-z_0|^{k+1}}{|a_k||z-z_0|^k} = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right||z-z_0| < 1,$$

则(3.2.2)收敛，即(3.2.1)绝对收敛. 引入记号 R，

$$R = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|, \tag{3.2.3}$$

就可以说，

$$\text{如果}|z-z_0|<R\text{，则(3.2.1)绝对收敛.} \tag{3.2.4}$$

另一方面，如果$|z-z_0|>R$，则后项与前项的模之比的极限

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}||z-z_0|^{k+1}}{|a_k||z-z_0|^k}>\lim_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}R=1.$$

这是说，级数(3.2.1)的相当后面的项的模越来越大，因而必然是发散级数，即

$$\text{如果}|z-z_0|>R\text{，则(3.2.1)发散.} \tag{3.2.5}$$

以 z_0 为圆心作一个半径为 R 的圆周 C_R. 从(3.2.4)和(3.2.5)知道，幂级数(3.2.1)在圆的**内部**绝对收敛，在圆外发散. 这个圆因而叫作幂级数的**收敛圆**，它的半径则叫作**收敛半径**，收敛半径由(3.2.3)式给出. 至于在收敛圆周上各点，幂级数或收敛或发散，需要分别具体分析.

对于正项级数(3.2.2)，除了比值判别法以外，还可以应用**根值判别法**

如$\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k||z-z_0|^k}<1$，则(3.2.2)收敛，(3.2.1)绝对收敛；

如$\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k||z-z_0|^k}>1$，则(3.2.1)各项的模$>1$，因而发散.

这样，我们得到收敛半径 R 的另一公式，

$$R=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}. \tag{3.2.6}$$

所谓"圆的**内部**"指的是比这个圆稍稍缩小一些的闭区域. 因此，以 z_0 为圆心作一个半径 R_1 稍稍小于 R 的圆周 C_{R_1}，在 C_{R_1} 所围的闭圆域上，幂级数(3.2.1)的各项的模 $|a_k(z-z_0)^k|\leqslant|a_k|R_1^k$. 对正的常数项级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|R_1^k$$

应用比值判别法，

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}|R_1^{k+1}}{|a_k|R_1^k}=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|R_1=\frac{1}{R}R_1<1.$$

这个正的常数项级数收敛．按照上节最后一段，这是说，幂级数(3.2.1)在收敛圆的内部不仅绝对而且一致收敛．

例1 求幂级数 $1+t+t^2+\cdots+t^k+\cdots$ 的收敛圆，t 为复变数．

解 本例所有系数 $a_k=1$．应用(3.2.3)求收敛半径

$$R=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{1}\right|=1.$$

因此，收敛圆以 $t=0$ 为圆心而半径为 1，收敛圆的内部可以表为 $|t|<1$．

其实，本例是几何级数，公比为 t，所以前 $n+1$ 项的和

$$\sum_{k=0}^{n}t^k=1+t+t^2+\cdots+t^n=\frac{1-t^{n+1}}{1-t}.$$

如 $|t|<1$，则

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}t^k=\lim_{n\to\infty}\frac{1-t^{n+1}}{1-t}=\frac{1}{1-t}.$$

这是说，在收敛圆内，幂级数的和为 $1/(1-t)$，

$$1+t+t^2+\cdots+t^k+\cdots=\frac{1}{1-t}\quad(|t|<1).\qquad(3.2.7)$$

例2 求幂级数 $1-z^2+z^4-z^6+\cdots$ 的收敛圆，z 为复变数．

解 把 z^2 记作 t，本例的级数即 $1-t+t^2-t^3+\cdots$．系数交替为 $+1$ 和 -1．应用(3.2.3)求 t 平面上的收敛半径

$$R=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|=1.$$

这样，z 平面上的收敛半径为 $\sqrt{R}$ 亦即 1．收敛圆的内部可表为 $|z|<1$．

其实，本例也是几何级数，公比为 $-z^2$．在 $|z|<1$ 的条件下，容易求出这个几何级数的和为 $1/(1+z^2)$，

$$1-z^2+z^4-z^6+\cdots=\frac{1}{1+z^2}\quad(|z|<1).\qquad(3.2.8)$$

幂级数(3.2.1)在收敛圆的内部绝对且一致收敛．这是说，它在一个稍稍缩小的圆周 C_{R_1} 上一致收敛．因此，它可以沿 C_{R_1} 逐项

积分. 为了应用柯西公式(2.4.3)，把(3.2.1)的 z 改记作 ζ，并把级数的和记作 $w(\zeta)$，

$$w(\zeta)=a_0+a_1(\zeta-z_0)+a_2(\zeta-z_0)^2+\cdots. \qquad (3.2.9)$$

取任一内点 z，用有界函数 $\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\zeta-z}$ 遍乘(3.2.9)，

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{w(\zeta)}{\zeta-z}$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\frac{a_0}{\zeta-z}+\frac{1}{2\pi i}\frac{a_1(\zeta-z_0)}{\zeta-z}+\frac{1}{2\pi i}\frac{a_2(\zeta-z_0)^2}{\zeta-z}+\cdots.$$

这级数仍然在 C_{R_1} 上一致收敛，可以沿 C_{R_1} 逐项积分，

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_1}}\frac{w(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_1}}\frac{a_0}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_1}}\frac{a_1(\zeta-z_0)}{\zeta-z}d\zeta$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_1}}\frac{a_2(\zeta-z_0)^2}{\zeta-z}d\zeta+\cdots,$$

幂函数在开平面上是解析的，上式右边各项可以分别应用柯西公式(2.4.3)得

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_1}}\frac{w(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots.$$

这是说，幂级数(3.2.1)的和可以表为连续函数的回路积分，而连续函数的回路积分可在积分号下求导任意多次，亦即是解析函数. 这样，幂级数的和在收敛圆的内部是解析函数，在收敛圆内不可能出现奇点.

(3.2.8)给出幂级数 $1-z^2+z^4-z^6+\cdots\cdots$ 的和是 $1/(1+z^2)$，这个和具有孤立奇点 $z=\pm i$，而 $\pm i$ 正好在收敛圆周 $|z|=1$ 上. 这可以帮助我们理解收敛半径为 1 的道理.

如果限制在实数领域里，(3.2.8)就成为

$$1-x^2+x^4-x^6+\cdots=\frac{1}{1+x^2} \quad (|x|<1).$$

$|x|=1$ 即 $x=\pm 1$ 并不是 $1/(1+x^2)$ 的奇点，条件 $|x|<1$ 就不那么容易理

解了.

改用有界函数$\frac{n!}{2\pi i}\frac{1}{(\zeta-z)^{n+1}}$遍乘(3.2.9),

$$
\begin{aligned}
&\frac{n!}{2\pi i}\frac{w(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}} \\
&=\frac{n!}{2\pi i}\frac{a_0}{(\zeta-z)^{n+1}}+\frac{n!}{2\pi i}\frac{a_1(\zeta-z_0)}{(\zeta-z)^{n+1}} \\
&\quad+\frac{n!}{2\pi i}\frac{a_2(\zeta-z_0)^2}{(\zeta-z)^{n+1}}+\cdots.
\end{aligned}
$$

沿回路C_{R_1}逐项积分并应用柯西公式(2.4.7)得

$$
w^{(n)}(z)=[a_0]^{(n)}+[a_1(z-z_0)]^{(n)}+[a_2(z-z_0)^2]^{(n)}+\cdots.
$$

这是说,幂级数在收敛圆内可以逐项求导任意多次.

因为收敛圆的内部是单通区域,所以幂级数在收敛圆内又可以逐项积分.

请读者自己验证,逐项积分或逐项求导并不改变收敛半径.

习　　题

1. 把幂级数(3.2.1)逐项求导,求所得级数的收敛半径,以此验证逐项求导并不改变收敛半径.

2. 把幂级数(3.2.1)逐项积分,求所得级数的收敛半径,以此验证逐项积分并不改变收敛半径.

3. 求下列幂级数的收敛圆.

(1) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}(z-i)^k$,　　(2) $\sum_{k=1}^{\infty}k^{\ln k}(z-2)^k$,

(3) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{z}{k}\right)^k$,　　(4) $\sum_{k=1}^{\infty}k!\left(\frac{z}{k}\right)^k$,

(5) $\sum_{k=1}^{\infty}k^k(z-3)^k$.

4. 已知幂级数$\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k$和$\sum_{k=0}^{\infty}b_kz^k$的收敛半径分别是$R_1$和$R_2$.求下列幂级数的收敛半径.

(1) $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k)z^k$,　　　　(2) $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k - b_k)z^k$,

(3) $\sum_{k=0}^{\infty}a_k b_k z^k$,　　　　(4) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{b_k}z^k \quad (b_k \neq 0)$.

太乐

§3.3　泰勒级数展开

从§3.2知道,幂级数之和在收敛圆内部为解析函数.本节研究解析函数的幂级数展开问题.

我们知道,任意阶导数都存在的实变函数可以展为泰勒级数.既然解析函数的任意阶导数都存在,自然可以期望把解析函数展为复变项的泰勒级数.

定理　设 $f(z)$在以 z_0 为圆心的圆 C_R 内解析,则对圆内的任意 z 点,$f(z)$可展为幂级数,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}a_k(z - z_0)^k,$$

其中

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}d\zeta = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!},$$

C_{R_1}为圆 C_R 内包含 z 且与 C_R 同心的圆.

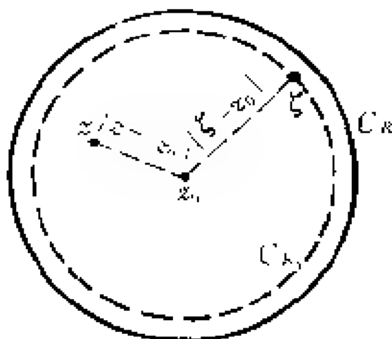


图 3-1

证明　如图 3-1,为了避免涉及泰勒级数在圆周 C_R 上的收敛或发散问题,作较 C_R 小,但包含 z 且与 C_R 同心的圆周 C_{R_1}.应用柯

西公式(2.4.1)，

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_1}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta. \tag{3.3.1}$$

接下去的工作是把 $1/(\zeta-z)$ 展为幂级数.考虑到展开式应以圆心 z_0 为中心，先把 $1/(\zeta-z)$ 改写为

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-z_0)-(z-z_0)}=\frac{1}{\zeta-z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}}. \tag{3.3.2}$$

拿这式右边第二个因子跟(3.2.7)比较，可知

$$\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}}=1+\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}+\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^2+\cdots\left(\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|<1\right).$$

把这代入(3.3.2)得

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-z_0}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^k}{(\zeta-z_0)^k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^k}{(\zeta-z_0)^{k+1}}. \tag{3.3.3}$$

又把(3.3.3)代入(3.3.1)并逐项积分，

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(z-z_0)^k\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R_1}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta.$$

根据柯西公式(2.4.7)，上式就是以 z_0 为中心的**泰勒级数**

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k\quad(|z-z_0|<R). \tag{3.3.4}$$

以 z_0 为中心的泰勒级数(3.3.4)**是唯一的**.事实上，假如另有一个以 z_0 为中心的不同于(3.3.4)的泰勒级数

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k, \tag{3.3.5}$$

就应当有

$$\begin{aligned}&a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots\\&=f(z_0)+\frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\cdots.\end{aligned} \tag{3.3.6}$$

在(3.3.6)中令 $z=z_0$,得

$$a_0=f(z_0).$$

把(3.3.6)求导一次,然后令 $z=z_0$,得

$$a_1=\frac{f'(z_0)}{1!}.$$

把(3.3.6)再求导一次,然后令 $z=z_0$,得

$$a_2=\frac{f''(z_0)}{2!}.$$

照这样作下去,就看出展开式(3.3.5)跟展开式(3.3.4)完全相同.

上节已经证明幂级数的和是解析函数,这里又证明解析函数可以展开为唯一的泰勒级数.由此可见,泰勒级数跟解析函数有着不可分的联系.

例 1 在 $z_0=0$ 的邻域上把 $f(z)=e^z$ 展开.

解 函数 $f(z)=e^z$ 的各阶导数 $f^{(k)}(z)=e^z$,而

$$f^{(k)}(z_0)=f^{(k)}(0)=1.$$

按照(3.3.4)可写出 e^z 在 $z_0=0$ 的邻域上的泰勒级数

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots+\frac{z^k}{k!}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}. \tag{3.3.7}$$

应用(3.2.3)求得这个泰勒级数的收敛半径为无限大.这是说,只要 z 是有限的,泰勒级数(3.3.7)就收敛.

例 2 在 $z_0=0$ 的邻域上把 $f_1(z)=\sin z$ 和 $f_2(z)=\cos z$ 展开.

解 函数 $f_1(z)=\sin z$ 的前四阶导数是 $f_1'(z)=\cos z$,$f_1''(z)=-\sin z$,$f_1^{(3)}(z)=-\cos z$,$f_1^{(4)}(z)=\sin z$.这 $f_1^{(4)}(z)$ 正是 $f_1(z)$ 本身,可见更高阶的导数不过是前四阶导数的重复.

在 $z_0=0$,$f_1(z)$ 和前四阶导数的值是 $f_1(0)=0$,$f_1'(0)=1$,$f_1''(0)=0$,$f_1^{(3)}(0)=-1$,$f_1^{(4)}(0)=0$.

按照(3.3.4)可写出 $\sin z$ 在 $z_0=0$ 的邻域上的泰勒级数

$$\sin z=\frac{z}{1!}-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots. \tag{3.3.8}$$

应用(3.2.3)求得这个泰勒级数的收敛半径为无限大.

同理可得 $\cos z$ 在 $z_0=0$ 的邻域上的泰勒级数

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots. \tag{3.3.9}$$

应用(3.2.3)求得这个泰勒级数的收敛半径为无限大.

例 3 在 $z_0=1$ 的邻域上把 $f(z)=\ln z$ 展开.

解 多值函数 $f(z)=\ln z$ 的支点在 $z=0,\infty$. 现在的展开中心 $z_0=1$ 并非支点,在它的邻域上,各个单值分支互相独立,各自是一个单值函数,可比照单值函数的展开方法加以展开.

先计算展开系数:

$$f(z)=\ln z, \qquad f(1)=\ln 1=n2\pi i \quad (n\text{ 为整数}),$$

$$f'(z)=\frac{1}{z}, \qquad f'(1)=+1;$$

$$f''(z)=-\frac{1!}{z^2}, \qquad f''(1)=-1!;$$

$$f^{(3)}(z)=\frac{2!}{z^3}, \qquad f^{(3)}(1)=+2!;$$

$$f^{(4)}(z)=-\frac{3!}{z^4}, \qquad f^{(4)}(1)=-3!;$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

于是按照(3.3.4)可写出 $\ln z$ 在 $z_0=1$ 的邻域上的泰勒级数

$$\begin{aligned}\ln z &=\ln 1+\frac{1}{1!}(z-1)+\frac{-1!}{2!}(z-1)^2\\ &\quad+\frac{2!}{3!}(z-1)^3+\frac{-3!}{4!}(z-1)^4+\cdots\\ &=n2\pi i+(z-1)-\frac{(z-1)^2}{2}+\frac{(z-1)^3}{3}\\ &\quad-\frac{(z-1)^4}{4}+\cdots.\end{aligned}$$

按照(3.2.3)可求得这个泰勒级数的收敛半径为 1,因此

$$\ln z=n2\pi i+(z-1)-\frac{(z-1)^2}{2}$$

$$+\frac{(z-1)^3}{3}-\frac{(z-1)^4}{4}+\cdots \quad (|z-1|<1). \tag{3.3.10}$$

(3.3.10)的 $n=0$ 的那一个单值分支叫作 $\ln z$ 的**主值**.

例 4 在 $z_0=0$ 的邻域上把 $f(z)=(1+z)^m$ 展开(m 不是整数).

解 先计算展开系数:

$f(z)=(1+z)^m$, $\qquad f(0)=1^m$;

$f'(z)=m(1+z)^{m-1}$ $\qquad f'(0)=m1^m$;

$=\frac{m}{1+z}f(z)$,

$f''(z)=m(m-1)(1+z)^{m-2}$ $\qquad f''(0)=m(m-1)1^m$;

$=\frac{m(m-1)}{(1+z)^2}f(z)$,

$f^{(3)}(z)$ $\qquad f^{(3)}(0)$

$=\frac{m(m-1)(m-2)}{(1+z)^3}f(z)$, $\qquad =m(m-1)(m-2)1^m$;

… $\qquad$ …

于是按照(3.3.4)可写出 $(1+z)^m$ 在 $z_0=0$ 的邻域上的泰勒级数

$$\begin{aligned}(1+z)^m &= 1^m+\frac{m}{1!}1^m z+\frac{m(m-1)}{2!}1^m z^2 \\ &\quad +\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}1^m z^3+\cdots \\ &= 1^m\left\{1+\frac{m}{1!}z+\frac{m(m-1)}{2!}z^2\right. \\ &\quad \left.+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}z^3+\cdots\right\},\end{aligned}$$

按照(3.2.3)可求得这个泰勒级数的收敛半径为 1,因此

$$\begin{aligned}(1+z)^m &= 1^m\left\{1+\frac{m}{1!}z+\frac{m(m-1)}{2!}z^2\right. \\ &\quad \left.+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}z^3+\cdots\right\} \\ &\quad (|z|<1).\end{aligned} \tag{3.3.11}$$

式中的

$$1^m=(e^{in2\pi})^m=e^{imn2\pi} \quad (n \text{ 为整数}).$$

在(3.3.11)的许多单值分支中，$n=0$ 亦即 $1^m=1$ 的那一个叫作$(1+z)^m$ 的**主值**.(3.3.11)也就是指数为非整数的**二项式定理**.

习　题

在指定的点 z_0 的邻域上把下列函数展开为泰勒级数.

(1) $\mathrm{arctg}z$ 在 $z_0=0$，　(2) $\sqrt[3]{z}$ 在 $z_0=i$，

(3) $\ln z$ 在 $z_0=i$，　(4) $\sqrt[m]{z}$ 在 $z_0=1$，

(5) $e^{1/(1-z)}$ 在 $z_0=0$，　(6) $\ln(1+e^z)$ 在 $z_0=0$，

(7) $(1+z)^{1/z}$ 在 $z_0=0$，　(8) $\sin^2 z$ 和 $\cos^2 z$ 在 $z_0=0$.

§3.4　解析延拓

细看(3.2.7)，(3.2.8)，(3.3.10)和(3.3.11)几个式子.这些式子后面的括号里注明成立条件.假如取消所注的条件，则等号两边并不完全是一回事.例如，(3.2.8)的左边是幂级数 $1-z^2+z^4-z^6+\cdots$，它在单位圆 $|z|=1$ 内部收敛，其和是解析函数，但如超出单位圆，级数就发散而无意义；右边是 $1/(1+z^2)$，它在除去 $z=\pm i$ 的全平面上是解析函数.这样，我们有两个函数，其一

$$f(z)=1-z^2+z^4-z^6+\cdots \quad (|z|<1) \tag{3.4.1}$$

在一个较小的区域上是解析函数，另一

$$F(z)=\frac{1}{1+z^2} \quad (\text{除 } z=\pm i \text{ 以外}) \tag{3.4.2}$$

则在含有上述区域的一个较大的区域上是解析函数，并且两者在那个较小的区域上等同.

于是就出现这样的问题：已给某个区域 b 上的解析函数 $f(z)$，是否能找出另一函数 $F(z)$，它在含有区域 b 的一个较大的区域 B 上是解析函数，而且在区域 b 上等同于 $f(z)$？这个问题叫作**解析**

延拓．简单地说，解析延拓就是解析函数定义域的扩大．

从原则上说，解析延拓总可以利用泰勒级数进行．具体地说，选取区域 b 的任一内点 z_0，在 z_0 的邻域上把解析函数 $f(z)$ 展开为泰勒级数．如果这个泰勒级数的收敛圆有一部分超出 b 之外，解析函数 $f(z)$ 的定义域就扩大了一步．这样一步又一步，定义域逐步扩大．

利用泰勒级数进行解析延拓虽然是个普遍方法，但具体用起来计算很繁，所以通常总是尽量利用一些特殊方法，例如(3.4.2)就是(3.4.1)的解析延拓．不管用哪种方法进行解析延拓都可以，因为解析延拓是唯一的．关于这个唯一性，下面给出简单的论证．

$f(z)$ 是区域 b 上的解析函数，用两种方法把 $f(z)$ 解析延拓到含有区域 b 的一个较大的区域 B 上．假定从两种方法得到的解析函数是不同的，分别为 $F_1(z)$ 和 $F_2(z)$．在区域 b 上，$F_1(z)$ 和 $F_2(z)$ 各自等同于 $f(z)$，因而 $F_1(z)-F_2(z)$ 在 b 上处处为零．这样，函数 $F_1(z)-F_2(z)$ 是区域 B 上的解析函数而且并非处处为零，但在区域 B 的一个子区域 b 上却是处处为零(图 3-2)．

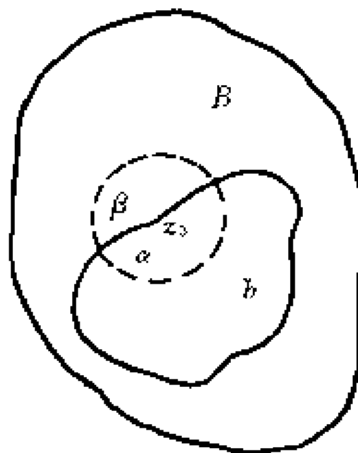


图 3-2

选取 b 的境界线上一点 z_0，图中用虚线标明 z_0 的一个邻域，这邻域的一部分 α 属于 b，另一部分 β 则不属于 b．于是，按照上述假定，函数 $F_1(z)-F_2(z)$ 在 α 上处处为零，在 β 上并非处处为零(否则就把 β 并入 b)．以 z_0 为中心把解析函数 $F_1(z)-F_2(z)$ 展开为泰勒级数

$$F_1(z)-F_2(z)=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots+a_k(z-z_0)^k+\cdots.$$

设这些系数中第一个不为零的是 a_m(m 是有限的)，即

$$F_1(z)-F_2(z)=(z-z_0)^m[a_m+a_{m+1}(z-z_0)$$

$$+a_{m+2}(z-z_0)^2+\cdots]. \quad (3.4.3)$$

对于点 z_0 的紧邻 z 而言，$|z-z_0|$ 很小，因而(3.4.3)的[ ]中以 a_m 为最重要，即 $[a_m+a_{m+1}(z-z_0)+a_{m+2}(z-z_0)^2+\cdots]\approx a_m$，从而

$$F_1(z)-F_2(z)\approx(z-z_0)^m a_m\neq 0.$$

这是说，$F_1(z)-F_2(z)$ 不可能在 α 上处处为零. 这样，在 α 上处处为零要求所有的系数 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_k, \cdots$ 无一例外都是零. 但如果所有系数全为零，势必使 $F_1(z)-F_2(z)$ 在 β 上也处处为零，这跟原来的假定是矛盾的. 总结起来说，区域 B 上的解析函数

$$F_1(z)-F_2(z)$$

在子区域 b 上处处为零，必在整个区域 B 上处处为零. 换句话说，用两种方法进行解析延拓所得到的 $F_1(z)$ 和 $F_2(z)$ 是完全等同的，即解析延拓是唯一的.

§3.5 洛朗级数展开

当所研究的区域上存在函数的奇点时，就不再能将函数展开成泰勒级数，而需要考虑在除去奇点的环域上的展开. 这就是本节所要讨论的洛朗级数展开.

首先简单介绍一下含有正、负幂项的幂级数，所谓双边幂级数.

$$\cdots+a_{-2}(z-z_0)^{-2}+a_{-1}(z-z_0)^{-1}+a_0+a_1(z-z_0)$$
$$+a_2(z-z_0)^2+\cdots. \quad (3.5.1)$$

设它的正幂部分有某个收敛半径，记作 R_1. 如引用新的变量 $\zeta=\frac{1}{z-z_0}$，则负幂部分成为

$$a_{-1}\zeta+a_{-2}\zeta^2+a_{-3}\zeta^3+\cdots. \quad (3.5.2)$$

设(3.5.2)式幂级数有某个收敛圆，其半径记作 $\frac{1}{R_2}$，则它在圆 $|\zeta|=\frac{1}{R_2}$ 的内部收敛，亦即在 $|z-z_0|=R_2$ 的外部收敛. 如果 $R_2<R_1$，

那么级数(3.5.1)就在环域 $R_2<|z-z_0|<R_1$ 内绝对且一致收敛，其和为一解析函数. 级数可逐项求导. 环域 $R_2<|z-z_0|<R_1$ 称为级数(3.5.1)的**收敛环**. 如果 $R_2>R_1$，则级数处处发散.

下面我们讨论环域上的解析函数的幂级数展开问题.

定理 设 $f(z)$ 在环形区域 $R_2<|z-z_0|<R_1$ 的内部单值解析，则对环域上任一点 z，$f(z)$ 可展为幂级数

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k(z-z_0)^k. \tag{3.5.3}$$

其中

$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta, \tag{3.5.4}$$

积分路径 C 为位于环域内按逆时针方向绕内圆一周的任一闭合曲线.

证明 为避免涉及在圆周上函数的解析性及级数的收敛性问题. 今将外圆稍稍缩小为 C'_{R_1}，内圆稍稍扩大为 C'_{R_2}，(图 3-3)，应用复通区域上的柯西公式

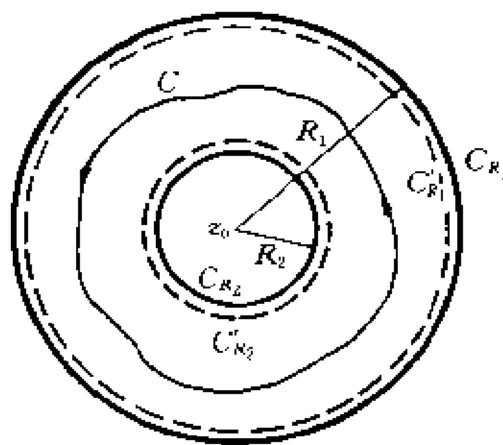


图 3-3

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C'_{R_1}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C'_{R_2}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta. \tag{3.5.5}$$

下面将 $\frac{1}{\zeta-z}$ 展为幂级数. 对于沿 C'_{R_1} 的积分，可像(3.3.3)那样展开 $\frac{1}{\zeta-z}$，

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}}. \tag{3.5.6}$$

对于沿 C_{R_2} 的积分，考虑到 $|z-z_0|>|\zeta-z_0|$，改按以下方式将 $\frac{1}{\zeta-z}$ 展开，

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = -\frac{1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}}$$

$$= -\frac{1}{z - z_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^l}{(z - z_0)^l} = -\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^l}{(z - z_0)^{l+1}}. \tag{3.5.7}$$

把(3.3.6)和(3.3.7)分别代入(3.3.5)右边的两个积分，并逐项积分，

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)^k \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta$$

$$- \sum_{l=0}^{\infty} (z - z_0)^{-(l+1)} \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_2}} (\zeta - z_0)^l f(\zeta) d\zeta.$$

在上式右边第二部分之中，改用 $k=-(l+1)$ 代替 l 作为求和指标，并根据柯西定理(2.2.4)把积分回路改为 C'_{R_1}，即得

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \tag{3.5.8}$$

其中

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta.$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta. \tag{3.5.9}$$

C 为环域内沿逆时针方向绕内圆一周的任一闭回线. (3.5.3)称为 $f(z)$ 的**洛朗展开**，其右端的级数称为**洛朗级数**.

关于洛朗级数，有几点需要特别加以说明：

(1)尽管(3.5.3)的级数中含有 $z-z_0$ 的负幂项，而这些项在 $z=z_0$ 时都是奇异的，但点 z_0 可能是也可能不是函数 $f(z)$ 的奇点

(参看下面的例子).

(2)尽管求展开系数 a_k 的公式(3.5.4)与泰勒展开系数 a_k 的公式形式相同,但这里的 $a_k \neq f^{(k)}(z_0)/k!$,不论 z_0 是否为 $f(z)$的奇点.如果 z_0 是 $f(z)$的奇点,则 $f^{(k)}(z_0)$根本不存在;如果 z_0 不是奇点,则 $f^{(k)}(z_0)$存在,但 a_k 还是不等于 $f^{(k)}(z_0)/k!$.因为 $f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}d\zeta$ 成立的条件是在以 C 为边界的区域上 $f(z)$解析,而对于现在所讨论的情况,这区域上有 $f(z)$的奇点(若无奇点就无需考虑洛朗展开了).

(3)如果只有环心 z_0 是 $f(z)$的奇点,则内圆半径可以任意小,同时 z 可以无限地接近 z_0 点,这时称(3.5.3)为 $f(z)$在它的孤立奇点 z_0 的邻域内的洛朗展开式.这是特别重要的一种情形,§3.6将用它研究函数在其孤立奇点附近的性质.

同泰勒展开一样,洛朗展开也是唯一的(证明从略).展开的唯一性使得可用各种不同的办法求得环域上解析函数的洛朗展开式.

例1 在 $z_0=0$ 的邻域上把$(\sin z)/z$ 展开.

解 函数$(\sin z)/z$ 在原点没有定义,$z_0=0$ 是奇点.

引用 $\sin z$ 在原点的邻域上的展开式(3.3.8),

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots \quad (|z| < \infty).$$

为了避开奇点,从复数平面挖去原点.在挖去原点的复数平面上,用 z 遍除 $\sin z$ 的展开式,就得$(\sin z)/z$ 的展开式

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots \quad (0 < |z| < \infty). \quad (3.5.10)$$

其实,如果定义一个函数 $f(z)$.

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\sin z}{z} & (z \neq 0), \\ \lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z} = 1 & (z = 0), \end{cases}$$

则 $f(z)$ 在整个开平面上是解析的. 从(3.5.10)直接得到 $f(z)$ 在 $z_0=0$ 的邻域上的展开式

$$f(z)=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\frac{z^6}{7!}+\cdots \quad (|z|<\infty). \tag{3.5.11}$$

(3.5.11)正是解析函数 $f(z)$ 的泰勒级数.

例 2 在 $1<|z|<\infty$ 的环域上将函数 $f(z)=1/(z^2-1)$ 展为洛朗级数.

解 $$\frac{1}{z^2-1}=\frac{1}{z^2}\frac{1}{1-\dfrac{1}{z^2}}=\frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z^2}\right)^k$$

$$=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^6}+\cdots.$$

展开式中出现无限多个负幂次项, 但展开中心 $z=0$ 本身却不是函数的奇点(奇点在 $z=\pm1$).

例 3 在 $z_0=1$ 的邻域上将函数 $f(z)=1/(z^2-1)$ 展为洛朗级数.

解 先把 $f(z)$ 分解为分项公式

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z+1)}=\frac{1}{2}\frac{1}{z-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{z+1}$$

第二项只有一个奇点 $z=-1$, 因此, 在 $z_0=1$ 的邻域 $|z-1|<2$ 上可以展为泰勒级数. 利用(3.2.7)即得

$$\frac{1}{2}\frac{1}{z+1}=\frac{1}{2}\frac{1}{(z-1)+2}=\frac{1}{4}\frac{1}{1+(z-1)/2}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{z-1}{2}\right)^k. \quad (|z-1|<2)$$

于是

$$\frac{1}{z^2-1}=\frac{1}{2}\frac{1}{z-1}$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{2^{k+2}}(z-1)^k. \ (0<|z-1|<2) \tag{3.5.12}$$

这个展开式出现 -1 次幂项.

例 4 在 $z_0=0$ 的邻域上把 $e^{1/z}$ 展开.

解 引用 e^z 在原点邻域上的展开式(3.3.7)

$$e^z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}z^k=1+\frac{1}{1!}z+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\cdots\quad(|z|<\infty),$$

把 z 全换成 $1/z$ 即得

$$\begin{aligned}e^{\frac{1}{z}}&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{1}{z}\right)^k\\&=1+\frac{1}{1!}\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}+\cdots\quad\left(\left|\frac{1}{z}\right|<\infty\right),\end{aligned}$$

即

$$e^{\frac{1}{z}}=\sum_{k=-\infty}^{0}\frac{1}{(-k)!}z^k\quad(0<|z|).\tag{3.5.13}$$

这个展开式出现无限多负幂项.

例 5 在 $z_0=0$ 的邻域上把 $e^{\frac{1}{2}x\left(z-\frac{1}{z}\right)}$ 展开.

解 由(3.3.7)和(3.5.13)得绝对收敛级数

$$e^{\frac{1}{2}xz}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\left(\frac{1}{2}xz\right)^l\quad(|z|<\infty),\tag{3.5.14}$$

$$e^{-\frac{1}{2}x\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{2}x\frac{1}{z}\right)^n\quad(0<|z|).\tag{3.5.15}$$

绝对收敛级数(3.5.14)和(3.5.15)可以逐项相乘,乘积中既有无限多正幂项,又有无限多负幂项. 为得到乘积中某个正幂 z^m $(m\geqslant 0)$项,应取(3.5.15)所有各项而分别用(3.5.14)中的 $l=n+m$ 项去乘. 为得到乘积中某个负幂 z^{-h} $(h>0)$项,应取(3.5.14)所有各项而分别用(3.5.15)中的 $n=l+h$ 项去乘. 这样,

$$\begin{aligned}e^{\frac{1}{2}x\left(z-\frac{1}{z}\right)}=&\sum_{m=0}^{\infty}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(m+n)!n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2n}\right]z^m\\&+\sum_{h=1}^{\infty}\left[(-1)^h\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l!(l+h)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{h+2l}\right]z^{-h}\\&(0<|z|<\infty).\end{aligned}$$

把 $-h$ 改作 m,l 改作 n,则

$$e^{\frac{1}{2}x\left(z-\frac{1}{z}\right)}=\sum_{m=0}^{\infty}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(m+n)!n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2n}\right]z^m$$

$$+\sum_{m=-1}^{-\infty}\left[(-1)^m\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+|m|)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{|m|+2n}\right]z^m$$

$$(0<|z|<\infty). \qquad (3.5.16)$$

顺便说一说，(3.5.16)的[ ]里正是数学物理中常用到的 m 阶贝塞尔函数 $J_m(x)$[参见§11.2]. 因此(3.5.16)也可写成

$$e^{\frac{1}{2}x\left(z-\frac{1}{z}\right)}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}J_m(x)z^m.$$

习　　题

在挖去奇点 z_0 的环域上或指定的环域上把下列函数展开为洛朗级数.

(1) $z^5 e^{1/z}$ 在 $z_0=0$，　　(2) $1/z^2(z-1)$ 在 $z_0=1$，

(3) $1/z(z-1)$ 在 $z_0=0$，在 $z_0=1$，

(4) $e^{1/(1-z)}$ 在 $|z|>1$，

(5) $1/(z-2)(z-3)$ 在 $|z|>3$，

(6) $(z-1)(z-2)/(z-3)(z-4)$ 在 $R<|z|<\infty$（R 很大）.

(7) $1/(z^2-3z+2)$ 在 $1<|z|<2$，

(8) $1/(z^2-3z+2)$ 在 $2<|z|<\infty$，

(9) e^z/z 在奇点，

(10) $(1-\cos z)/z$ 在奇点，

(11) $\sin(1/z)$ 在奇点，

(12) $\mathrm{ctg} z$ 在奇点，

(13) $z/(z-1)(z-2)^2$ 在 $|z|<1$，在 $1<|z|<2$，在 $2<|z|$，

(14) $z/(z-1)(z-2)$ 在 $|z|<1$，在 $1<|z|<2$，在 $2<|z|$，

(15) $1/z^2(z^2-1)^2$ 在 $0<|z|<1$，在 $1<|z|<\infty$.

§3.6　孤立奇点的分类

本节利用洛朗级数展开研究单值函数（或多值函数的单值分支）孤立奇点的分类及其性质.

在§3.5中已经提到过函数的孤立奇点的概念. 确切地讲，若函数 $f(z)$ 在某点 z_0 不可导，而在 z_0 的任意小邻域内除 z_0 外处处可导，便称 z_0 为 $f(z)$ 的**孤立奇点**. 若在 z_0 的无论多么小的邻域内总可以找到除 z_0 以外的不可导的点，便称 z_0 为 $f(z)$ 的**非孤立奇点**.

上节已经证明，在挖去孤立奇点 z_0 而形成的环域上的解析函数 $f(z)$ 可展为洛朗级数

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k(z-z_0)^k. \tag{3.6.1}$$

洛朗级数(3.6.1)的正幂部分叫作**解析部分**，负幂部分叫作**主要部分或无限部分**，$(z-z_0)^{-1}$ 的系数 a_{-1} 由于据有特别重要的地位(参看§4.1)，因而专门起了名字，叫作函数 $f(z)$ 在奇点 z_0 的**留数**.

一般地说，洛朗级数的主要部分有无限多负幂项. 但具体情况各有不同. 例如 $(\sin z)/z$ 在 $0<|z|<\infty$ 上的洛朗级数(3.5.10)没有负幂项，$1/(z^2-1)$ 在 $0<|z-1|<2$ 上的洛朗级数(3.5.12)只有一个负幂项，$e^{1/z}$ 在 $0<|z|$ 上的洛朗级数(3.5.13)则有无限多负幂项.

在挖去孤立奇点 z_0 而形成的环域上的解析函数 $f(z)$ 的洛朗级数或则没有负幂项，或则只有有限个负幂项，或则有无限个负幂项. 在这三种情况下，我们分别把 z_0 叫作函数 $f(z)$ 的可去奇点，极点或本性奇点.

如果 z_0 是 $f(z)$ 的**可去奇点**，就是说在以 z_0 为圆心而内半径为零的圆环域 $0<|z-z_0|<R$(R 是某个有限或无限的数值)上的洛朗级数为

$$f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots$$
$$(0<|z-z_0|<R). \tag{3.6.2}$$

据此显然有

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=a_0 \tag{3.6.3}$$

是有限的. 这是说，函数在可去奇点的邻域上是有界的.

其实，如果定义函数 $g(z)$ 以代替 $f(z)$，

$$g(z)=\begin{cases}f(z) & (z\neq z_0),\\ a_0 & (z=z_0),\end{cases}$$

则由(3.6.2)得

$$g(z)=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots \quad (|z-z_0|<R).$$

这就是 $g(z)$ 在 z_0 的邻域上的泰勒级数. 就函数 $g(z)$ 而言，z_0 不再是奇点. 这正是"可去奇点"一词的来历. 可去奇点今后将不作为奇点看待.

如果 z_0 是 $f(z)$ 的**极点**，就是说在圆环域 $0<|z-z_0|<R$ 上的洛朗级数为

$$\begin{aligned}f(z) &= a_{-m}(z-z_0)^{-m}+a_{-m+1}(z-z_0)^{-m+1}\\ &\quad +\cdots+a_0+a_1(z-z_0)+\cdots\\ &= \sum_{k=-m}^{\infty}a_k(z-z_0)^k \quad (0<|z-z_0|<R). \quad (3.6.4)\end{aligned}$$

据此显然有

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=\infty. \qquad (3.6.5)$$

m 叫作极点 z_0 的**阶**. 一阶的极点也简称为**单极点**.

如果 z_0 是 $f(z)$ 的**本性奇点**，就是说在圆环域 $0<|z-z_0|<R$ 上的洛朗级数为

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k(z-z_0)^k \quad (0<|z-z_0|<R). \quad (3.6.6)$$

在(3.6.6)中，令 $z\to$ 本性奇点 z_0，$f(z)$ 的极限随 z 趋于 z_0 的方式而定. 参看(3.5.13)，$z_0=0$ 是函数 $e^{1/z}$ 的本性奇点. 当 z 沿正实轴趋于零，则 $1/z\to+\infty$，而 $e^{1/z}\to\infty$；当 z 沿负实轴趋于零，则 $1/z\to-\infty$，而 $e^{1/z}\to 0$；当 z 按 $i/2\pi n$（n 为自然数 $1,2,3,\cdots$）的序列趋于零，则 $e^{1/z}=e^{-2\pi n i}=1\to 1$.

以上所说孤立奇点 z_0 都是指的有限远点. 这里再简单说说无限远点. 如果函数 $f(z)$ 在无限远点的邻域 $\infty>|z|>R$ 上是解析的，则可在外半径为 ∞ 的圆环域 $R<|z|<\infty$（R 是某个有限数值）上展为洛朗级数

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_kz^k \quad (R<|z|<\infty). \tag{3.6.7}$$

洛朗级数(3.6.7)的负幂部分叫作**解析部分**，正幂部分叫作**主要部分**或**无限部分**.

如果洛朗级数(3.6.7)没有正幂项，就说函数 $f(z)$在无限远点是解析的. 如果洛朗级数只有有限个正幂项，就把无限远点叫作 $f(z)$的**极点**，最高幂指数叫作极点的**阶**. 如果洛朗级数有无限个正幂项，就把无限远点叫作 $f(z)$的**本性奇点**.

其实，只要作变换 $\zeta=1/z$，把 $z=\infty$变换为$\zeta=0$，从 ζ 平面的原点来看，这些定义都是显然的了.

但是 $f(z)$在无限远点的**留数**却定义为 z^{-1}项(**注意**这属于解析部分而不属于主要部分)的系数 a_{-1}反号即$-a_{-1}$. 这是为了便于应用留数定理(参看(4.1.6)).

例如

$$e^z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}, \qquad \sin z=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

$$\cos z=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

以无限远点为本性奇点. 多项式 $a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$ 则以无限远点为 n 阶极点. 这几个展开式没有负幂项，所以这几个函数在无限远点的留数都是零.

多值函数还有一种奇点即**支点**. 这里只考虑有限阶的支点，例如 $m-1$ 阶的支点. 以多值函数 $f(z)$的 $m-1$ 阶支点 z_0 为圆心而内半径为零的圆环域，在黎曼面上是 m 叶交错相连的圆环，函数在这交错相连的圆环上是解析的. 引入新的自变数

$$\zeta=\sqrt[m]{z-z_0}=\sqrt[m]{|z-z_0|}\,e^{i\frac{1}{m}\arg(z-z_0)}$$

以代替原来的宗量 z. 由于 ζ 的辐角只是 $z-z_0$ 的辐角的 $1/m$，所以相应的 ζ 区域是单叶圆环. 换句话说，z 的多值函数 $f(z)$是 ζ 的单值函数. 在 ζ 平面的单叶圆环上把 $f(z)$展为洛朗级数

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\zeta^k. \tag{3.6.8}$$

洛朗级数(3.6.8)或者没有负幂项，或者只有有限个负幂项，或者有无限个负幂项. 在这三种情况下，我们分别把支点 z_0 叫作函数 $f(z)$的**解析型**、**极点型**、**本性奇点型**支点.

以原来的宗量 z 代回(3.6.8)，得

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^{k/m}. \tag{3.6.9}$$

幂指数 k/m 是分数。这正是支点邻域上的展开式的特征.

例如 $f(z)=1/(4+\sqrt{z})$ 以 $z_0=0$ 为一阶支点. 支点的邻域是二叶圆环. 引入新的自变数 $\zeta=\sqrt{z}$，则，

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{4+\zeta} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{1+\dfrac{\zeta}{4}} = \frac{1}{4}\left(1+\frac{\zeta}{4}\right)^{-1} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{\zeta}{4}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\zeta^k}{4^{k+1}} \quad (|\zeta|<4) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4^{k+1}}z^{k/2} \quad (|z|<16). \end{aligned}$$

习　题

设函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 分别以点 z_0 为 m 阶和 n 阶极点. 问对于下列函数而言，z_0 是何种性质的点？

(1) $f(z)g(z)$，(2) $f(z)/g(z)$，(3) $f(z)+g(z)$.

第四章　留数定理

§4.1　留数定理

柯西定理(2.2.1)指出，如被积函数 $f(z)$ 在回路 l 所围闭区域上是解析的，则回路积分 $\oint_l f(z)\mathrm{d}z$ 等于零. 因此，我们只需考虑回路 l 包围着 $f(z)$ 的奇点的情况.

先设 l 只包围着 $f(z)$ 的一个孤立奇点 z_0. 在以 z_0 为圆心而内半径为零的圆环域上把 $f(z)$ 展为洛朗级数

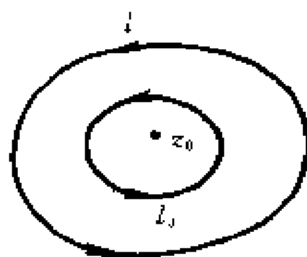


图 4-1

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k. \tag{4.1.1}$$

在洛朗级数(4.1.1)的收敛环中任取一个紧紧包围着 z_0 的小回路 l_0(图 4-1). 按照柯西定理(2.2.3)，

$$\oint_l f(z)\mathrm{d}z = \oint_{l_0} f(z)\mathrm{d}z.$$

把洛朗级数(4.1.1)代入上式右边，逐项积分，

$$\oint_l f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \oint_{l_0} (z - z_0)^k \mathrm{d}z.$$

据公式(2.3.4)和(2.3.5)，上式右边各项除去 $k=-1$ 的一项之外全为零，而 $k=-1$ 的一项里的积分等于 $2\pi\mathrm{i}$. 于是，

$$\oint_l f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}a_{-1}. \tag{4.1.2}$$

洛朗级数(4.1.1)的 $(z-z_0)^{-1}$ 项的系数 a_{-1} 就这样具有特别重要

的地位，因而专门起了名字，叫作函数 $f(z)$ 在点 z_0 的**留数**（或**残数**），**通常记作** $\mathrm{Res}f(z_0)$. 这样，

$$\oint_l f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}f(z_0). \qquad (4.1.3)$$

现在讨论 l 包围着 $f(z)$ 的 n 个孤立奇点 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 的情况. 作回路 $l_1, l_2, \cdots, l_n$ 分别紧紧包围着 $b_1, b_2, \cdots, b_n$. 按照柯西定理，

$$\oint_l f(z)\mathrm{d}z = \oint_{l_1} f(z)\mathrm{d}z + \oint_{l_2} f(z)\mathrm{d}z + \cdots + \oint_{l_n} f(z)\mathrm{d}z.$$

以(4.1.2)代入上式右边，得

$$\oint_l f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}[\mathrm{Res}f(b_1) + \mathrm{Res}f(b_2) + \cdots + \mathrm{Res}f(b_n)]. \qquad (4.1.4)$$

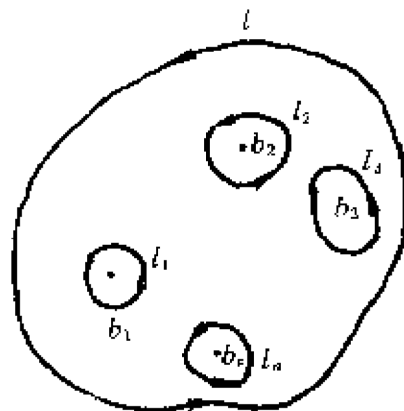


图 4-2

于是，我们得到

留数定理 设函数 $f(z)$ 在回路 l 所围区域 B 上除有限个孤立奇点 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 外解析，在闭区域 $\overline{B}$ 上除 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 外连续，则

$$\oint_l f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Res}f(b_j). \qquad (4.1.5)$$

留数定理将回路积分归结为被积函数在回路所围区域上各奇点的留数之和.

以上讨论都限于有限远点，我们还可以将这种讨论推广到无限远点的

情形.

设函数 $f(z)$ 在无限远点的邻域上解析. 我们来计算绕∞的正向回路积分 $\oint_l f(z)dz$，在 l 以外的区域上没有 $f(z)$ 的有限远奇点. 将 $f(z)$ 在无限远的邻域上展为洛朗级数，并代入积分式，得

$$\oint_l f(z)dz = \oint_l \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k \right) dz.$$

除 $k=-1$ 一项外，其余各项均为零，即

$$\oint_l f(z)dz = -2\pi i a_{-1} = 2\pi i(-a_{-1}) = 2\pi i \operatorname{Res} f(\infty). \quad (4.1.6)$$

$-a_{-1}$ 被定义为 $f(z)$ 在无限远点的留数 $\operatorname{Res} f(\infty)$. 这样，留数定理对于无限远点也成立. 注意，即使无限远点不是奇点 $\operatorname{Res} f(\infty)$ 也可以不为零.

有趣的是，如果 $f(z)$ 只有有限个奇点，所有有限远的奇点必在某个圆的内部 $|z|<R$，让我们在圆环域 $R<|z|<\infty$ 内任取一个回路 l，则由(4.1.5)，

$$\oint_l f(z)dz = 2\pi i\{f(z) \text{ 在所有有限远奇点的留数之和}\}.$$

拿上式跟(4.1.6)相加，得

$$0 = 2\pi i\{f(z) \text{ 在所有各点留数之和}\}. \quad (4.1.7)$$

即函数 $f(z)$ 在全平面上所有各点的留数之和为零. 这里说的所有各点包括无限远点和有限远的奇点.

既然留数定理把回路积分归结为被积函数在回路所围各奇点的留数之和，这里就讨论一下**如何计算留数**. 从一般原则来说，只要在以奇点为圆心的圆环域上把函数展开为洛朗级数，取它的负一次幂项的系数就行了. 但是，如果能够不作洛朗展开而直接算出留数，计算工作量可能减轻不少. 事实上，对于极点，确实可以做到这一点.

先设 z_0 是 $f(z)$ 的单极点. 洛朗级数应是

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots.$$

用 $(z-z_0)$ 遍乘各项，

$$(z-z_0)f(z) = a_{-1} + a_0(z-z_0) + a_1(z-z_0)^2 + \cdots.$$

在上式右边令 $z \to z_0$，得到非零的有限值即留数 a_{-1}. 这样，

$$\lim_{z \to z_0}[(z-z_0)f(z)] = \text{非零的有限值，即 } \mathrm{Res} f(z_0). \qquad (4.1.8)$$

(4.1.8)可用来判断 z_0 是否函数 $f(z)$ 的单极点，同时它又是计算函数 $f(z)$ 在单极点 z_0 的留数的公式.

若 $f(z)$ 可以表示为 $P(z)/Q(z)$ 的特殊形式，其中 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 都在 z_0 点解析，z_0 是 $Q(z)$ 的一阶零点. $P(z_0) \neq 0$，从而 z_0 是 $f(z)$ 的一阶极点，则

$$\mathrm{Res} f(z_0) = \lim_{z \to z_0}(z-z_0)\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}. \qquad (4.1.9)$$

上式最后一步应用了罗毕达法则.

再设 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶极点. 洛朗级数应是

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots. \qquad (4.1.10)$$

以 $(z-z_0)^m$ 遍乘(4.1.10)各项.

$$(z-z_0)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z-z_0) + \cdots + a_{-1}(z-z_0)^{m-1} + a_0(z-z_0)^m + a_1(z-z_0)^{m+1} + \cdots. \qquad (4.1.11)$$

在(4.1.11)的右边令 $z \to z_0$，得到非零的有限值 a_{-m}，

$$\lim_{z \to z_0}[(z-z_0)^m f(z)] = \text{非零有限值}. \qquad (4.1.12)$$

运用(4.1.12)可以判断 z_0 是否 m 阶极点.

(4.1.11)可说是函数 $[(z-z_0)^m f(z)]$ 的泰勒级数，而函数 $f(z)$ 在 m 阶极点 z_0 的留数 $\mathrm{Res} f(z_0)$ 即 a_{-1} 是这个级数的 $(z-z_0)^{m-1}$ 项的系数. 参照(3.3.4)，这个系数可以表示为

$$\mathrm{Res} f(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \left\{ \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)] \right\}. \qquad (4.1.13)$$

有了(4.1.8)和(4.1.12)，不必把函数 $f(z)$ 展为洛朗级数就可以**判断极点的阶**. 用它们和(4.1.9)、(4.1.13)还可**算出函数 $f(z)$ 在极点的留数**.

例 1 求 $f(z) = 1/(z^n - 1)$ 在 $z_0 = 1$ 的留数.

解 $\lim\limits_{z\to 1} f(z)=\infty$. 因此,$z_0=1$ 是函数的极点. 事实上,把分母分解为因式即得

$$f(z)=\frac{1}{z^n-1}=\frac{1}{(z-1)(z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+z+1)},$$

可见 $z_0=1$ 是单极点.

用(4.1.8)计算留数

$$\text{Res}f(1)=\lim_{z\to 1}\left[(z-1)\frac{1}{(z-1)(z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+z+1)}\right]$$

$$=\lim_{z\to 1}\frac{1}{z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+z+1}=\frac{1}{n}.$$

另解 应用(4.1.9),

$$\lim_{z\to 1}\left[\frac{1}{(z^n-1)'}\right]=\lim_{z\to 1}\frac{1}{nz^{n-1}}=\frac{1}{n}.$$

因此,在单极点 $z_0=1$ 留数是 $1/n$.

例 2 确定函数 $f(z)=1/\sin z$ 的极点,求出函数在这些极点的留数.

解 于 $z\to n\pi$(n 为整数,包括零),有 $\sin z\to 0, f(z)\to\infty$. 因此,$z_0=n\pi$ 是极点.

$$\lim_{z\to n\pi}[(z-n\pi)f(z)]=\lim_{z\to n\pi}\frac{z-n\pi}{\sin z}.$$

应用罗毕达法则确定上式右边的极限,

$$\lim_{z\to n\pi}[(z-n\pi)f(z)]=\lim_{z\to n\pi}\frac{(z-n\pi)'}{(\sin z)'}=\lim_{z\to n\pi}\frac{1}{\cos z}=(-1)^n.$$

$(-1)^n$ 是非零有限值. 因此,$z_0=n\pi$ 是 $f(z)=1/\sin z$ 的单极点,$f(z)$在单极点 $z_0=n\pi$ 的留数就是$(-1)^n$.

例 3 确定函数 $f(z)=(z+2\text{i})/(z^5+4z^3)$的极点,并求出函数在这些极点的留数.

解 先析出分母的因式,并与分子约去公因式,得

$$f(z)=\frac{z+2\text{i}}{z^3(z^2+4)}=\frac{z+2\text{i}}{z^3(z+2\text{i})(z-2\text{i})}=\frac{1}{z^3(z-2\text{i})}.$$

于 $z\to 2\text{i}$,有 $f(z)\to\infty$. 因此,$z_0=2\text{i}$ 是极点.

$$\lim_{z\to 2i}[(z-2i)f(z)]=\lim_{z\to 2i}\frac{1}{z^3}=-\frac{1}{8i}=\frac{i}{8},$$

由此可见，$z_0=2i$ 是单极点，留数就是 $i/8$.

于 $z\to 0$，也有 $f(z)\to\infty$. 因此，$z_0=0$ 也是极点.

$$\lim_{z\to 0}[z^3 f(z)]=\lim_{z\to 0}\frac{1}{z-2i}=-\frac{1}{2i}.$$

由此可见，$z_0=0$ 是三阶极点. 应用(4.1.13)计算 $f(z)$ 在 $z_0=0$ 的留数，

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}f(0)&=\lim_{z\to 0}\frac{1}{2!}\left\{\frac{d^2}{dz^2}[z^3 f(z)]\right\}\\&=\lim_{z\to 0}\frac{1}{2!}\left\{\frac{d^2}{dz^2}\frac{1}{z-2i}\right\}\\&=\lim_{z\to 0}\left\{\frac{1}{(z-2i)^3}\right\}=\frac{1}{8i}=-\frac{i}{8}.\end{aligned}$$

例 4 计算沿单位圆 $|z|=1$ 的回路积分

$$\oint_{|z|=1}\frac{dz}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}(0<\varepsilon<1).$$

解 令被积函数 $f(z)=\dfrac{1}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}$的分母为零，得二次代数方程 $\varepsilon z^2+2z+\varepsilon=0$，它的两根是 $z=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}$，这就是 $f(z)$ 的两个单极点.

单极点$\dfrac{-1-\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}$的模$\left|\dfrac{-1-\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\right|=\dfrac{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}>\dfrac{1}{\varepsilon}>1$，所以这个单极点在单位圆外，不为积分回路所包围，从而在计算回路积分时不必考虑.

单极点 $z_0=\dfrac{-1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}$的模$\left|\dfrac{-1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\right|=\dfrac{1-\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}=\dfrac{1-\sqrt{(1+\varepsilon)(1-\varepsilon)}}{\varepsilon}<\dfrac{1-(1-\varepsilon)}{\varepsilon}=1$ 在单位圆内. 计算回路积分必须考虑这个极点. 用(4.1.9)容易计算在这个极点的留数：

$$\mathrm{Res}f\left(\frac{-1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\right)=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{(\varepsilon z^2+2z+\varepsilon)'}$$

$$=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{2\varepsilon z+2}=\frac{1}{2\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

应用留数定理，

$$\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}=2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}f(z_0)=2\pi\mathrm{i}\frac{1}{2\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

$$=\frac{\pi\mathrm{i}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

习　题

1. 确定下列函数的奇点，求出函数在各奇点的留数.

(1) $e^z/(1+z)$，　(2) $z/(z-1)(z-2)^2$，

(3) $e^z/(z^2+a^2)$，　(4) $e^{iz}/(z^2+a^2)$，

(5) $ze^z/(z-a)^3$，　(6) $1/(z^3-z^5)$，

(7) $z^2/(z^2+1)^2$，　(8) $z^{2n}/(z+1)^n$，

(9) $e^{1/(1-z)}$，　(10) $1/(1+z^{2n})$.

2. 计算下列回路积分.

(1) $\oint_l\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)(z-1)^2}$（$l$ 的方程是 $x^2+y^2-2x-2y=0$），

(2) $\oint_{|z|=1}\frac{\cos z}{z^3}\mathrm{d}z$，

(3) $\oint_{|z|=2}e^{1/z^2}\mathrm{d}z$，

(4) $\oint_{|z|=2}\frac{z\mathrm{d}z}{1/2-\sin^2 z}$.

3. 应用留数定理计算回路积分 $\frac{1}{2\pi i}\oint_l\frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z$，函数 $f(z)$ 在 l 所围区域上是解析的，a 是这区域的一个内点.

§4.2　应用留数定理计算实变函数定积分

留数定理的一个重要应用是计算某些实变函数定积分. 为此，当然需要设法把实变函数定积分跟复变函数回路积分联系起来.

把实变定积分联系于复变回路积分的要点如下：定积分

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的积分区间$[a,b]$可以看作是复数平面上的实轴上的一段 l_1(图 4-3). 于是,或者利用自变数的变换把 l_1 变换为某个新的复数平面上的回路,这样就可以应用留数定理了;或者另外补上一段曲线 l_2,使 l_1 和 l_2 合成回路 l,l 包围着区域 B(图 4-3). 把 $f(x)$解析延拓到闭区域 B(这个延拓往往只不过是把 $f(x)$ 改为 $f(z)$而已),并拿它沿着 l 积分,

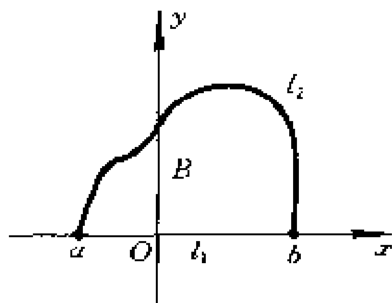


图 4-3

$$\oint_l f(z)\mathrm{d}z = \int_{l_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{l_2} f(z)\mathrm{d}z.$$

上式左边可以应用留数定理,右边第一个积分就是所求的定积分. 如果右边第二个积分较易算出(往往是证明为零)或可用第一个积分表出,问题就解决了.

下面具体介绍几个类型的实变定积分.

类型一 $\int_0^{2\pi} R(\cos x,\sin x)\mathrm{d}x$. 被积函数是三角函数的有理式;积分区间是$[0,2\pi]$.

作自变数代换

$$z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}. \tag{4.2.1}$$

在实变数 x 从 0 变到 2π 的过程中,复变数 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$从 $z=1$ 出发沿单位圆$|z|=1$ 逆时针走一圈又回到 $z=1$,实变定积分化为复变回路积分,就可以应用留数定理了. 至于实变定积分里的 $\cos x$,$\sin x$ 和 $\mathrm{d}x$ 则随着(4.2.1)而作如下变换:

$$\cos x=\frac{1}{2}(z+z^{-1}),\sin x=\frac{1}{2\mathrm{i}}(z-z^{-1}),\mathrm{d}x=\frac{1}{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z. \tag{4.2.2}$$

于是,原积分化为

$$I = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z+z^{-1}}{2},\frac{z-z^{-1}}{2\mathrm{i}}\right)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z} \tag{4.2.3}$$

例 1 计算 $I=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+\varepsilon\cos x}(0<\varepsilon<1)$.

解 按照(4.2.3),

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z/\mathrm{i}z}{1+\varepsilon\frac{z+z^{-1}}{2}}=\frac{2}{\mathrm{i}}\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}.$$

上式右边的回路积分在上节例 4 已用留数定理算出为 $\pi\mathrm{i}/\sqrt{1-\varepsilon^2}$.

于是,

$$I=\frac{2}{\mathrm{i}}\frac{\pi\mathrm{i}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}=\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

例 2 计算 $I=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1-2\varepsilon\cos x+\varepsilon^2}(0<\varepsilon<1)$.

解 按照(4.2.3),

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z/\mathrm{i}z}{1-\varepsilon(z+z^{-1})+\varepsilon^2}=\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{i}}{(\varepsilon z-1)(z-\varepsilon)}\mathrm{d}z.$$

这个回路积分的被积函数有两个单极点:$z_0=1/\varepsilon$ 和 $z_0=\varepsilon$. 前者 >1,在积分回路 $|z|=1$ 之外,因而不必考虑. 单极点 $z_0=\varepsilon$ 在 $|z|=1$ 之内,必须考虑. 运用(4.1.8)计算在 $z_0=\varepsilon$ 的留数

$$\lim_{z\to\varepsilon}\left[(z-\varepsilon)\frac{\mathrm{i}}{(\varepsilon z-1)(z-\varepsilon)}\right]=\lim_{z\to\varepsilon}\frac{\mathrm{i}}{\varepsilon z-1}=\frac{\mathrm{i}}{\varepsilon^2-1}.$$

于是,由留数定理得

$$I=2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{i}}{\varepsilon^2-1}=\frac{2\pi}{1-\varepsilon^2}.$$

类型二 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x$. 积分区间是$(-\infty,+\infty)$;复变函数 $f(z)$ 在实轴上没有奇点,在上半平面除有限个奇点外是解析的;当 z 在上半平面 $\to\infty$ 和在实轴上 $\to\infty$ 时,$zf(z)$ 一致地 $\to0$.

如果 $f(x)$ 是有理分式 $\varphi(x)/\psi(x)$,上述条件意味着 $\psi(x)$ 没有实的零点,$\psi(x)$ 的次数至少高于 $\varphi(x)$ 两次.

这一积分通常理解为下列极限

$$I=\lim_{\substack{R_1\to\infty\\R_2\to\infty}}\int_{-R_1}^{R_2}f(x)\mathrm{d}x \qquad (4.2.4)$$

若极限存在的话，这一极限便称为反常积分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的值. 而当 $R_1=R_2\to\infty$ 时极限存在的话，该极限便称为积分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的主值，记作

$$\mathscr{P}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x. \tag{4.2.5}$$

这里要计算类型二的积分主值. 考虑图 4-4 的半圆形回路 l,

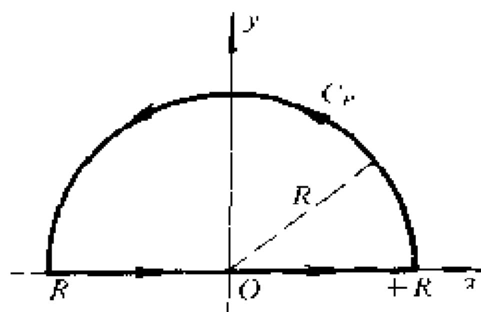


图 4-4

$$\oint_l f(z)\mathrm{d}z=\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x+\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z.$$

根据留数定理，上式即

$2\pi\mathrm{i}\{f(z)$ 在 l 所围半圆内各奇点的留数之和$\}=\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x+\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z.$

令 $R\to\infty$. 上式左边趋于 $2\pi\mathrm{i}\{f(z)$在上半平面所有奇点的留数之和$\}$，右边第一个积分趋于所求的定积分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$，第二个积分可证明是趋于零的：

$$\left|\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z\right|=\left|\int_{C_R} zf(z)\frac{\mathrm{d}z}{z}\right|\leqslant\int_{C_R}|zf(z)|\frac{|\mathrm{d}z|}{|z|}$$

$$\leqslant\max|zf(z)|\frac{\pi R}{R}=\pi\cdot\max|zf(z)|\to 0,$$

式中 $\max|zf(z)|$ 指的是 $|zf(z)|$ 在 C_R 上的最大值. 于是得到结果

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\{f(z)\text{ 在上半平面所有奇点的留数之和}\}. \tag{4.2.6}$$

例 3 计算 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

解 本例 $f(z)=\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})}$，它具有单极点 $\pm\mathrm{i}$，其中 $+\mathrm{i}$ 在上半平面，而

$$\mathrm{Res}f(+\mathrm{i})=\lim_{z\to\mathrm{i}}[(z-\mathrm{i})f(z)]=\lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{1}{z+\mathrm{i}}=\frac{1}{2\mathrm{i}}.$$

应用(4.2.6)，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=2\pi\mathrm{i}\left\{\frac{1}{2\mathrm{i}}\right\}=\pi.$$

例 4 计算 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$ (n 为正整数).

解 本例 $f(z)=\frac{1}{(1+z^2)^n}=\frac{1}{(z-\mathrm{i})^n(z+\mathrm{i})^n}$，它在上半平面的奇点是 n 阶极点 $+\mathrm{i}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}f(+\mathrm{i})&=\lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{1}{(n-1)!}\left\{\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}[(z-\mathrm{i})]^n f(z)]\right\}\\&=\lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{1}{(n-1)!}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}[(z+\mathrm{i})^{-n}]\\&=\frac{(-n)(-n-1)\cdots(-2n+2)}{(n-1)!}(2\mathrm{i})^{-2n+1}\\&=-\frac{n(n+1)\cdots(2n-2)}{(n-1)!\,2^{2n-1}}\mathrm{i}=-\frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2 2^{2n-1}}\mathrm{i}.\end{aligned}$$

应用(4.2.6)，

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}&=2\pi\mathrm{i}\left[-\frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2 2^{2n-1}}\mathrm{i}\right]\\&=\frac{\pi}{2^{2n-2}}\frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2}.\end{aligned}$$

例 5 计算 $\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$ (n 为正整数).

解 积分区间是 $[0,+\infty)$，不符合上面所列举的条件. 不过，由于被积函数 $1/(1+x^2)^n$ 是偶函数，所以 $\int_0^{\infty}=\int_{-\infty}^{0}$，因而

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

引用例 4 的结果即得

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{\pi}{2^{2n-1}} \frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2}.$$

类型三 $\int_0^{\infty} F(x)\cos mx dx$, $\int_0^{\infty} G(x)\sin mx dx$. 积分区间是 $[0,+\infty)$;偶函数 $F(z)$和奇(读 ji,基)函数 $G(z)$在实轴上没有奇(qí)点,在上半平面除有限个奇点外是解析的;当 z 在上半平面或实轴上$\to\infty$时,$F(z)$和 $G(z)$一致地$\to 0$.

首先,把所求积分的形式变换一下,例如

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} F(x)\cos mx dx &= \int_0^{\infty} F(x) \frac{1}{2}(e^{imx} + e^{-imx})dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} F(x)e^{imx}dx + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} F(x)e^{-imx}dx .\end{aligned}$$

在右边第二个积分中作代换 $x=-y$,并考虑到 $F(x)$是偶函数,得

$$\int_0^{\infty} F(x)\cos mx dx = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} F(x)e^{imx}dx - \frac{1}{2}\int_0^{-\infty} F(y)e^{imy}dy.$$

定积分的值并不取决于积分变数采用什么记号.把右边第二个积分的积分变数改记作 x,则

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} F(x)\cos mx dx &= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} F(x)e^{imx}dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} F(x)e^{imx}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{imx}dx. \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

同理,

$$\int_0^{\infty} G(x)\sin mx dx = \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty} G(x)e^{imx}dx. \tag{4.2.8}$$

从(4.2.7)和(4.2.8)来看,所求积分已化为类型二.按照类型二,本当要求:当 z 在上半平面或实轴上$\to\infty$时,$zF(z)e^{imz}$和 $zG(z)e^{imz}$一致地$\to 0$.但是利用下述约当引理,可把条件放宽为 $F(z)$和 $G(z)$一致地$\to 0$.

约当引理 如 m 为正数,C_R 是以原点为圆心而位于上半平面的半圆周(图 4-4),又设当 z 在上半平面或实轴上$\to\infty$时 $F(z)$

一致地→0，则

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}F(z)e^{imz}dz = 0.$$

证

$$\left|\int_{C_R}F(z)e^{imz}dz\right| = \left|\int_{C_R}F(z)e^{imx-my}dz\right|$$

$$= \left|\int_0^{\pi}F(Re^{i\varphi})e^{-mR\sin\varphi}e^{imR\cos\varphi}Re^{i\varphi}id\varphi\right|$$

$$\leqslant \max|F(z)|\cdot\int_0^{\pi}e^{-mR\sin\varphi}Rd\varphi.$$

当 z 在上半平面或实轴上→∞时，$F(z)$一致地→0，所以 $\max F(z)|\to 0$，从而只需证明

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}e^{-mR\sin\varphi}Rd\varphi \quad 即 \quad 2\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi/2}e^{-mR\sin\varphi}Rd\varphi$$

是有界的.

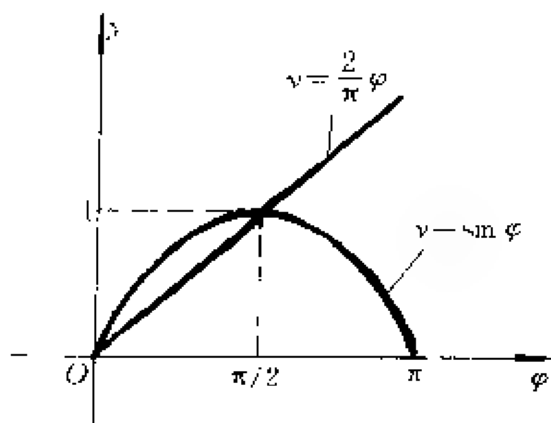


图 4-5

在 $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$范围内，$0\leqslant 2\varphi/\pi\leqslant\sin\varphi$，（参见图 4-5）

$$\int_0^{\pi/2}e^{-mR\sin\varphi}Rd\varphi\leqslant\int_0^{\pi/2}e^{-2mR\varphi/\pi}Rd\varphi = \frac{\pi}{2m}(1-e^{-mR}).$$

于 $R\to\infty$，上式→有限值. 这就证明了约当引理.

如果 m 是负数，则约当引理应作：

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C'_R}F(z)e^{imz}dz = 0,$$

C'_R 是 C_R 对于实轴的映象.

根据约当引理，对于(4.2.7)和(4.2.8)右边两个积分，在放宽的条件下仍然可以引用(4.2.6). 于是得到**结果**

$$\int_0^\infty F(x)\cos mx\,dx=\pi i\{F(z)e^{imz}\text{在上半平面所有奇点的留数之和}\},\tag{4.2.9}$$

$$\int_0^\infty G(x)\sin mx\,dx=\pi\{G(z)e^{imz}\text{在上半平面所有奇点的留数之和}\}.\tag{4.2.10}$$

注意在(4.2.9)和(4.2.10)右边{ }里说的是 $F(z)e^{imz}$ 和 $G(z)e^{imz}$，不要误为 $F(z)\cos mz$ 和 $G(z)\sin mz$.

例6 计算 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos mx}{x^2+a^2}dx$.

解 本例 $F(z)e^{imz}=\dfrac{1}{z^2+a^2}e^{imz}$ 有两个单极点 $\pm ai$，其中 $+ai$ 在上半平面. 而 $e^{imz}/(z^2+a^2)$ 在单极点 $+ai$ 的留数为

$$\lim_{z\to ai}\left[(z-ai)\frac{e^{imz}}{z^2+a^2}\right]=\lim_{z\to ai}\left[\frac{e^{imz}}{z+ai}\right]=\frac{e^{-ma}}{2ai}$$

应用(4.2.9)，

$$\int_0^\infty \frac{\cos mx}{x^2+a^2}dx=\pi i\frac{e^{-ma}}{2ai}=\frac{\pi}{2a}e^{-ma}.$$

例7 计算 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\sin mx}{(x^2+a^2)^2}dx$.

解 本例 $G(z)e^{imz}=\dfrac{z}{(z^2+a^2)^2}e^{imz}$ 有两个二阶极点 $\pm ai$，其中 $+ai$ 在上半平面. 而 $ze^{imz}/(z^2+a^2)^2$ 在 $+ai$ 的留数

$$=\lim_{z\to ai}\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left[(z-ai)^2\frac{z}{(z^2+a^2)^2}e^{imz}\right]=\lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{(z+ai)^2}e^{imz}\right]$$

$$=\lim_{z\to ai}\left[\frac{1}{(z+ai)^2}e^{imz}+\frac{z}{(z+ai)^2}ime^{imz}-2\frac{z}{(z+ai)^3}e^{imz}\right]$$

$$=-\frac{1}{4a^2}e^{-ma}+\frac{ma}{4a^2}e^{-ma}+\frac{1}{4a^2}e^{-ma}=\frac{m}{4a}e^{-ma}.$$

应用(4.2.10)，

$$\int_0^\infty \frac{x\sin mx}{(x^2+a^2)^2}dx=\pi\left(\frac{m}{4a}e^{-ma}\right)=\frac{m\pi}{4a}e^{-ma}.$$

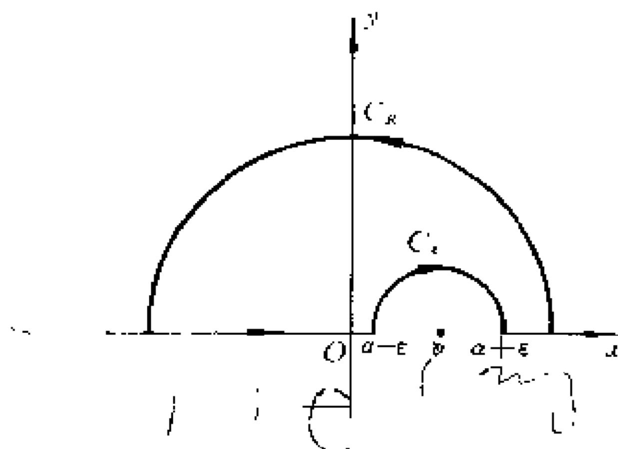


图 4-6

* **实轴上有单极点的情况** 考虑积分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$，被积函数 $f(x)$ 在实轴上有某个单极点 $z=\alpha$，除此之外，$f(z)$ 满足类型二的条件. 由于存在这个奇点，我们以 $z=\alpha$ 为圆心，以充分小的正数 ε 为半径作半圆弧绕过奇点 α_2 构成如图 4-6 所示积分回路. 于是

$$\oint_l f(z)\mathrm{d}z = \int_{-R}^{\alpha-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x + \int_{\alpha+\varepsilon}^{R} f(x)\mathrm{d}x - \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_\varepsilon} f(z)\mathrm{d}z. \quad (4.2.11)$$

取极限 $R\to\infty$，$\varepsilon\to 0$，(4.2.11)左边积分值等于 $2\pi\mathrm{i}\sum\limits_{上半平面}\mathrm{Res}f(z)$. 右边第一、第二项之和即为所求积分. 由约当引理，第三项为零. 对于第四项，计算如下：将 $f(z)$ 在 $z=\alpha$ 的领域展为洛朗级数，由于 $z=\alpha$ 是 $f(z)$ 的单极点，于是，

$$f(z)=\frac{a_{-1}}{z-\alpha}+P(z-\alpha).$$

其中 $P(z-\alpha)$ 为级数的解析部分，它在 C_ε 上连续且有界，因此，

$$\left|\int_{C_\varepsilon} P(z-\alpha)\mathrm{d}z\right| \leqslant \max|P(z-\alpha)|\int_{C_\varepsilon}|\mathrm{d}z| = \pi\varepsilon\cdot\max|P(z-\alpha)|,$$

$$\therefore \qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon} P(z-\alpha)\mathrm{d}z = 0.$$

而

$$\int_{C_\varepsilon}\frac{a_{-1}}{z-\alpha}\mathrm{d}z=\int_{C_\varepsilon}\frac{a_{-1}}{z-\alpha}\mathrm{d}(z-\alpha),$$

$$=\int_{\pi}^{0}\frac{a_{-1}}{\varepsilon e^{i\varphi}}\varepsilon e^{i\varphi}\mathrm{i}\mathrm{d}\varphi=-\pi\mathrm{i}a_{-1}=-\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}f(\alpha),$$

于是，由(4.2.11)取极限 $R\to\infty,\varepsilon\to 0$，得

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\sum_{\text{上半平面}}\mathrm{Res}f(z)+\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}f(\alpha).\qquad(4.2.12)$$

若实轴上有有限个单极点，则类似地可以得到

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\sum_{\text{上半平面}}\mathrm{Res}f(z)+\pi\mathrm{i}\sum_{\text{实轴上}}\mathrm{Res}f(z).\qquad(4.2.13)$$

从以上计算看到，实轴上有奇点时，仍归结为留数的计算，但需注意以下两点.

1. C_ε 不是闭合曲线，$f(z)$洛朗展开的解析部分的积分值只是由于 $\varepsilon\to 0$ 才趋于零.

2. 实轴上的奇点只能是单极点，不能是二阶或者二阶以上的极点，更不能是本性奇点，否则当 $\varepsilon\to 0$ 时，积分$\int_{C_\varepsilon}f(z)\mathrm{d}z$ 之值将趋于∞(极点情形)或不存在(本性奇点情形).

例 8 计算 $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

解 将原积分改写

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x.$$

这个积分的被积函数 $e^{\mathrm{i}x}/x$ 除了在实轴上有单极点 $x=0$ 外，满足类型三的条件. 由于被积函数在上半平面无奇点，因此，利用公式(4.2.12)，应有

$$\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\begin{Bmatrix}\text{被积函数}\dfrac{e^{\mathrm{i}z}}{z}\text{在单极点 }z=0\\ \text{的留数}\end{Bmatrix}=\frac{\pi}{2}\cdot 1=\frac{\pi}{2}.$$

即
$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}. \tag{4.2.14}$$

由此还可以推论，对于正的 m，

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin mx}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\frac{\sin(mx)}{mx}\mathrm{d}(mx)=\frac{\pi}{2}. \quad (m>0)$$

对于负的 m，

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin mx}{x}\mathrm{d}x=-\int_0^{\infty}\frac{\sin|m|x}{x}\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}. \quad (m<0)$$

这是重要的定积分公式.

下面简单介绍一下**色散关系**. 对于在上半平面处处解析的函数 $f(z)$，如果当 $z\to\infty$ 时，$f(z)$ 一致地 $\to 0$ $(0\leqslant \mathrm{Arg}z\leqslant\pi)$，$a$ 为一实数，则按照(4.2.12)，

$$\mathscr{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-a}\mathrm{d}x=\pi\mathrm{i}\cdot\left\{\frac{f(z)}{z-a}\text{ 在 } a \text{ 的留数}\right\}=\pi\mathrm{i}f(a).$$

分别写出实部和虚部

$$\mathrm{Re}f(a)=\frac{1}{\pi}\mathscr{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}f(x)}{x-a}\mathrm{d}x. \tag{4.2.15}$$

$$\mathrm{Im}f(a)=-\frac{1}{\pi}\mathscr{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Re}f(x)}{x-a}\mathrm{d}x. \tag{4.2.16}$$

这一对关系式在数学上叫作希尔伯特(Hilbert，1862～1943)**变换**，在物理上称为色散关系.

习　题

1. 计算下列实变函数定积分.

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}$，　　(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{(1+\varepsilon\cos x)^2}$ $(0<\varepsilon<1)$，

(3) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2 2x\mathrm{d}x}{1-2\varepsilon\cos x+\varepsilon^2}$ $(|\varepsilon|<1)$，

(4) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 x\mathrm{d}x}{a+b\cos x}$ $(a>b>0)$，

(5) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{a\mathrm{d}x}{a^2+\sin^2 x}$ $(a>0)$，　(6) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos x\mathrm{d}x}{1-2\varepsilon\cos x+\varepsilon^2}$ $(|\varepsilon|<1)$，

(7) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}$，　　(8) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^{2n}x\mathrm{d}x$.

2. 计算下列实变函数定积分.

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x$，　　(2) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^2\mathrm{d}x}{(x^2+9)(x^2+4)^2}$，

(3) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2(x^2+b^2)}$，(4) $\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+a^4}$，

(5) $\int_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x^6+1}\mathrm{d}x$，(6) $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\mathrm{d}x$，

(7) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\mathrm{d}x\,(m<n)$.

3. 计算下列实变函数定积分.

(1) $\int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{1+x^4}\mathrm{d}x\,(m>0)$，(2) $\int_0^{\infty} \frac{\sin mx}{x(x^2+a^2)}\mathrm{d}x\,(m>0,a>0)$，

(3) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x$，(4) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin mx}{2x^2+a^2}\mathrm{d}x\,(m>0,a>0)$，

(5) $\int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{(x^2+a^2)^2}\mathrm{d}x$，(6) $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\mathrm{d}x$，

(7) $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$，

(8) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}}{x-\mathrm{i}a}\mathrm{d}x$，$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}}{x+\mathrm{i}a}\mathrm{d}x\,(m>0,\mathrm{Re}\,a>0)$.

* §4.3 计算定积分的补充例题

例 1 计算定积分 $I=\int_0^{\infty} x^{a-1}\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x\ (0<a<1)$.

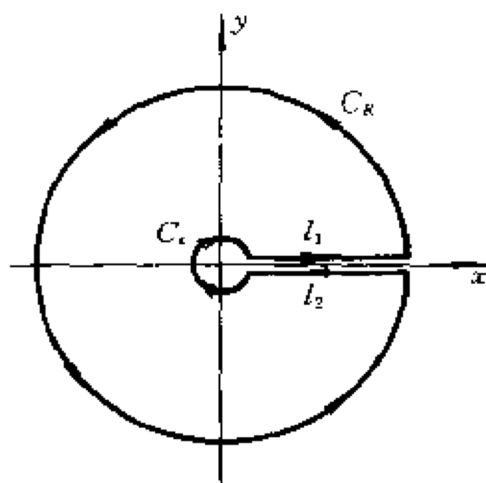


图 4-7

解 把被积函数 $x^{a-1}/(1+x)$ 从实轴延拓到复数 z 平面得到 $f(z)=z^{a-1}/(1+z)$. 由于 $f(z)$ 含有 z^{a-1}，而 a 不是整数，所以 $f(z)$ 是多值函数，它有两个支点：原点和无限远点. z 每绕原点或无限

远点一圈，辐角增加 2π，$z^{\alpha-1}$ 多出因子 $e^{i2\pi(\alpha-1)}$ 亦即 $e^{i2\pi\alpha}$，从而 $f(z)$ 也多出这么一个因子.

从原点起，沿着实轴作切割，直向无限远而去.

考虑图 4-7 所示回路 l，

$$\oint_l f(z)\mathrm{d}z = \int_\varepsilon^R \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x + \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z + \int_R^\varepsilon \frac{x^{\alpha-1}e^{i2\pi\alpha}}{1+x}\mathrm{d}x + \int_{C_\varepsilon} f(z)\mathrm{d}z.$$

令 $R\to\infty$，$\varepsilon\to 0$. 上式左边按照留数定理应为 $2\pi i\{f(z)$ 在有限远各奇点留数之和$\}$. 右边第一个积分成为所求的 I，第三个积分则成为 $-e^{i2\pi\alpha}I$. 可以证明第二个和第四个积分则成为零. 事实上，

$$\left|\int_{C_R} \frac{z^{\alpha-1}}{1+z}\mathrm{d}z\right| = \left|\int_{C_R} \frac{z^\alpha}{1+z}\frac{\mathrm{d}z}{z}\right| \leqslant \max_{(C_R上)}\left|\frac{z^\alpha}{1+z}\right|\frac{\int|\mathrm{d}z|}{|z|}$$

$$= \max\frac{R^\alpha}{|1+z|}\cdot\frac{2\pi R}{R} = 2\pi\max\frac{R^\alpha}{|1+z|}$$

$$\sim 2\pi\frac{1}{R^{1-\alpha}} \to 0 \quad (于 R\to\infty).$$

$$\left|\int_{C_\varepsilon} \frac{z^{\alpha-1}}{1+z}\mathrm{d}z\right| = \left|\int_{C_\varepsilon} \frac{z^\alpha}{1+z}\frac{\mathrm{d}z}{z}\right| \leqslant \max_{(C_\varepsilon上)}\left|\frac{z^\alpha}{1+z}\right|\frac{\int|\mathrm{d}z|}{|z|}$$

$$= \max\frac{\varepsilon^\alpha}{|1+z|}\cdot\frac{2\pi\varepsilon}{\varepsilon} = 2\pi\max\frac{\varepsilon^\alpha}{|1+z|}$$

$$\sim 2\pi\frac{\varepsilon^\alpha}{1} \to 0 \quad (于 \varepsilon\to 0).$$

于是 $(1-e^{i2\pi\alpha})I = 2\pi i\{f(z)$ 在有限远各奇点留数之和$\}$.

$f(z)=z^{\alpha-1}(1+z)^{-1}$ 只有一个单极点 $z_0=-1$，而

$$\mathrm{Res}f(-1)=\lim_{z\to-1}[(z+1)f(z)]=\lim_{z\to-1}[z^{\alpha-1}]=(-1)^{\alpha-1}.$$

因此，

$$I=\frac{2\pi i(-1)^{\alpha-1}}{1-e^{i2\pi\alpha}}=\frac{2\pi i(-1)^{\alpha-1}}{e^{i\pi\alpha}(e^{-i\pi\alpha}-e^{i\pi\alpha})}$$

$$=\frac{2\pi i(-1)^{\alpha-1}}{(-1)^\alpha(e^{-i\pi\alpha}-e^{i\pi\alpha})}=\frac{2\pi i}{2i\sin\pi\alpha}=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}.$$

例 2 计算定积分 $I=\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1-x}\mathrm{d}x \quad (0<\alpha<1)$.

解 本例$f(z)=z^{a-1}/(1-z)$，它不仅有两个支点：原点和无限远点，而且在实轴上有单极点$z_0=+1$. 这样，不能用图 4-7 的回路，应取绕开单极点的回路l如图 4-8 所示，半圆K_1和K_2以$+1$为圆心而半径为δ.

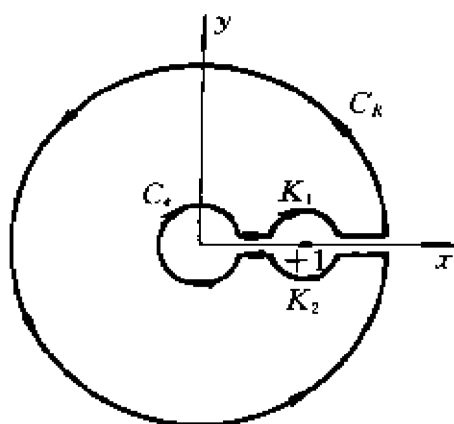


图 4-8

令$R\to\infty,\epsilon\to 0,\delta\to 0$. 沿割线上岸直线段的积分成为所求的$I$，沿割线下岸直线段的积分则成为$-e^{i2\pi a}I$. 跟例 1 一样，可以证明$\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)dz=0,\lim\limits_{\epsilon\to 0}\int_{C_\epsilon}f(z)dz=0$. 于是，

$$(1-e^{i2\pi a})I+\lim_{\delta\to 0}\left\{\int_{K_1}f(z)dz+\int_{K_2}f(z)dz\right\}$$
$$=2\pi i\{f(z)\text{在正实轴以外有限远奇点留数和}\}.$$

但是$f(z)$除了正实轴上的$+1$以外并没有奇点，所以

$$(1-e^{i2\pi a})I+\lim_{\delta\to 0}\left\{\int_{K_1}f(z)dz+\int_{K_2}f(z)dz\right\}=0.$$

仿照上节例 8 关于$\lim\limits_{\epsilon\to 0}\int_{C_\epsilon}\frac{1}{z}e^{iz}dz$的计算，可得

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{K_1}f(z)dz=\pi i,\lim_{\delta\to 0}\int_{K_2}f(z)dz=\pi i e^{i2\pi a}.$$

于是

$$I=\frac{-\pi i(1+e^{i2\pi a})}{1-e^{i2\pi a}}=-\pi i\frac{e^{-i\pi a}+e^{i\pi a}}{e^{-i\pi a}-e^{i\pi a}}=\pi\frac{\cos\pi a}{\sin\pi a}=\pi\,\text{ctg}\,\pi a.$$

例 3 计算$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx\quad(0<a<1)$.

解 本例有些像上节类型二的定积分，但本例的$f(z)=\frac{e^{az}}{1+e^z}$在上半平面有无限多个单极点$i(2k+1)\pi$($k$为正整数)，所以不能用上节类型二的方法计算.

注意到 $f(z+2\pi i)=e^{i2\pi\alpha}f(z)$，选取图 4-9 的回路 l，

$$\oint_l f(z)\mathrm{d}z=\int_{-a}^{a}\frac{e^{\alpha x}}{1+e^{x}}\mathrm{d}x+\int_{l_2}f(z)\mathrm{d}z+e^{i2\pi\alpha}\int_{a}^{-a}\frac{e^{\alpha x}}{1+e^{x}}\mathrm{d}x+\int_{l_4}f(z)\mathrm{d}z$$

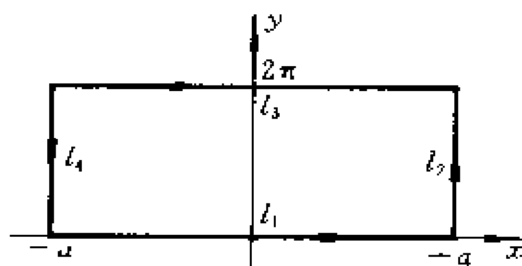


图 4-9

令 $a\to\infty$. 上式左边按照留数定理应等于 $2\pi i\{f(z)$在 $0<\mathrm{Im}z<2\pi$ 范围内的各奇点的留数之和$\}$. 在这范围内，$f(z)=e^{\alpha z}/(1+e^{z})$只有一个单极点 πi，而

$$\mathrm{Res}f(\pi i)=\lim_{z\to\pi i}\left[\frac{e^{\alpha z}(z-\pi i)}{1+e^{z}}\right]=e^{i\pi\alpha}\lim_{z\to\pi i}\frac{z-\pi i}{1+e^{z}},$$

运用罗毕达法则，得

$$\mathrm{Res}f(\pi i)=e^{i\pi\alpha}\lim_{z\to\pi i}\frac{1}{e^{z}}=-e^{i\pi\alpha}.$$

至于右边第一和第三这两个积分则成为 I 和 $-e^{i2\pi\alpha}I$. 不难验证第二个和第四个积分成为零：

$$\left|\int_{l_2}\frac{e^{\alpha z}}{1+e^{z}}\mathrm{d}z\right|=\left|\int_0^{2\pi}\frac{e^{\alpha(a+iy)}}{1+e^{(a+iy)}}\mathrm{d}y\right|\leqslant\frac{e^{\alpha a}}{e^{a}-1}\left|\int\mathrm{d}y\right|\sim\frac{e^{\alpha a}}{e^{a}}2\pi\to0$$

（于 $a\to\infty$），

$$\left|\int_{l_4}\frac{e^{\alpha z}}{1+e^{z}}\mathrm{d}z\right|=\left|\int_{2\pi}^{0}\frac{e^{-\alpha a+i\alpha y}}{1+e^{-a+iy}}\mathrm{d}y\right|\leqslant\frac{e^{-\alpha a}}{1-e^{-a}}2\pi\sim\frac{e^{-\alpha a}}{1}2\pi\to0$$

（于 $a\to\infty$）.

于是，

$$(1-e^{i2\pi\alpha})I=2\pi i(-e^{i\pi\alpha}),$$

$$I=\frac{2\pi i e^{i\pi\alpha}}{e^{i2\pi\alpha}-1}=\frac{2\pi i}{e^{i\pi\alpha}-e^{-i\pi\alpha}}=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}.$$

例 4 计算菲涅耳积分

$$I_1=\int_0^{\infty}\sin(x^2)\mathrm{d}x\quad 和\quad I_2=\int_0^{\infty}\cos(x^2)\mathrm{d}x.$$

这两个积分出现于光在锋利刀刃边缘的衍射问题中.

解 由于 $\sin(x^2)=\mathrm{Im}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}$, 而 $\cos(x^2)=\mathrm{Re}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}$, 所以

$$I_2+\mathrm{i}I_1=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}\mathrm{d}x.$$

取图 4-10 所示回路 l. 由于 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}$ 没有有限远奇点, 所以根据留数定理得

$$\oint_l \mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}\mathrm{d}z=0,$$

即

$$\int_0^R \mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}\mathrm{d}x+\int_{C_R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}\mathrm{d}z+\int_R^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4})^2}\mathrm{d}(\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4})=0,$$

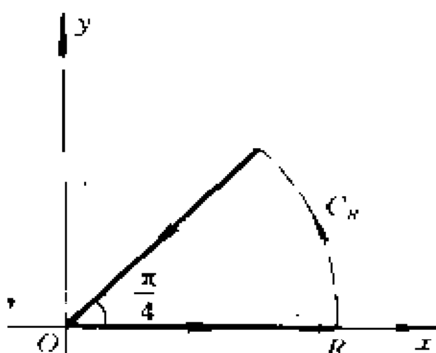


图 4-10

令 $R\to\infty$. 第一个积分即所求的 $I_2+\mathrm{i}I_1$. 第三个积分不难如下算出:

$$\lim_{R\to\infty}\int_R^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\rho^2\mathrm{i})}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\mathrm{d}\rho=\lim_{R\to\infty}(-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4})\int_0^R \mathrm{e}^{-\rho^2}\mathrm{d}\rho=-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\rho^2}\mathrm{d}\rho$$

$$=-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}=-(1+\mathrm{i})\sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

可以证明第二个积分成为零. 为此, 先作一次分部积分,

$$\int_{C_R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}\mathrm{d}z=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}}{2\mathrm{i}z}\Bigg|_{z=R}^{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}}+\int_{C_R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}\frac{\mathrm{d}z}{2\mathrm{i}z^2},$$

其中已积出部分的模

$$\left|\frac{\mathrm{e}^{-R^2}}{2\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}}-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}R^2}}{2\mathrm{i}R}\right|\leqslant\frac{\mathrm{e}^{-R^2}}{2R}+\frac{1}{2R}\to 0\quad(\text{于 } R\to\infty),$$

未积出部分的模

$$\left|\int_{C_R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}}{2\mathrm{i}z^2}\mathrm{d}z\right|=\left|\int_{C_R}\frac{\mathrm{e}^{-R^2\sin 2\varphi+\mathrm{i}R^2\cos 2\varphi}}{2\mathrm{i}R^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\varphi}}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\mathrm{i}\mathrm{d}\varphi\right|$$

$$\leqslant\int_{C_R}\frac{\mathrm{e}^{-R^2\sin 2\varphi}}{2R^2}R\mathrm{d}\varphi\leqslant\max\left(\frac{\mathrm{e}^{-R^2\sin 2\varphi}}{2R}\right)\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{1}{2R}\frac{\pi}{4}\to 0\quad(\text{于 } R\to\infty).$$

于是

$$I_2+\mathrm{i}I_1-\sqrt{\frac{\pi}{8}}(1+\mathrm{i})=0,$$

即
$$I_1=\sqrt{\frac{\pi}{8}},I_2=\sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

第五章　傅里叶变换

§5.1　傅里叶级数

本节扼要复习一下有关傅里叶级数的基本内容.

(一)周期函数的傅里叶展开

若函数 $f(x)$ 以 $2l$ 为周期,即

$$f(x+2l)=f(x), \tag{5.1.1}$$

则可取三角函数族

$$\begin{aligned}&1,\cos\frac{\pi x}{l},\cos\frac{2\pi x}{l},\cdots\cos\frac{k\pi x}{l},\cdots\\&\sin\frac{\pi x}{l},\sin\frac{2\pi x}{l},\cdots\sin\frac{k\pi x}{l},\cdots\end{aligned} \tag{5.1.2}$$

作为基本函数族,将 $f(x)$ 展开为级数

$$f(x)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right). \tag{5.1.3}$$

函数族(5.1.2)是**正交的**.这是说,其中任意两个函数的乘积在一个周期上的积分等于零,即

$$\begin{cases}\int_{-l}^{l}1\cos\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x=0 \quad (k\neq 0),\\ \int_{-l}^{l}1\sin\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x=0,\\ \int_{-l}^{l}\cos\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=0 \quad (k\neq n),\\ \int_{-l}^{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=0 \quad (k\neq n),\\ \int_{-l}^{l}\cos\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=0.\end{cases} \tag{5.1.4}$$

利用三角函数族的正交性，可以求得(5.1.3)中的展开系数为

$$\begin{cases} a_k = \dfrac{1}{\delta_k l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(\xi)\cos\dfrac{k\pi\xi}{l}\mathrm{d}\xi, \\ b_k = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(\xi)\sin\dfrac{k\pi\xi}{l}\mathrm{d}\xi, \end{cases} \tag{5.1.5}$$

其中 $\delta_k = \begin{cases} 2 & (k=0) \\ 1 & (k\neq 0) \end{cases}$

(5.1.3)称为周期函数 $f(x)$ 的**傅里叶级数**展开式，其中的展开系数称为**傅里叶系数**.

函数族(5.1.2)又是完备的，简释如下. 设以

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin\frac{k\pi x}{l}$$

作为函数 $f(x)$ 的近似表达式，其中 a_0, a_k, b_k 待定. 于是，平均平方误差

$$\varepsilon^2 = \int_{-l}^{l}\left[f(x) - a_0 - \sum_{k=1}^{n} a_k\cos\frac{k\pi x}{l} - \sum_{k=1}^{n} b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right]^2 \mathrm{d}x \geqslant 0.$$

把[]² 展开，逐项积分，计及正交性(5.1.4)，得

$$\varepsilon^2 = \int_{-l}^{l}[f(x)]^2\mathrm{d}x + 2la_0^2 + la_k^2 + lb_k^2 - 2a_0\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{d}x$$
$$- 2\sum_{k=1}^{n} a_k \int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x - 2\sum_{k=1}^{n} b_k \int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

系数 a_0, a_r, b_r 应该选得使 ε^2 最小，即 $\partial\varepsilon^2/\partial a_0 = 0, \partial\varepsilon^2/\partial a_r = 0, \partial\varepsilon^2/\partial b_r = 0$. 由此求得

$$\begin{cases} a_r = \dfrac{1}{\delta_r l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\cos\dfrac{r\pi x}{l}\mathrm{d}x, \\ b_r = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\sin\dfrac{r\pi x}{l}\mathrm{d}x, \end{cases}$$

与(5.1.5)一致，把(5.1.5)代入 ε^2 的表达式，得

$$\int_{-l}^{l}[f(x)]^2\mathrm{d}x \geqslant \sum_{k=0}^{n} a_k^2\left[\cos\frac{k\pi x}{l}\right]^2 + \sum_{k=0}^{n} b_k^2\left[\sin\frac{k\pi x}{l}\right]^2$$

可以证明：对任一连续函数 $f(x)$，当 $n\to\infty$，

$$\int_{-l}^{l}[f(x)]^2\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2\left[\cos^2\frac{k\pi x}{l}\right]^2 + \sum_{k=0}^{\infty} b_k^2\left[\sin\frac{k\pi x}{l}\right]^2. \tag{5.1.6}$$

这样，我们说函数族(5.1.2)是完备的，(5.1.6)称为完备性方程，傅里叶级数

(5.1.3)**平均收敛**于 $f(x)$. 注意，平均收敛于 $f(x)$ 并不意味收敛于 $f(x)$，甚至并不意味收敛.

关于傅里叶级数的收敛性问题，有如下定理：

狄里希利定理 若函数 $f(x)$ 满足条件：(1)处处连续，或在每个周期中只有有限个第一类间断点；(2)在每个周期中只有有限个极值点，则级数(5.1.3)收敛，且

$$
\text{级数和} = \begin{cases} f(x), & (\text{在连续点 } x) \\ \dfrac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}. & (\text{在间断点 } x) \end{cases} \tag{5.1.7}
$$

(二)奇函数及偶函数的傅里叶展开

若周期函数 $f(x)$ 是奇函数，则由傅里叶系数的计算公式(5.1.5)可见，a_0 及诸 a_k 均等于零，展开(5.1.3)成为

$$
f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi x}{l}, \tag{5.1.8}
$$

这叫作**傅里叶正弦级数**. 由于对称性，其展开系数为

$$
b_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}\mathrm{d}\xi. \tag{5.1.9}
$$

由于 $\sin\dfrac{k\pi x}{l}\Big|_{x=0}=0$ 和 $\sin\dfrac{k\pi x}{l}\Big|_{x=l}=0$，所以(5.1.8)中的正弦级数的和在 $x=0$ 和 $x=l$ 处为零.

若周期函数 $f(x)$ 是偶函数，则(5.1.5)中所有 b_k 均为零，展开(5.1.3)成为

$$
f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{l}, \tag{5.1.10}
$$

这叫作**傅里叶余弦级数**. 同样，由于对称性，其展开系数为

$$
a_k = \frac{2}{\delta_k l}\int_0^l f(\xi)\cos\frac{k\pi\xi}{l}\mathrm{d}\xi. \tag{5.1.11}
$$

由于余弦级数的导数是正弦级数，所以余弦级数的和的导数在 $x=0$ 和 $x=l$ 为零.

（三）定义在有限区间上的函数的傅里叶展开

对于只在有限区间，例如在$(0,l)$上有定义的函数$f(x)$，可以采取延拓的方法，使其成为某种周期函数$g(x)$，而在$(0,l)$上，$g(x)=f(x)$. 然后再对$g(x)$作傅里叶级数展开，其级数和在区间$(0,l)$上代表$f(x)$.

由于$f(x)$在$(0,l)$处无定义，因此，可以有无数种延拓方式，因而有无数种展开式，但它们在$(0,l)$上均代表$f(x)$. 有时，对函数$f(x)$在边界（区间的端点）上的行为提出限制，即满足一定的边界条件，这常常就决定了如何延拓. 例如要求$f(0)=f(l)=0$，这时应延拓成为奇的周期函数；又如要求$f'(0)=f'(l)=0$，这时则应延拓成偶的周期函数.

（四）复数形式的傅里叶级数

取一系列复指数函数

$$\cdots,e^{-i\frac{k\pi x}{l}},\cdots,e^{-i\frac{2\pi x}{l}},e^{-i\frac{\pi x}{l}},1,e^{i\frac{\pi x}{l}},e^{i\frac{2\pi x}{l}},\cdots,e^{i\frac{k\pi x}{l}},\cdots \tag{5.1.12}$$

作为基本函数族，可以将周期函数$f(x)$展开为复数形式的傅里叶级数

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{i\frac{k\pi x}{l}}. \tag{5.1.13}$$

利用复指数函数族的正交性，可以求出其傅里叶系数

$$c_k=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\left[e^{i\frac{k\pi\xi}{l}}\right]^*\mathrm{d}\xi. \tag{5.1.14}$$

尽管$f(x)$是实函数，但其傅里叶系数却可能是复的. 由(5.1.14)还可看出

$$c_{-k}=c_k^*. \tag{5.1.15}$$

习　题

1. 交流电压$E_0\sin\omega t$经过全波整流，成为$E(t)=E_0|\sin\omega t|$. 试将它展为傅里叶级数.

2. 将锯齿波展为傅里叶级数. 在$(0,T)$这个周期上,该锯齿波可表为$f(x)=x/3$.

3. 在$(-\pi,\pi)$这个周期上,$f(x)=x+x^2$. 试将它展为傅里叶级数,又在本题所得展开式中置$x=\pi$,由此验证$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$.

4. 将下列函数展为傅里叶级数

(1)$f(x)=\cos^3 x$,

(2)$f(x)=\frac{1-\alpha^2}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}$,$(|\alpha|<1)$

(3)在$(-\pi,\pi)$这个周期上,$f(x)=\cos\alpha x$,(α非整数)

(4)在$(-\pi,\pi)$这个周期上,$f(x)=\text{ch}\,\alpha x$,(α非整数)

(5)在$(-\pi,\pi)$这个周期上,$f(x)=\begin{cases}\cos x, & (|x|<\frac{\pi}{2})\\ 0, & (\frac{\pi}{2}<|x|<\pi)\end{cases}$

5. 要求下列函数$f(x)$的值在它的定义区间的边界上为零,试根据这一要求将$f(x)$展为傅里叶级数.

(1)$f(x)=\cos\alpha x$,定义在$(0,\pi)$上,

(2)$f(x)=x^3$,定义在$(0,\pi)$上,

(3)$f(x)=1$,定义在$(0,\pi)$上.

6. 要求下列函数$f(x)$的导数$f'(x)$在函数定义区间的边界上为零. 试根据这个要求将$f(x)$展为傅里叶级数.

(1)在$(0,l/2)$上,$f(x)=\cos(\pi x/l)$,而在$(l/2,l)$上,$f(x)=0$,

(2)$f(x)=a(1-x/l)$,定义在$(0,l)$上,

(3)在$(0,l/2)$上,$f(x)=x$;在$(l/2,l)$上,$f(x)=l-x$.

7. 在区间$(0,l)$上定义了函数$f(x)=x$. 试根据条件$f'(0)=0$,$f(l)=0$将$f(x)$展开为傅里叶级数.

8. 矩形波$f(x)$,在$(-T/2,T/2)$这个周期上可表为

$$f(x)=\begin{cases}0 & 在(-T/2,-\tau/2)上,\\ H & 在(-\tau/2,\tau/2)上,\\ 0 & 在(\tau/2,T/2)上.\end{cases}$$

试将它展为复数形式的傅里叶级数.

§ 5.2 傅里叶积分与傅里叶变换

本节研究非周期函数的傅里叶展开、傅里叶变换及其有关性质.

(一)实数形式的傅里叶变换

设 $f(x)$ 为定义在区间 $-\infty<x<\infty$ 上的函数. 一般说来,它是非周期的,不能展为傅里叶级数. 为了研究这样的函数的傅里叶展开问题,我们采取如下办法:试将非周期函数 $f(x)$ 看作是某个周期函数 $g(x)$ 于周期 $2l\to\infty$ 时的极限情形. 这样,$g(x)$ 的傅里叶级数展开式

$$g(x)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right) \qquad (5.2.1)$$

在 $l\to\infty$ 时的极限形式就是所要寻找的非周期函数 $f(x)$ 的傅里叶展开. 下面仔细研究一下这一极限过程.

为此,引入不连续参量 $\omega_k=k\pi/l(k=0,1,2,\cdots)$, $\Delta\omega_k=\omega_k-\omega_{k-1}=\pi/l$. 这样,(5.2.1)成为

$$g(x)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos\omega_k x+b_k\sin\omega_k x), \qquad (5.2.2)$$

傅里叶系数为

$$\begin{cases} a_k=\dfrac{1}{\delta_k l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos\omega_k\xi\mathrm{d}\xi, \\ b_k=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(\xi)\sin\omega_k\xi\mathrm{d}\xi. \end{cases} \qquad (5.2.3)$$

将(5.2.3)代入(5.2.2),然后取 $l\to\infty$ 的极限.

对于系数 a_0,若 $\lim\limits_{l\to\infty}\int_{-l}^{l}f(\xi)\mathrm{d}\xi$ 有限,则

$$\lim_{l\to\infty}a_0=\lim_{l\to\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\mathrm{d}\xi=0.$$

余弦部分为

$$\lim_{l\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos\omega_k\xi\mathrm{d}\xi\right]\cos\omega_k x$$

$$=\lim_{l\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos\omega_k\xi\mathrm{d}\xi\right]\cos\omega_k x\cdot\Delta\omega_k.$$

于 $l\to\infty$，$\Delta\omega_k=\frac{\pi}{l}\to 0$，不连续参量 ω_k 变成连续参量，记为 ω. 对 k 的求和变成对连续参量 ω 的积分，上式成为

$$\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cos\omega\xi\mathrm{d}\xi\right]\cos\omega x\mathrm{d}\omega.$$

同理，正弦部分的极限是

$$\lim_{l\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\sin\omega_k\xi\mathrm{d}\xi\right]\sin\omega_k x$$

$$=\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\sin\omega\xi\mathrm{d}\xi\right]\sin\omega x\mathrm{d}\omega.$$

于是(5.2.2)在 $l\to\infty$时的极限形式是：

$$f(x)=\int_0^{\infty}A(\omega)\cos\omega x\mathrm{d}\omega+\int_0^{\infty}B(\omega)\sin\omega x\mathrm{d}\omega,\qquad(5.2.4)$$

其中

$$\begin{cases}A(\omega)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cos\omega\xi\mathrm{d}\xi,\\[2ex] B(\omega)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\sin\omega\xi\mathrm{d}\xi.\end{cases}\qquad(5.2.5)$$

(5.2.4)右边的积分称为**傅里叶积分**，(5.2.4)称为非周期函数 $f(x)$的傅里叶积分表达式. (5.2.5)称为 $f(x)$的**傅里叶变换式**.

这里必须指出，(5.2.4)，(5.2.5) 两式只是形式的结果. 关于这一结果的数学理论，有**傅里叶积分定理**：若函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,\infty)$ 上满足条件(1)$f(x)$ 在任一有限区间上满足狄里希利条件，(2)$f(x)$ 在$(-\infty,\infty)$ 上绝对可积(即 $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛)，则

$f(x)$ 可表成傅里叶积分，且傅里叶积分值 $= [f(x+0)+f(x-0)]/2$.

(5.2.4)又可改写为

$$f(x)=\int_0^\infty C(\omega)\cos[\omega x-\varphi(\omega)]\mathrm{d}\omega,$$

其中

$$C(\omega)=\{[A(\omega)]^2+[B(\omega)]^2\}^{1/2},$$

$$\varphi(\omega)=\mathrm{tg}^{-1}[B(\omega)/A(\omega)].$$

$C(\omega)$又称为 $f(x)$的**振幅谱**，$\varphi(\omega)$称为 $f(x)$的**相位谱**.

跟傅里叶级数的情形类似，奇函数 $f(x)$的傅里叶积分是**傅里叶正弦积分**，

$$f(x)=\int_0^\infty B(\omega)\sin\omega x\mathrm{d}\omega, \tag{5.2.6}$$

$B(\omega)$是 $f(x)$的**傅里叶正弦变换**，

$$B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(\xi)\sin\omega\xi\mathrm{d}\xi. \tag{5.2.7}$$

(5.2.6)满足条件 $f(0)=0$.

同样，偶函数 $f(x)$的傅里叶积分是**傅里叶余弦积分**

$$f(x)=\int_0^\infty A(\omega)\cos\omega x\mathrm{d}\omega, \tag{5.2.8}$$

$A(\omega)$是 $f(x)$的**傅里叶余弦变换**，

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(\xi)\cos\omega\xi\mathrm{d}\xi. \tag{5.2.9}$$

(5.2.8)满足条件 $f'(0)=0$.

(5.2.6)～(5.2.9)也可写成对称的形式：傅里叶正弦变换对

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_0^\infty B(\omega)\sin\omega x\mathrm{d}\omega, & (5.2.10)\\ B(\omega)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_0^\infty f(\xi)\sin\omega\xi\mathrm{d}\xi, & (5.2.11)\end{cases}$$

傅里叶余弦变换对

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_0^\infty A(\omega)\cos\omega x \mathrm{d}\omega, & (5.2.12) \\ A(\omega) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_0^\infty f(\xi)\cos\omega\xi \mathrm{d}\xi. & (5.2.13) \end{cases}$$

例 1 矩形函数 $\mathrm{rect}x$ 指的是

$$\mathrm{rect}x = \begin{cases} 1, & \left(|x| < \dfrac{1}{2}\right) \\ 0. & \left(|x| > \dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

试将矩形脉冲 $f(t) = h\mathrm{rect}(t/2T)$ (图 5-1)展为傅里叶积分.

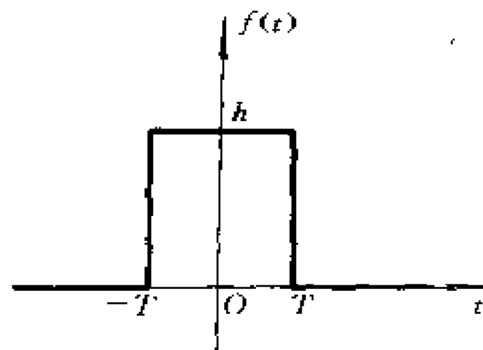


图 5-1

解 $f(x)$ 是偶函数,可按(5.2.8)展为傅里叶余弦积分

$$f(x) = \int_0^\infty A(\omega)\cos\omega t \mathrm{d}\omega,$$

其傅里叶变换

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(\xi)\cos\omega\xi \mathrm{d}\xi \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty h\mathrm{rect}(\xi/2T)\cos\omega\xi \mathrm{d}\xi \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^T h\cos\omega\xi \mathrm{d}\xi = \frac{2h}{\pi}\frac{\sin\omega T}{\omega}. \end{aligned}$$

$A(\omega)$的图象示于图 5-2. 这是连续谱. 若有形似图 5-1 的脉冲电波,它便含有一切频率(当然应该除去 π/T 的整数倍频率),它到达无线电接收机时,不管接收机调谐在哪个频率,都会引起噪音.

例 2 由 $2N$ 个(N 是正整数)正弦波组成的有限正弦波列

$$f(t)=\begin{cases}A\sin\omega_0 t, & \left(|t|<\dfrac{2N\pi}{\omega_0}\right)\\ 0. & \left(|t|>\dfrac{2N\pi}{\omega_0}\right)\end{cases}$$

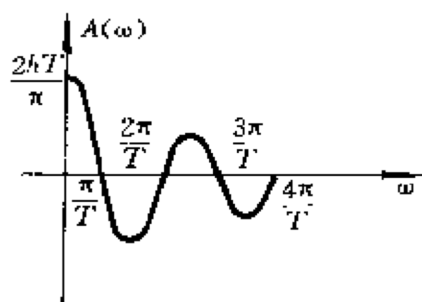


图 5-2

试将它展为傅里叶积分.

解 $f(t)$是奇函数(图 5-3),可按(5.2.6)和(5.2.7)展开为傅里叶正弦积分

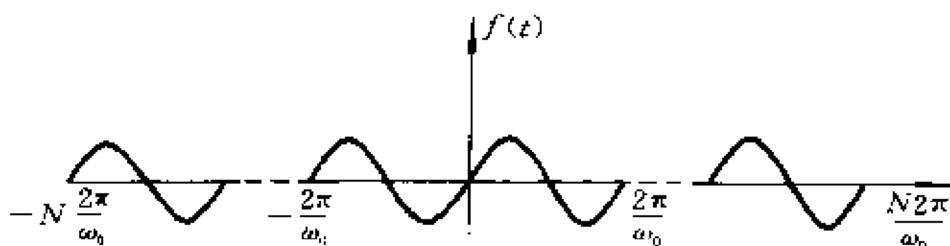


图 5-3

$$f(t)=\int_0^\infty B(\omega)\sin\omega t\mathrm{d}\omega,$$

其傅里叶变换

$$\begin{aligned}B(\omega)&=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(t)\sin\omega t\mathrm{d}t=\frac{2A}{\pi}\int_0^{N\frac{2\pi}{\omega_0}}\sin\omega_0 t\sin\omega t\mathrm{d}t\\&=-\frac{A}{\pi}\int_0^{N\frac{2\pi}{\omega_0}}[\cos(\omega+\omega_0)t-\cos(\omega-\omega_0)t]\mathrm{d}t\\&=-\frac{A}{\pi}\left[\frac{\sin(\omega+\omega_0)t}{\omega+\omega_0}-\frac{\sin(\omega-\omega_0)t}{\omega-\omega_0}\right]\Bigg|_0^{N\frac{2\pi}{\omega_0}}\\&=\frac{A}{\pi}\sin\left(\frac{\omega}{\omega_0}N2\pi\right)\left[-\frac{1}{\omega+\omega_0}+\frac{1}{\omega-\omega_0}\right]\\&=\frac{2A\omega_0}{\pi(\omega^2-\omega_0^2)}\sin\left(\frac{\omega}{\omega_0}N2\pi\right).\end{aligned}$$

这个频谱见图 5-4. 在 ω_0 有一尖峰,高度为$(2N/\omega_0)A_0$,在其两侧相差为 $\omega_0/2N$ 处降为零. 所以,有限长的正弦波列并非单色

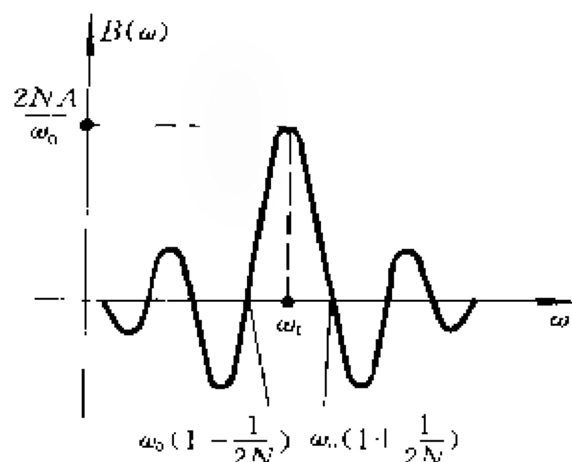


图 5-4

波（"单色"指的是只有一个单一频率）．大体说来，其所包含的圆频率集中在 ω_0 左右 $\omega_0/2N$ 范围内，波列越长（N 越大），圆频率分散的范围 $\omega_0/2N$ 越小．

（二）复数形式的傅里叶积分

除了实数形式，还有复数形式的傅里叶积分，而且在很多情况下，复数形式的傅里叶积分比实数形式的傅里叶积分使用起来更为方便．

通过简单的代数运算，就可以从实数形式的傅里叶积分过渡到复数形式的傅里叶积分．为此，以欧勒公式

$$\cos\omega x=\frac{1}{2}(e^{i\omega x}+e^{-i\omega x}),\sin\omega x=\frac{1}{2i}(e^{i\omega x}-e^{-i\omega x})$$

代入（5.2.4），整理即得

$$f(x)=\int_0^\infty\frac{1}{2}[A(\omega)-iB(\omega)]e^{i\omega x}d\omega$$
$$+\int_0^\infty\frac{1}{2}[A(\omega)+iB(\omega)]e^{-i\omega x}d\omega.$$

在右边的第二个积分中，将 ω 换成 $-\omega$，

$$f(x)=\int_0^\infty\frac{1}{2}[A(\omega)-iB(\omega)]e^{i\omega x}d\omega$$

$$+\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}[A(|\omega|)+\mathrm{i}B(|\omega|)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega.$$

两个积分可合并写为

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega, \tag{5.2.14}$$

其中

$$F(\omega)=\begin{cases}\frac{1}{2}[A(\omega)-\mathrm{i}B(\omega)], & (\omega\geqslant 0)\\ \frac{1}{2}[A(|\omega|)+\mathrm{i}B(|\omega|)]. & (\omega<0)\end{cases}$$

以(5.2.5)代入上式.对于 $\omega\geqslant 0$,

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)[\cos\omega x-\mathrm{i}\sin\omega x]\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}]^{*}\mathrm{d}x;$$

对于 $\omega<0$,

$$\begin{aligned}F(\omega)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)[\cos|\omega|x+\mathrm{i}\sin|\omega|x]\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\omega|x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}]^{*}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

总之,不管 $\omega\geqslant 0$ 还是 $\omega<0$,都有

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}]^{*}\mathrm{d}x. \tag{5.2.15}$$

(5.2.14)是 $f(x)$ 的复数形式的傅里叶积分表示式,(5.2.15)则是 $f(x)$ 的傅里叶变换式.这两个式子还可以写成对称的形式

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega, \tag{5.2.16}$$

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}]^*\,\mathrm{d}x. \qquad (5.2.17)$$

并常用符号简写为

$$F(\omega)=\mathscr{F}[f(x)],f(x)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]. \qquad (5.2.18)$$

$f(x)$和 $F(\omega)$分别称为傅里叶变换的**原函数**和**像函数**.

例 3 求矩形脉冲 $f(t)=h\mathrm{rect}(t/2T)$的复数形式的傅里叶变换.

解 按(5.2.15),

$$\mathscr{F}[h\mathrm{rect}(t/2T)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}h\mathrm{rect}(t/2T)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{h}{2\pi}\int_{-T}^{T}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t=-\frac{h}{2\pi\mathrm{i}\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\Big|_{-T}^{T}$$

$$=\frac{h}{\pi}\frac{\sin\omega T}{\omega}.$$

通常把$(\sin\pi x)/\pi x$ 称为 x 的 sinc 函数,记为 $\mathrm{sinc}x$,故本例答案也可写成

$$\mathscr{F}[h\mathrm{rect}(t/2T)]=\frac{hT}{\pi}\mathrm{sinc}\left(\frac{T}{\pi}\omega\right).$$

(三)傅里叶变换的基本性质

现在介绍傅里叶变换的一些基本性质.

为了叙述方便,以下均假定 $f(x)$的傅里叶变换存在,且记 $\mathscr{F}[f(x)]=F(\omega)$.

(1)导数定理 $\mathscr{F}[f'(x)]=\mathrm{i}\omega F(\omega)$. (5.2.19)

证 按(5.2.15),

$$\mathscr{F}[f'(x)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f'(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2\pi}[f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}]_{-\infty}^{\infty}$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}]'\mathrm{d}x.$$

根据傅里叶积分定理，有 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$，所以

$$\mathscr{F}[f'(x)] = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}]'\mathrm{d}x = \mathrm{i}\omega F(\omega).$$

(2)积分定理 $\mathscr{F}\left[\int^{(x)} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right] = \frac{1}{\mathrm{i}\omega}F(\omega).$ (5.2.20)

证 记 $\int^{(x)} f(\xi)\mathrm{d}\xi$ 为 $\varphi(x)$，则

$$\varphi'(x) = f(x).$$

对 $\varphi(x)$ 应用导数定理

$$\mathscr{F}[\varphi'(x)] = \mathrm{i}\omega\mathscr{F}[\varphi(x)],$$

即

$$\mathscr{F}\left[\int^{(x)} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right] = \frac{1}{\mathrm{i}\omega}\mathscr{F}[f(x)] = \frac{1}{\mathrm{i}\omega}F(\omega).$$

以上两条定理是很重要的，它告诉我们，原函数的求导和求积分的运算，经傅里叶变换后，变成了像函数的代数运算.

(3)相似性定理 $\mathscr{F}[f(ax)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right).$ (5.2.21)

证 $\mathscr{F}[f(ax)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(ax)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x.$

作代换 $y = ax$，则上式成为

$$\mathscr{F}[f(ax)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{a}y}\frac{1}{a}\mathrm{d}y = \frac{1}{a}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{a}y}\mathrm{d}y.$$

换回原变数

$$\mathscr{F}[f(ax)] = \frac{1}{a}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{a}x}\mathrm{d}x.$$

将上式与(5.2.15)比较，即得

$$\mathscr{F}[f(ax)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

(4)延迟定理 $\mathscr{F}[f(x-x_0)] = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x_0}F(\omega).$ (5.2.22)

证 $\mathscr{F}[f(x-x_0)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-x_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x.$

作代换 $y = x - x_0$， 则

$$\mathscr{F}[f(x - x_0)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(y + x_0)}\mathrm{d}y$$

$$= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x_0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega y}\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x_0}F(\omega).$$

(5) 位移定理 $\quad \mathscr{F}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 x}f(x)] = f(\omega - \omega_0).\qquad (5.2.23)$

证 $\quad \mathscr{F}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 x}f(x)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 x}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega - \omega_0)x}\mathrm{d}x = F(\omega - \omega_0).$$

(6) 卷积定理 $\quad$ 若 $\mathscr{F}[f_1(x)] = F_1(\omega)$，$\mathscr{F}[f_2(x)] = F_2(\omega)$，则

$$\mathscr{F}[f_1(x) * f_2(x)] = 2\pi F_1(\omega)F_2(\omega).\qquad (5.2.24)$$

其中 $\quad f_1(x) * f_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)f_2(x - \xi)\mathrm{d}\xi$ 称为 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的卷积.

证 $\quad \mathscr{F}[f_1 * f_2] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)f_2(x - \xi)\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x.$

交换积分顺序

$$\mathscr{F}[f_1 * f_2] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x - \xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}\xi.$$

在对 x 的积分中，作代换 $y = x - \xi$，则，

$$\mathscr{F}[f_1 * f_2] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega y - \mathrm{i}\omega\xi}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\xi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega y}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}\xi$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\xi}\mathrm{d}\xi \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_2(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega y}\mathrm{d}y$$

$$= 2\pi F_1(\omega)F_2(\omega).$$

（四）多重傅里叶积分

二维或三维无界空间的非周期函数也可以展为傅里叶积分，只是这傅里叶积分是多重的.下面就三维情形具体说明.

首先就自变数 x 将三维空间的非周期函数 $f(x,y,z)$ 展为傅里叶积分，其傅里叶变换为 $F_1(k_1;y,z)$，y,z 作为参数出现在其中；再将 $F_1(k_1;y,z)$ 就 y 展为傅里叶积分，其傅里叶变换为 $F_2(k_1,k_2;z)$，其中 z 为参数；最后将 $F_2(k_1,k_2;z)$ 就 z 展为傅里叶积分，这样，综合三次展开，得到 $f(x,y,z)$ 的三重傅里叶积分

$$f(x,y,z) = \iiint_{-\infty}^{\infty} F(k_1,k_2,k_3)e^{i(k_1x+k_2y+k_3z)}dk_1dk_2dk_3,$$

其中三重傅里叶变换

$$F(k_1,k_2,k_3) = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{\infty} f(x,y,z)e^{-i(k_1x+k_2y+k_3z)}dxdydz.$$

引入矢量 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}_1x+\boldsymbol{i}_2y+\boldsymbol{i}_3z$，$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}_1k_1+\boldsymbol{i}_2k_2+\boldsymbol{i}_3k_3$，可将三重傅里叶积分及变换写成较简洁的形式

$$f(\boldsymbol{r}) = \iiint_{-\infty}^{\infty} F(\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}dk_1dk_2dk_3, \tag{5.2.25}$$

$$F(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{\infty} f(\boldsymbol{r})[e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}]^*dxdydz. \tag{5.2.26}$$

或采用对称的形式

$$f(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\iiint_{-\infty}^{\infty} F(\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}dk_1dk_2dk_3, \tag{5.2.27}$$

$$F(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\iiint_{-\infty}^{\infty} f(\boldsymbol{r})[e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}]^*dxdydz. \tag{5.2.28}$$

习　　题

1. 求单个锯齿脉冲 $f(t)=kt\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}-\frac{1}{2}\right)$，即

$$f(t)=\begin{cases}0, & (t<0)\\ kt, & (0<t<T)\\ 0 & (t>T)\end{cases}$$

的傅里叶变换.

2. 求 $\text{sinc}\,t=\frac{\sin\pi t}{\pi t}$ 的傅里叶变换，试以本题的傅里叶变换函数跟图 5-1 比较，又以本题的 $\text{sinc}\,t$ 跟图 5-2 比较，比较的结果说明什么问题？

3. 把下列脉冲 $f(t)$ 展开为傅里叶积分，

$$f(t)=\begin{cases}0 & (t<-T),\\ -h & (-T<t<0),\\ h & (0<t<T),\\ 0 & (T<t).\end{cases}$$

注意在半无界区间 $(0,\infty)$ 上，本例的 $f(t)$ 跟例 1 的 $f(t)$ 相同.

4. $f(t)$ 是定义在半无界区间 $(0,\infty)$ 上的函数，

$$f(t)=\begin{cases}h & (0<t<T),\\ 0 & (T<t).\end{cases}$$

(1)在边界条件 $f'(0)=0$ 下，把 $f(t)$ 展为傅里叶积分；(2)在边界条件 $f(0)=0$ 下，把 $f(t)$ 展为傅里叶积分.

5. 在边界条件 $f(0)=0$ 下，把定义在 $(0,\infty)$ 上的函数 $f(x)=e^{-kx}$ 展为傅里叶积分.

§5.3 δ 函 数

(一) δ 函数

物理学常常要研究一个物理量在空间或时间中分布的密度，例如质量密度(通常简称为密度)、电荷密度、每单位时间传递的动量(即力)等等. 但是物理学又常常运用质点、点电荷、瞬时力等抽象模型，它们不是连续分布于空间或时间中，而是集中在空间的某一点或时间的某一瞬时. 它们的密度又该如何描写呢？

我们知道，若质量 m 均匀分布在长为 l 的线段 $[-l/2,l/2]$ 上，则其线密度 $\rho_l(x)$ 可表为

$$\rho_l(x)=\begin{cases}0 & (|x|>l/2),\\ m/l & (|x|\leqslant l/2)\end{cases}, \text{即 } \rho_l(x)=\frac{m}{l}\mathrm{rect}\left(\frac{x}{l}.\right) \tag{5.3.1}$$

将 $\rho_l(x)$ 对 x 积分，则得到总质量

$$\int_{-\infty}^{\infty}\rho_l(x)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\frac{m}{l}\mathrm{d}x=m.$$

如果让上述线段的长度 $l\to 0$，我们将得到位于坐标原点质量为 m 的质点，而线密度函数就成为质点的线密度函数. 将它记为 $\rho(x)$，则

$$\lim_{l\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\rho_l(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x)\mathrm{d}x=m.$$

若不求积分而先取极限，则有

$$\rho(x)=\lim_{l\to 0}\rho_l(x)=\lim_{l\to 0}\frac{m}{l}\mathrm{rect}\left(\frac{x}{l}\right)=\begin{cases}0, & (x\neq 0)\\ \infty. & (x=0)\end{cases} \tag{5.3.2}$$

由此可以看出质点线密度分布函数的直观图象，它在 $x=0$ 处为 ∞，在 $x\neq 0$ 处为零. 它的积分为 m.

对于质点、点电荷、瞬时力这类集中于空间某一点或时间的某一瞬时的抽象模型，在物理学中引入 δ 函数以便描述其密度：

$$\delta(x)=\begin{cases}0, & (x\neq 0)\\ \infty; & (x=0)\end{cases} \tag{5.3.3}$$

$$\int_a^b\delta(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & (a,b\text{ 都}<0,\text{或都}>0)\\ 1. & (a<0<b)\end{cases} \tag{5.3.4}$$

这函数未免有悖常规. 其后，在数学上引入了**广义函数**的概念，在严密的基础上证明了 δ 函数的一些重要性质. 按照广义函数的理论，δ 函数的确切意义应是在积分运算下来理解. **请记住这一点**. 从(5.3.4)可以看出 $\delta(x)$ 具有**量纲** $[\delta(x)]=1/[x]$. 将自变数 x 平移 x_0 得 $\delta(x-x_0)$. 图 5-5 是 $\delta(x-x_0)$ 的示意图，曲线的“峰”无限

高，但“宽度”无限窄，曲线下的面积是有限值 1.

有了 δ 函数，位于 x_0 而质量为 m 的质点的线密度分布为 $m\delta(x-x_0)$；位于 x_0 而电量为 q 的点电荷的线密度为 $q\delta(x-x_0)$；作用于瞬时 t_0 而冲量为 K 的瞬时力为 $K\delta(t-t_0)$.

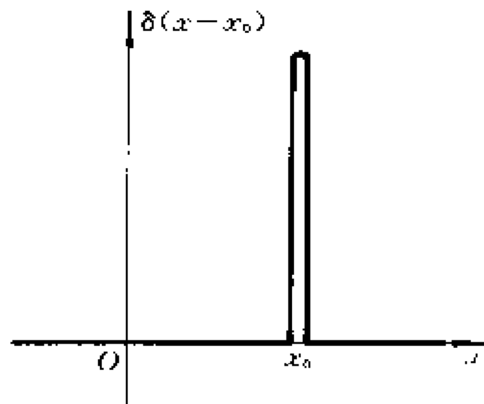


图 5-5

(二) δ 函数的一些性质

1. 显然，$\delta(x)$是偶函数，它的导数是奇函数，

$$\delta(-x)=\delta(x),$$
$$\delta'(-x)=-\delta'(x). \qquad (5.3.5)$$

2. 研究积分 $\mathrm{H}(x)=\int_{-\infty}^{x}\delta(t)\mathrm{d}t$. 从(5.3.3)和(5.3.4)容易看出，当积分上限 $x<0$，积分值为零；当 $x>0$，积分值为 1.

$$\mathrm{H}(x)=\int_{-\infty}^{x}\delta(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}0, & (x<0)\\ 1. & (x>0)\end{cases} \qquad (5.3.6)$$

$\mathrm{H}(x)$称为**阶跃函数**或**亥维赛单位函数**. 从而 $\mathrm{H}(x)$是 $\delta(x)$的原函数，$\delta(x)$是 $\mathrm{H}(x)$的导数，

$$\delta(x)=\frac{\mathrm{dH}(x)}{\mathrm{d}x}. \qquad (5.3.7)$$

3. 对于任何一个定义在$(-\infty,\infty)$上的连续函数 $f(\tau)$，

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\delta(\tau-t_0)\mathrm{d}\tau=f(t_0). \qquad (5.3.8)$$

这有时叫作 δ 函数的**挑选性**，因为它把函数 $f(\tau)$在点 $\tau=t_0$ 的值 $f(t_0)$挑选出来.

证 对于任何 $\varepsilon>0$，

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\delta(\tau-t_0)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{t_0-\varepsilon}f(\tau)\delta(\tau-t_0)\mathrm{d}\tau+\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon}f(\tau)\delta(\tau-t_0)\mathrm{d}\tau$$

$$+\int_{t_0+\epsilon}^{\infty} f(\tau)\delta(\tau-t_0)\mathrm{d}\tau.$$

根据(5.3.4)，上式右边第一、三项为零. 对当中一项应用中值定理，然后应用(5.3.4)，即得

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(\tau-t_0)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon}\delta(\tau-t_0)\mathrm{d}\tau = f(\xi),$$

其中 ξ 为区间 $(t_0-\epsilon, t_0+\epsilon)$ 上的某个数值. 令 $\epsilon\to 0$，上式就成为(5.3.8). 实际上，(5.3.8)可以代替(5.3.3)和(5.3.4)作为 δ 函数的定义.

4. 即使是连续分布的质量、电荷或持续作用的力也可用 δ 函数表出. 现在用从 $t=a$ 持续作用到 $t=b$ 的作用力 $F(t)$ 加以说明. 把时间区间 $[a,b]$ 划分为许许多多小段，在某个从 τ 到 $\tau+\mathrm{d}\tau$ 的短时间段上，力 $f(t)$ 的冲量是 $f(\tau)\mathrm{d}\tau$，既然 $\mathrm{d}\tau$ 很短，不防将这段短时间上的作用力看作瞬时力，记作 $f(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau$. 这许许多多前后相继的瞬时力的总计就是持续力 $f(t)$，即

$$f(t) = \sum_{\tau} f(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_a^b f(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau. \quad (5.3.9)$$

5. 如果 $\varphi(x)=0$ 的实根 $x_k(k=1,2,3,\cdots)$ 全是单根，则

$$\delta[\varphi(k)] = \sum_k \frac{\delta(x-x_k)}{|\varphi'(x_k)|}.$$

证 按照定义，

$$\delta[\varphi(x)] = \begin{cases} 0, & (\varphi(x)\neq 0) \\ \infty, & (\varphi(x)=0) \end{cases}$$

既然 $\varphi(x)$ 的实根 x_k 全是单根，就有

$$\delta[\varphi(x)] = \sum_k c_k\delta(x-x_k).$$

现在要确定这些系数 c_k. 在第 n 个根 x_n 的附近取小区间 $(x_n-\epsilon, x_n+\epsilon)$，$\epsilon$ 是如此小，在这区间上并无别的根. 在这区间上进行积分，

$$\int_{x_n-\epsilon}^{x_n+\epsilon}\delta[\varphi(x)]\mathrm{d}x = \sum_k c_k\int_{x_n-\epsilon}^{x_n+\epsilon}\delta(x-x_k)\mathrm{d}x.$$

上式左边

$$= \int_{\varphi(x_n-\epsilon)}^{\varphi(x_n+\epsilon)} \delta[\varphi(x)] \frac{1}{\varphi'(x)} d\varphi = \frac{1}{|\varphi'(x_n)|}.$$

因为 $\varphi(x)$ 的实根全是单根，所以 $\varphi'(x_n)$ 不会等于零. 式中的绝对值符号是考虑到 $\varphi'(x_n)<0$ 的可能性. 在 $\varphi'(x_n)<0$ 的情况下，$\varphi(x_n+\epsilon)<\varphi(x_n-\epsilon)$，应调换积分上下限，这就又引入一个负号，积分结果仍为正. 再看上式右边. 除 $k=n$ 的一项外均为零，故上式右边

$$= c_n \int_{x_n-\epsilon}^{x_n+\epsilon} \delta(x-x_n) dx = c_n.$$

两相比较，

$$c_n = 1/|\varphi'(x_n)|.$$

证毕.

特例

$$\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|},$$

$$\delta(x^2-a^2) = \frac{\delta(x+a)+\delta(x-a)}{2|a|} = \frac{\delta(x+a)+\delta(x-a)}{2|x|}.$$

（三）δ 函数是一种广义函数

由(5.3.3)和(5.3.4)定义的 δ 函数显然不是通常意义的函数. 人们现在说，它是广义函数. 具体地说，它是某种通常函数系列的极限，而这极限是在积分意义上说的. 例如

$$\delta(x) = \lim_{l\to 0} \frac{1}{l} \mathrm{rect}\left(\frac{x}{l}\right), \tag{5.3.10}$$

$$\delta(x) = \lim_{K\to\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin Kx}{x}, \tag{5.3.11}$$

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{\epsilon^2+x^2}. \tag{5.3.12}$$

先验证(5.3.10).

$$\frac{1}{l}\mathrm{rect}\left(\frac{x}{l}\right) = \begin{cases} 1/l, & (|x|<l/2) \\ 0. & (|x|>l/2) \end{cases}$$

当 $l\to 0$，上式的极限不存在. 但是在积分的意义上看，

$$\lim_{l\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{l}\mathrm{rect}\left(\frac{x}{l}\right) dx = \lim_{l\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}(\xi) d\xi = 1,$$

符合 δ 函数的定义.

次验证(5.3.11). 函数$(1/\pi x)\sin Kx$的图象描绘在图 5-6 中. 当$K\to\infty$时, 在$x=0$处"峰"的高度K/π无限增高, 而"峰"宽度无限变窄, 在$x\neq 0$处, 曲线正负振荡的间距无限缩短. 因而当$K\to\infty$时, 极限不存在. 不过, 若在积分的意义上看,

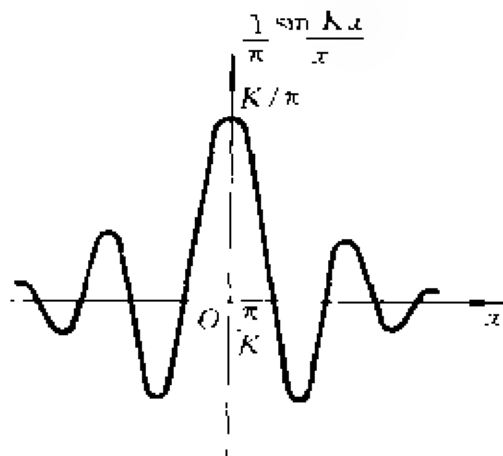


图 5-6

$$\lim_{K\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\sin Kx}{x}\mathrm{d}x=\lim_{K\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\sin Kx}{Kx}\mathrm{d}(Kx)$$

$$=\lim_{K\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y=\lim_{K\to\infty}\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y.$$

引用 § 4.2 例 8, $\int_0^{\infty}\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y=\pi/2$, 即得

$$\lim_{K\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\sin Kx}{x}\mathrm{d}x=1.$$

这又是符合 δ 函数的定义的.

接着验证(5.3.12). 对于$x\neq 0$.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+x^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2}=0.$$

但是对于$x=0$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+x^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\frac{1}{\varepsilon}=\infty,$$

极限不存在. 从积分的意义上看,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+x^2}\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}(x/\varepsilon)}{1+(x/\varepsilon)^2}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{2}{\pi}\mathrm{tg}^{-1}\frac{x}{\varepsilon}\Big|_0^{\infty}=1,$$

符合 δ 函数定义.

(四) δ 函数的傅里叶变换

按照(5.2.14)和(5.2.15)把 δ 函数表为复数形式的傅里叶积分,

$$\delta(x)=\int_{-\infty}^{\infty}C(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega,$$

其中傅里叶变换

$$C(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega 0}=\frac{1}{2\pi}. \quad (5.3.13)$$

这样,δ 函数的傅里叶积分是

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega. \quad (5.3.14)$$

这里顺便说说(5.3.11)和(5.3.12)的来由.计算(5.3.14)右边的积分,

$$\delta(x)=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-k}^{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}}{2\mathrm{i}x}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\sin kx}{x}.$$

这就是(5.3.11).或者换个方式计算(5.3.14)的积分,即以收敛因子 $\mathrm{e}^{\varepsilon\omega}$ 或 $\mathrm{e}^{-\varepsilon\omega}$ 乘被积函数,算出积分后再令 $\varepsilon\to 0$.这样,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{(\varepsilon+\mathrm{i}x)\omega}\mathrm{d}\omega+\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{(-\varepsilon+\mathrm{i}x)\omega}\mathrm{d}\omega\right]$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon+\mathrm{i}x}+\frac{1}{\varepsilon-\mathrm{i}x}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+x^2}.$$

这就是(5.3.12).

上面关于 δ 函数的傅里叶变换(5.3.13)和傅里叶积分(5.3.14)的导出方法其实颇成问题.事实上,δ 函数并非通常意义上的函数,根本不满足傅里叶积分定理的条件,不存在傅里叶变换.我们知道,在积分的意义上,δ 函数是某种通常函数系列的极限,如(5.3.10)~(5.3.12)所示,而这些通常函数的傅里叶变换是存在的.于是,不妨将这些通常函数的傅里叶变换系列的极限说成是 δ 函数的傅里叶变换,这里的极限自然也是从积分意义来理解的.不过,这傅里叶变换已非通常意义的傅里叶变换而是广义的傅

里叶变换.

从(5.3.10)出发,由§5.2例3,

$$\mathscr{F}\left[\frac{1}{l}\text{rect}+\left(\frac{x}{l}\right)\right]=\frac{1}{2\pi}\frac{\sin(\omega l/2)}{\omega l/2},$$

因而得到δ函数的广义傅里叶变换

$$\mathscr{F}[\delta(x)]=\lim_{l\to 0}\frac{1}{2\pi}\frac{\sin(\omega l/2)}{\omega l/2}=\frac{1}{2\pi},$$

这正是(5.3.13).

例1 计算$\frac{1}{r}\delta(r-c)$的三重傅里叶变换,这里r是球坐标中的极径,而c是正的实数.

解 应用(5.2.26),$\frac{1}{r}\delta(r-c)$的三重傅里叶变换为

$$\mathscr{F}\left[\frac{1}{r}\delta(r-c)\right]=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{r}\delta(r-c)e^{-ik\cdot r}dxdydz.$$

利用球坐标计算这一积分,以k的方向作为球坐标系的极轴方向

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\left[\frac{1}{r}\delta(r-c)\right]&=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{r=0}^{\infty}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{1}{r}\delta(r-c)e^{-ikr\cos\theta}\\&\quad\cdot r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi\\&=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{r=0}^{\infty}\int_{\theta=0}^{\pi}\delta(r-c)e^{-ikr\cos\theta}rd(-\cos\theta)dr\\&=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{\infty}\delta(r-c)\frac{1}{ik}(e^{ikr}-e^{-ikr})dr\\&=\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{ik}(e^{ikc}-e^{-ikc}).\end{aligned}$$

例2 求阶跃函数

$$H(x)=\begin{cases}0, & (x<0)\\1. & (x>0)\end{cases}$$

的傅里叶变换.

解 由于$\int_{-\infty}^{\infty}|H(x)|dx=\int_0^{\infty}dx$发散,所以$H(x)$的傅里叶变换不存在.现在我们把$H(x)$看作函数系列

$$H(x;\beta)-\begin{cases}e^{-\beta x}, & (x>0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$$

在 $\beta\to 0^+$ 的极限. 即

$$H(x)=\lim_{\beta\to 0^+}H(x;\beta)=\lim_{\beta\to 0^+}\begin{cases}e^{-\beta x}, & (x>0)\\ 0. & (x<0)\end{cases}$$

而 $H(x;\beta)$ 的傅里叶变换是存在的：

$$\mathscr{F}[H(x;\beta)]=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}e^{-\beta x}e^{-i\omega x}dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}e^{-(\beta+i\omega)x}dx$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\beta+i\omega}e^{-(\beta+i\omega)x}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\beta+i\omega}.$$

下面就以 $H(x;\beta)$ 在 $\beta\to 0^+$ 时的极限作为 $H(x)$ 的傅里叶变换.

$$\mathscr{F}[H(x)]=\lim_{\beta\to 0}\frac{1}{2\pi(\beta+i\omega)}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\lim_{\beta\to 0}\left(\frac{\beta}{\beta^2+\omega^2}-i\frac{\omega}{\beta^2+\omega^2}\right),$$

其中

$$\lim_{\beta\to 0}\frac{\beta}{\beta^2+\omega^2}=\begin{cases}0, & (\omega\neq 0)\\ \infty, & (\omega=0)\end{cases}$$

且 $\displaystyle\lim_{\beta\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\beta}{\beta^2+\omega^2}d\omega=\lim_{\beta\to 0}\left[\operatorname{tg}^{-1}\frac{\omega}{\beta}\right]_{-\infty}^{\infty}=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi.$

所以

$$\lim_{\beta\to 0}\frac{\beta}{\beta^2+\omega^2}=\pi\delta(\omega).$$

又

$$\lim_{\beta\to 0}\frac{\omega}{\beta^2+\omega^2}-\begin{cases}0 & (\omega=0)\\ \dfrac{1}{\omega} & (\omega\neq 0)\end{cases}$$

我们将这记作

$$\lim_{\beta\to 0}\frac{\omega}{\beta^2+\omega^2}=\mathscr{P}\frac{1}{\omega}=\begin{cases}0, & (\omega-0)\\ \dfrac{1}{\omega} & (\omega\neq 0)\end{cases}$$

终于求得

$$\mathscr{F}[\mathrm{H}(x)]=\frac{1}{2}\delta(\omega)-\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\mathscr{P}\frac{1}{\omega}.$$

（五）多维的δ函数

有时也会遇到多维的δ函数，例如在三维空间坐标原点的质点，其密度函数就可表为$m\delta(\boldsymbol{r})$，其中$\delta(\boldsymbol{r})$定义如下

$$\delta(\boldsymbol{r})=\begin{cases}0,(\boldsymbol{r}\neq 0)\\ \infty,(\boldsymbol{r}=0)\end{cases}$$

$$\iiint_{-\infty}^{\infty}\delta(\boldsymbol{r})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=1.$$

这样的三维δ函数往往用三个一维δ函数的乘积表示

$$\delta(\boldsymbol{r})=\delta(x)\delta(y)\delta(z).$$

习　　题

1. 验证§5.2例2的频谱$B(\omega)$（图5-4）于$N\to\infty$时就成为$A\delta(\omega-\omega_0)-A\delta(\omega+\omega_0)$，并解释这结果的物理意义.

2. 把$\delta(x)$展为实数形式的傅里叶积分.

第六章 拉普拉斯变换

§6.1 符 号 法

运算微积的原始形式是符号法.

函数 $\varphi(t)$ 的 n 阶导数可看成求导算符 $p=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 在函数 $\varphi(t)$ 上作用 n 次的结果，$p^n\varphi(t)=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\varphi(t)$. 算符 p 的"倒数"$\frac{1}{p}$ 则解释为积分算符，$\frac{1}{p}\varphi(t)=\int_0^t\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau$. 例如，$\frac{1}{p}1=\int_0^t 1\mathrm{d}\tau=t$，$\frac{1}{p^2}1=\int_0^t\int_0^{\tau_1} 1\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\tau_1=\frac{1}{2}t^2$，
依此类推，

$$\frac{1}{p^n}1=\frac{1}{n!}t^n. \tag{6.1.1}$$

无线电工程师亥维赛把符号法应用于求解线性微分方程，从而大大促进了符号法的应用. 例如，电阻 R 和自感 L 串联电路微分方程是 $L\mathrm{d}j/\mathrm{d}t+Rj=E$，即

$$\left(L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+R\right)j=E. \tag{6.1.2}$$

亥维赛把(6.1.2)改写为

$$j=\frac{E}{Lp+R}1. \tag{6.1.3}$$

算符 p 出现在分母中，是没有什么意义的. (6.1.3)最多只能当作"j 是微分方程(6.1.2)的解"这句话的缩写. 但是亥维赛竟把(6.1.3)的分式展开为级数并逐项应用(6.1.1).

$$\begin{aligned} j&=\frac{E}{Lp+R}1=\frac{E}{Lp}\cdot\frac{1}{1+\frac{R}{L}\frac{1}{p}}1=\frac{E}{Lp}\left(1+\frac{R}{L}\frac{1}{p}\right)^{-1}1\\ &=\frac{E}{Lp}\left\{1-\frac{R}{L}\frac{1}{p}+\frac{R^2}{L^2}\frac{1}{p^2}-\frac{R^3}{L^3}\frac{1}{p^3}+\cdots\right\}1 \end{aligned}$$

$$=\frac{E}{R}\left\{\frac{R}{L}\frac{1}{p}-\frac{R^2}{L^2}\frac{1}{p^2}+\frac{R^3}{L^3}\frac{1}{p^3}-\frac{R^4}{L^4}\frac{1}{p^4}+\cdots\right\}1$$
$$=\frac{E}{R}\left\{\frac{R}{L}t-\frac{R^2}{L^2}\frac{t^2}{2!}+\frac{R^3}{L^3}\frac{t^3}{3!}-\frac{R^4}{L^4}\frac{t^4}{4!}+\cdots\right\}$$
$$=\frac{E}{R}(1-e^{-(R/L)t}).$$

他就这样解出了微分方程.

作为无线电工程师,亥维赛不怎么考虑数学的谨严,他取得的成绩使当时的数学家大为吃惊.但是,亥维赛也作出了一系列计算错误,后来由杰弗莱斯指出乃是没有注意到 p 与 $1/p$ 的次序不可交换,

$$\frac{1}{p}pf(t)=\int_0^t d\tau f'(\tau)=f(t)-f(0),$$
$$p\frac{1}{p}f(t)=\frac{d}{dt}\int_0^t d\tau f(\tau)=f(t).$$

后来,人们发现了符号法跟拉普拉斯变换的联系,符号法才脱离了粗糙的形式而建立在拉普拉斯变换的基础上,通常把它改称为**运算微积**.在运算微积中,字母 p 不再解释为算符,而是代表一个复变数.

§6.2 拉普拉斯变换

(一) 拉普拉斯变换的定义

上一章指出,傅里叶积分与傅里叶变换存在的条件是原函数 $f(x)$ 在任一有限区间满足狄里希利条件,并且在 $(-\infty,\infty)$ 区间上绝对可积.这是一个相当强的条件,以致于许多常见的函数(例如多项式、三角函数等)都不满足这一条件.本章介绍另一种变换——**拉普拉斯变换**.这种变换存在的条件比傅里叶变换存在的条件宽松.

拉普拉斯变换常用于初始值问题,即已知某个物理量在初始时刻 $t=0$ 的值 $f(0)$,而求解它在初始时刻之后的变化情况 $f(t)$.至于它在初始时刻之前的值,我们并不感兴趣,不妨置

$$f(t)=0. \qquad (t<0) \tag{6.2.1}$$

为了获得宽松的变换条件,把 $f(t)$ 加工为 $g(t)$,

$$g(t)=e^{-\sigma t}f(t). \tag{6.2.2}$$

这里 $e^{-\sigma t}$是收敛因子，就是说，正的实数 σ 的值选得如此之大，以保证 $g(t)$在区间$(-\infty,\infty)$上绝对可积. 于是，可以对 $g(t)$施行傅里叶变换

$$G(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{-i\omega t}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}f(t)e^{-(\sigma+i\omega)t}dt.$$

将 $\sigma+i\omega$ 记作 p，并将 $G(\omega)$改记作$\bar{f}(p)/2\pi$，则

$$\bar{f}(p)=\int_{0}^{\infty}f(t)e^{-pt}dt. \tag{6.2.3}$$

其中积分 $\int_{0}^{\infty}f(t)e^{-pt}dt$ 称为**拉普拉斯积分**，$\bar{f}(p)$称为 $f(t)$的**拉普拉斯变换函数**. (6.2.3)代表着从 $f(t)$到$\bar{f}(p)$的一种积分变换，称为**拉普拉斯变换**(简称**拉氏变换**)，e^{-pt}称为拉普拉斯变换的**核**.

$G(\omega)$的傅里叶逆变换是

$$g(t)=\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega)e^{i\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{f}(\sigma+i\omega)e^{i\omega t}d\omega,$$

即
$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{f}(\sigma+i\omega)e^{(\sigma+i\omega)t}d\omega.$$

由
$$\sigma+i\omega=p, \text{有 } d\omega=\frac{1}{i}dp.$$

所以

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\bar{f}(p)e^{pt}dp. \tag{6.2.4}$$

$\bar{f}(p)$又称为**像函数**，而 $f(t)$称为**原函数**，它们之间的关系常用简单的符号写为

$$\bar{f}(p)=\mathscr{L}[f(t)], \tag{6.2.5}$$

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[\bar{f}(p)] \tag{6.2.6}$$

或

$$\bar{f}(p)\doteq f(t), \tag{6.2.7}$$

$$f(t)\doteqdot\bar{f}(p). \tag{6.2.8}$$

注意：由于(6.2.1)，原函数 $f(t)$应理解为 $f(t)H(t)$，虽然 $H(t)$通常都省略不写.

拉普拉斯变换，即(6.2.3)中的积分存在的条件是(1)在 $0\leqslant t<\infty$ 的任一有限区间上，除了有限个第一类间断点外，函数 $f(t)$ 及其导数是处处连续的，(2)存在常数 $M>0$ 和 $\sigma\geqslant 0$，使对任何 t 值 $(0\leqslant t<\infty)$，有

$$|f(t)|<Me^{\sigma t}. \tag{6.2.9}$$

σ 的下界称为**收敛横标**，用 σ_0 表示. 在实际应用中，大多数函数都满足这个充分条件.

例 1 求 $\mathscr{L}[1]$.

解 在 $\mathrm{Re}p>0$(即 $\sigma>0$)的半平面上，

$$\int_0^\infty 1\cdot e^{-pt}dt=\frac{1}{p},$$

$$\therefore \qquad \mathscr{L}[1]=\frac{1}{p}. \qquad (\mathrm{Re}p>0)$$

例 2 求 $\mathscr{L}[t]$.

解 在 $\mathrm{Re}p>0$ 的半平面上，

$$\begin{aligned}\int_0^\infty te^{-pt}dt &= -\frac{1}{p}\int_0^\infty td(e^{-pt})\\ &= -\frac{1}{p}[te^{-pt}]_0^\infty+\frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-pt}dt\\ &= \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-pt}dt=\frac{1}{p^2},\end{aligned}$$

$$\therefore \qquad \mathscr{L}[t]=\frac{1}{p^2}. \qquad (\mathrm{Re}p>0)$$

同理

$$\mathscr{L}[t^n]=\frac{n!}{p^{n+1}}.$$

例 3 求 $\mathscr{L}[e^{st}]$，s 为常数.

解 在 $\mathrm{Re}p>\mathrm{Re}s$ 的半平面上，

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{st}e^{-pt}dt &= \int_0^\infty e^{-(p-s)t}dt=-\frac{1}{p-s}[e^{-(p-s)t}]_0^\infty\\ &= \frac{1}{p-s}.\end{aligned}$$

$$\therefore \qquad \mathscr{L}[e^{st}]=\frac{1}{p-s}. \qquad (\mathrm{Re}p>\mathrm{Re}s)$$

例 4 求 $\mathscr{L}[te^{st}]$，s 为常数.

解 在 $\mathrm{Re}p>\mathrm{Re}s$ 的半平面上，

$$\int_0^\infty te^{st}e^{-pt}dt=-\frac{1}{p-s}\int_0^\infty td[e^{-(p-s)t}]$$

$$=-\frac{1}{p-s}\left\{[te^{-(p-s)t}]_0^\infty-\int_0^\infty e^{-(p-s)t}dt\right\}$$

$$=\frac{1}{(p-s)^2}.$$

$$\therefore \qquad \mathscr{L}[te^{st}]=\frac{1}{(p-s)^2}. \qquad (\mathrm{Re}p>\mathrm{Re}s)$$

同理

$$\mathscr{L}[t^ne^{st}]=\frac{n!}{(p-s)^{n+1}}.$$

例 5 求 $\mathscr{L}[tf(t)]$，其中 $f(t)$ 是存在拉氏变换的任意函数.

解 将拉氏变换的定义式(6.2.3)两边分别对 p 求导，

$$\frac{d\bar{f}(p)}{dp}=\int_0^\infty e^{-pt}(-t)f(t)dt,$$

从而

$$tf(t)\doteq(-1)\frac{d}{dp}\bar{f}(p).$$

依此类推，有

$$t^nf(t)\doteq(-1)^n\frac{d^n}{dp^n}\bar{f}(p).$$

（二）拉普拉斯变换的基本性质

由(6.2.3)定义的拉普拉斯变换函数 $\bar{f}(p)$ 具有以下特性.

(1) $\bar{f}(p)$ 是在 $\mathrm{Re}p=\sigma>\sigma_0$ 的半平面上的解析函数.

证 对于任意实常数 $\sigma>\sigma_0$，我们来考察积分 $\int_0^\infty \frac{d}{dp}[f(t)e^{-pt}]dt$. 利用(6.2.9)，

$$\int_0^\infty\left|\frac{d}{dp}[f(t)e^{-pt}]\right|dt\leqslant\int_0^\infty|f(t)|te^{-\sigma t}dt$$

$$<M\int_0^\infty te^{-(\sigma-\sigma_0)t}dt=\frac{M}{(\sigma-\sigma_0)^2}$$

因而$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}[f(t)\mathrm{e}^{-pt}]\mathrm{d}t$是一致收敛的，于是可以交换求导和积分的次序，即$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\bar{f}(p)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}[f(t)\mathrm{e}^{-pt}]\mathrm{d}t$，由此可见，$\bar{f}(p)$在$\mathrm{Re}p>\sigma_0$的半平面上处处可导，即在$\mathrm{Re}p>\sigma_0$的半平面上$\bar{f}(p)$是解析函数.

(2) 当$|p|\to\infty$，而$|\mathrm{Arg}p|\leqslant\frac{\pi}{2}-\varepsilon(\varepsilon>0)$时，$\bar{f}(p)$存在，且满足

$$\lim_{p\to\infty}\bar{f}(p)=0. \tag{6.2.10}$$

证 由(6.2.3)

$$|\bar{f}(p)|=\left|\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^\infty|f(t)\mathrm{e}^{-pt}|\mathrm{d}t<M\int_0^\infty\mathrm{e}^{-(\sigma-\sigma_0)t}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{M}{\sigma-\sigma_0}$$

因而，(6.2.3)中积分收敛，且$\lim\limits_{p\to\infty}\frac{M}{\sigma-\sigma_0}=0$，从而(6.2.10)成立.

除了某些奇点，像函数$\bar{f}(p)$常常可以解析延拓到全平面上去. 像函数的解析性质在拉普拉斯变换的理论中有着重要的意义.

下面介绍拉普拉斯变换的一些重要性质.

(1) 线性定理 若$f_1(t)\doteq\bar{f}_1(p)$，$f_2(t)\doteq\bar{f}_2(p)$，则

$$c_1f_1(t)+c_2f_2(t)\doteq c_1\bar{f}_1(p)+c_2\bar{f}_2(p). \tag{6.2.11}$$

证 由(6.2.3)

$$c_1f_1(t)+c_2f_2(t)\doteq\int_0^\infty[c_1f_1(t)+c_2f_2(t)]\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^\infty c_1f_1(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t+\int_0^\infty c_2f_2(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$$
$$=c_1\bar{f}_1(p)+c_2\bar{f}_2(p).$$

例 6 求$\mathscr{L}[\sin\omega t]$，$\omega$为常数.

解 $\sin\omega t=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t})$，

$$\therefore\quad\mathscr{L}[\sin\omega t]=\mathscr{L}\left[\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t})\right]=\frac{1}{2\mathrm{i}}\mathscr{L}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}]-\frac{1}{2\mathrm{i}}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}]$$
$$=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\frac{1}{p-\mathrm{i}\omega}-\frac{1}{p+\mathrm{i}\omega}\right]$$
$$=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}.\quad(\mathrm{Re}p>0)$$

同理，$$\mathscr{L}[\cos\omega t]=\frac{p}{p^2-\omega^2}.\quad(\mathrm{Re}p>0)$$

(2) **导数定理** $f'(t) \doteq p\,\bar{f}(p) - f(0).$ (6.2.12)

证 $f'(t) \doteq \int_0^\infty f'(t) e^{-pt} dt = \int_0^\infty e^{-pt} df$

$$= [e^{-pt} f(t)]_0^\infty - \int_0^\infty f(t) d(e^{-pt}).$$

取 $\mathrm{Re}\,p > \sigma_0$，有 $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-pt} f(t) = 0$，于是，

$$f'(t) \doteq -f(0) - \int_0^\infty f(t) d(e^{-pt}) = p\int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt - f(0)$$

$$= p\,\bar{f}(p) - f(0). \qquad (\mathrm{Re}\,p > \sigma_0)$$

推广到高阶导数，

$$f^{n}(t) \doteq p^n \bar{f}(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \cdots$$
$$- p f^{(n-2)}(0) - f^{n-1}(0). \qquad (6.2.13)$$

(3) **积分定理** $\int_0^t \psi(\tau) d\tau \doteq \frac{1}{p} \mathscr{L}[\psi(t)].$ (6.2.14)

证 考虑函数 $f(t) = \int_0^t \psi(\tau) d\tau$，对 $f(t)$ 应用导数定理 (6.2.12)，

$$f'(t) \doteq p\mathscr{L}[f(t)] - f(0) = p\mathscr{L}[f(t)],$$

其中 $f(0) = \int_0^0 \psi(\tau) d\tau = 0.$

$$\therefore \qquad \frac{1}{p}\mathscr{L}[\psi(t)] = \mathscr{L}[f(t)] = \mathscr{L}\left[\int_0^t \psi(\tau) d\tau\right],$$

即

$$\int_0^t \psi(\tau) d\tau \doteq \frac{1}{p}\mathscr{L}[\psi(t)].$$

(4) **相似性定理** $f(at) \doteq \frac{1}{a} \bar{f}\left(\frac{p}{a}\right).$ (6.2.15)

(5) **位移定理** $e^{-\lambda t} f(t) \doteq \bar{f}(p+\lambda).$ (6.2.16)

请读者仿照傅里叶变换的情形验证以上两条定理.

(6) **延迟定理** $f(t-t_0) \doteq e^{-pt_0} \bar{f}(p).$ (6.2.17)

证 $f(t-t_0) \doteq \int_0^\infty f(t-t_0) e^{-pt} dt,$

我们知道，原函数 $f(t)$ 应理解为 $f(t)H(t)$，因而上式里的 $f(t-t_0)$

应理解为 $f(t-t_0)H(t-t_0)$，如图 6-1 中的虚线所示. 因而积分下限 0 可改为 t_0，即

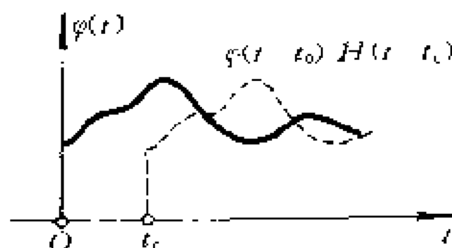


图 6-1

$$f(t-t_0) \doteq \int_{t_0}^{\infty} f(t-t_0)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t.$$

改用 $\xi=t-t_0$ 代替 t 作为积分变数，则

$$f(t-t_0) \doteq \int_0^{\infty} f(\xi)\mathrm{e}^{-p(\xi+t_0)}\mathrm{d}\xi=\mathrm{e}^{-pt_0}\int_0^{\infty} f(\xi)\mathrm{e}^{-p\xi}\mathrm{d}\xi$$
$$=\mathrm{e}^{-pt_0}\bar{f}(p).$$

(7) **卷积定理** 若 $f_1(t)\doteq\bar{f}_1(p)$，$f_2(t)\doteq\bar{f}_2(p)$，则

$$f_1(t)*f_2(t)\doteq\bar{f}_1(p)\bar{f}_2(p), \tag{6.2.18}$$

其中 $f_1(t)*f_2(t)\equiv\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$，称为 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的**卷积**.

证 $\mathscr{L}[f_1(t)*f_2(t)]$

$$=\int_0^{\infty} f_1(t)*f_2(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^{\infty}\left[\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t.$$

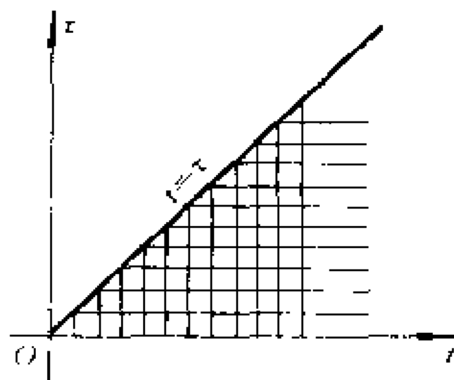


图 6-2

这是二重积分，先对 τ 积分，再对 t 积分，积分区域为图 6-2 中的划线区域. 现在改变积分次序，先对 t 积分，再对 τ 积分，积分限可参照图 6 2 确定.

$$\mathscr{L}[f_1(t)*f_2(t)]=\int_0^{\infty}\left[\int_{\tau}^{\infty} f_2(t-\tau)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t\right]f_1(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

改用 $\xi=t-\tau$ 代替 t 作为积分变数，

$$\mathscr{L}[f_1(t)*f_2(t)]=\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty} f_2(\xi)\mathrm{e}^{-p\xi}\mathrm{d}\xi\right]f_1(\tau)\mathrm{e}^{-p\tau}\mathrm{d}\tau$$
$$=\int_0^{\infty} f_1(\tau)\mathrm{e}^{-p\tau}\mathrm{d}\tau\int_0^{\infty} f_2(\xi)\mathrm{e}^{-p\xi}\mathrm{d}\xi$$
$$=\bar{f}_1(p)\bar{f}_2(p).$$

习　　题

求下列函数的拉普拉斯变换函数.

(1) $\mathrm{sh}\omega t, \mathrm{ch}\omega t$,　(2) $e^{-\lambda t}\sin\omega t, e^{-\lambda t}\cos\omega t$,

(3) $\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}$,　　(4) $\delta(t-\tau)$.

§6.3　拉普拉斯变换的反演

拉普拉斯变换主要用于求解线性微分方程(或积分方程). 经过变换,原函数所遵从的微分(或积分)方程变成了像函数所遵从的代数方程,代数方程比较容易求解. 但是解出像函数后还必须回到原函数,这才是所求的解. 由像函数求原函数的手续称为拉普拉斯变换的**反演**. 那么,怎样进行反演呢?

(一) 有理分式反演法　如果像函数是有理分式,只要把有理分式分解成分项分式,然后利用拉普拉斯变换的基本公式(例如§6.2 例 1～例 4 及习题 1(2)的结果),就能得到相应的原函数.

例 1　求　$\bar{f}(p)=\dfrac{p^3+2p^2-9p+36}{p^4-81}$的原函数.

解　先将这个有理分式分解成分项分式,

$$\begin{aligned}\bar{f}(p)&=\frac{p^3+2p^2-9p+36}{(p-3)(p+3)(p^2+9)}\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+3}+\frac{p-1}{p^2+9}\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p+3}+\frac{p}{p^2+9}-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{p^2+9}.\end{aligned}$$

应用§6.2 例 3 及例 5 的结果,即得

$$f(t)=\frac{1}{2}e^{3t}-\frac{1}{2}e^{-3t}+\cos 3t-\frac{1}{3}\sin 3t.$$

(二) 查表法　许多函数的拉普拉斯变换都制成了表格,从表上直接查找很方便. 特别是在比较完备的拉普拉斯变换函数手册中,对于一般常见的像函数,都能查出其原函数. 有些像函数,虽然

不能直接从表中查出其原函数，但可以利用上节的延迟定理、位移定理和卷积定理，再配合查表而解决其反演问题.

例 2 求 $\dfrac{e^{-\tau p}}{\sqrt{p}}$ 的原函数.

解 先抛开因子 $e^{-\tau p}$，从本书附录二的第 12 式查得 $\dfrac{1}{\sqrt{p}} \doteqdot \dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}$. 再利用延迟定理，将原函数中的 t 延迟为 $t-\tau$，即得

$$\frac{e^{-\tau p}}{\sqrt{p}} \doteqdot \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}.$$

例 3 求 $\dfrac{\omega}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$ 和 $\dfrac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$ 的原函数.

解 先将两函数里的 $p+\lambda$ 位移为 p，从附录二第 5，6 两式查得

$$\frac{\omega}{p^2+\omega^2} \doteqdot \sin\omega t, \quad \frac{p}{p^2+\omega^2} \doteqdot \cos\omega t.$$

再应用位移定理，即得

$$\frac{\omega}{(p+\lambda)^2+\omega^2} \doteqdot e^{-\lambda t}\sin\omega t, \quad \frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2+\omega^2} \doteqdot e^{-\lambda t}\cos\omega t.$$

例 4 求 $\dfrac{e^{-\alpha p}}{p(p+b)}$ 的原函数.

解 从 § 6.2 例题知，$\dfrac{1}{p} \doteqdot H(t)$，应用延迟定理，$e^{-\alpha p}/p \doteqdot H(t-\alpha)$. 又 $1/(p+b) \doteqdot e^{-bt}$. 这样，题给的像函数可以看作 $e^{-\alpha p}/p$ 与 $1/(p+b)$ 的乘积，应用卷积定理，即得

$$\begin{aligned}
\frac{e^{-\alpha p}}{p(p+b)} &\doteqdot \int_\alpha^t H(\tau-\alpha)e^{-b(t-\tau)}d\tau \\
&= H(t-\alpha)\int_\alpha^t e^{-b(t-\tau)}d\tau \\
&= H(t-\alpha)\left[\frac{1}{b}e^{-b(t-\tau)}\right]_\alpha^t \\
&= \frac{1}{b}[1-e^{-b(t-\alpha)}]H(t-\alpha).
\end{aligned}$$

*（三）黎曼-梅林反演公式

在不能用以上两种方法求反演时，原则上可利用(6.2.4)求原函数.(6.2.4)正是著名的黎曼-梅林反演公式.这是从像函数求原函数的一般公式.根据拉普拉斯变换存在的条件及其特性，我们进一步知道，在(6.2.4)中，σ 应是大于收敛横标 σ_0 的任意正数.而积分路径是 p 平面上平行于虚轴的一条直线，像函数在这条直线的右半平面上没有奇点.

由于像函数$\bar{f}(p)$是 p 的解析函数，(6.2.4)中的积分可以借助于留数定理而求得.为了应用留数定理，需要将§4.2中的约当引理加以推广.

推广的约当引理 设 C_R 是以 $p=0$ 为圆心，以 R 为半径的圆周在直线 $\mathrm{Re}p=a(>0)$左侧的圆弧.若当 $|p|\to\infty$时，$\bar{f}(p)$在$\frac{\pi}{2}-\delta\leqslant\mathrm{Arg}p\leqslant\frac{3}{2}\pi+\delta$ 中一致趋于零(δ 是小于$\frac{\pi}{2}$的任意正数，则

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\bar{f}(p)e^{pt}dp=0.\ (t>0) \tag{6.3.1}$$

证 如图 6-3 所示，

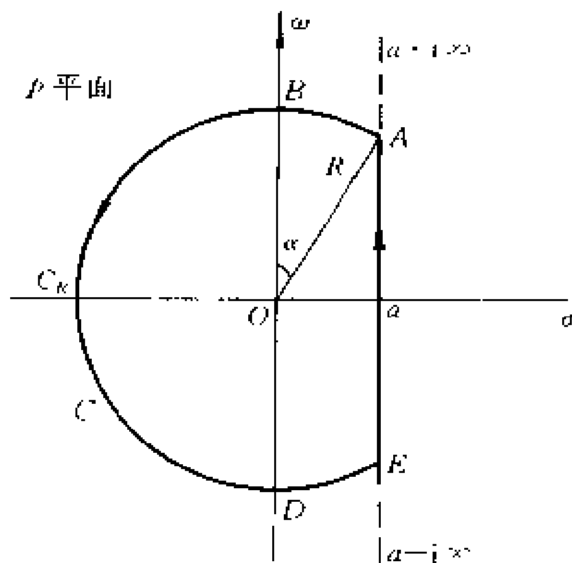


图 6-3

$$\int_{C_R}\bar{f}(p)e^{pt}dp=\int_{\widehat{AB}}\bar{f}(p)e^{pt}dp+\int_{\widehat{BCD}}\bar{f}(p)e^{pt}dp$$

$$+\int_{\widehat{DE}} \bar{f}(p)e^{pt}dp.$$

对右端第二个积分，作变数代换，$p=iz$，这相当于将 p 平面上的左半圆周$\widehat{BCD}$变成子平面上的上半圆周 C'_R，则由 §4.2 的约当引理，有

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\widehat{BCD}} \bar{f}(p)e^{pt}dp = \lim_{R\to\infty} i\int_{C'_R} \bar{f}(iz)e^{izt}dz = 0.$$

现在再来估计$\widehat{AB}$上的积分值. 任给 $\epsilon>0$，取 R 足够大，使 $|\bar{f}(p)|<\epsilon$，则

$$\left|\int_{\widehat{AB}} \bar{f}(p)e^{pt}dp\right| \leqslant \int_{\widehat{AB}} |\bar{f}(p)|\,|e^{tR(\cos\theta+i\sin\theta)}|\,|Re^{i\theta}id\theta|$$

$$= \int_{\widehat{AB}} |\bar{f}(p)|e^{tR\cos\theta}Rd\theta < \epsilon e^{at}R\alpha,$$

其中 a 为常数. 在$\widehat{AB}$上，$R\cos\theta\leqslant a$，当 $R\to\infty$时，$\alpha\to 0$，但 $R\alpha\sim R\sin\alpha=a$，因此上式右边可任意小，而有

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\widehat{AB}} \bar{f}(p)e^{pt}dp = 0.$$

同理

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\widehat{DE}} \bar{f}(p)e^{pt}dp=0.$$

于是证明了(6.3.1).

现在考虑回路积分(仍如图 6-3)

$$\oint_l \bar{f}(p)e^{pt}dp=\int_E^A \bar{f}(p)e^{pt}dp+\int_{C_R} \bar{f}(p)e^{pt}dp$$

于 $R\to\infty$时，左端积分值为$\bar{f}(p)e^{pt}$在直线 $\mathrm{Re}\,p=a$ 左半平面上所有奇点留数和的 $2\pi i$ 倍，右端第一项即为(6.2.4)中的积分，第二项据推广的约当引理而等于零，从而

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \bar{f}(p)e^{pt}dp=\Sigma\mathrm{Res}[\bar{f}(p)e^{pt}]$$

即
$$f(t)=\Sigma\mathrm{Res}[\bar{f}(p)e^{pt}] \tag{6.3.2}$$

式中求和为对$\bar{f}(p)$在直线 $\mathrm{Re}p=a$ 的左半平面上的所有奇点进行. 由于在直线 $\mathrm{Re}p=a$ 的右半平面上无奇点，因而求和亦是对$\bar{f}(p)$在整个 p 平面上的所有奇点进行.

当$\bar{f}(p)$是多值函数时，为了应用留数定理，积分路径需作些修改，以保证积分只在某单值分支上进行，请看下面的例题.

例 5 利用黎曼-梅林反演公式求 $1/\sqrt{p}$ 的原函数.

解 按黎曼-梅林反演公式，

$$\frac{1}{\sqrt{p}} \doteq \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{pt}}{\sqrt{p}}dp.$$

被积函数有唯一的奇点 $p=0$，这是极点型支点，在考虑回路积分时，不能像图 6-3 中那样简单地加上圆弧 C_R，因为在函数的多值区域不能作积分运算及应用留数定理. 为此，先自 $p=0$ 沿负实轴至∞将 p 平面切割开，再作如图 6-4 所示的回路，然后在被积函数的一个单值分支上作积分运算，并应用留数定理. 被积函数在回路所围区域上无奇点，按柯西定理

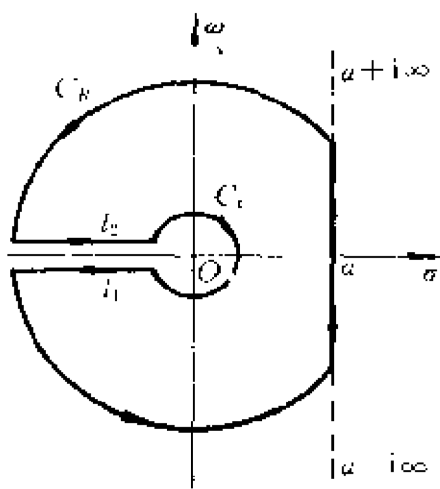


图 5-4

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} = \int_{C_R} + \int_{l_1} + \int_{l_2} + \int_{C_\varepsilon}.$$

其中 l_1 和 l_2 分别沿着割线的下沿和上沿，圆弧 C_R 和圆 C_ε 均以原点为圆心，半径分别为 R 和 ε. 令 $R\to\infty$，由推广的约当引理知，$\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R}=0$，同时不难验证 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon}=0$.

于是

$$f(t)=\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{pt}}{\sqrt{p}}dp=\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{l_1}+\int_{l_2}\right)\frac{e^{pt}}{\sqrt{p}}dp.$$

p 在割线下沿 l_1 和上沿 l_2 上的辐角分别为 $-\pi$ 和 π. 这样，在 l_1 上，$\sqrt{\sigma}=\sqrt{|\sigma|}e^{-i\pi/2}=-i\sqrt{|\sigma|}$；在 l_2 上，$\sqrt{\sigma}=\sqrt{|\sigma|}e^{i\pi/2}=i\sqrt{|\sigma|}$. 于是，

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{0}e^{\sigma t}\frac{1}{-i\sqrt{|\sigma|}}d\sigma+\frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{-\infty}e^{\sigma t}\frac{1}{i\sqrt{|\sigma|}}d\sigma$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}e^{\sigma t}\frac{1}{\sqrt{|\sigma|}}d\sigma.$$

改用 $y=\sqrt{|\sigma|t}$ 作为积分变数，

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{\infty}^{0}e^{-y^2}\frac{\sqrt{t}}{y}\left(-\frac{2y}{t}dy\right).$$

$$=\frac{2}{\pi\sqrt{t}}\int_{0}^{\infty}e^{-y^2}dy=\frac{2}{\pi\sqrt{t}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}.$$

习　　题

1. 把下列像函数反演.

(1) $\bar{y}(p)=\dfrac{6}{(p+1)^4}$，　　(2) $\bar{y}(p)=\dfrac{3p}{p^2-1}$，

(3) $\bar{y}(p)=\dfrac{1}{p-2}$，$\bar{z}(p)=\dfrac{3}{p-2}$，　　(4) $\bar{y}(p)=\dfrac{2}{(p-1)^5}$.

2. 求 $\bar{j}(p)=\dfrac{E}{Lp^2+Rp+\dfrac{1}{c}}$ 的原函数.

3. 求 $\overline{N}_4(p)=\dfrac{N_0C_1C_2C_3}{p(p+C_1)(p+C_2)(p+C_3)}$ 的原函数.

4. 求 $\bar{y}(p)=\lambda\mu\dfrac{p}{(p+C)^4}$ 的原函数.

5. 求 $\bar{j}(p)=\dfrac{E_0\omega}{(R+1/pc)(p^2+\omega^2)}$ 的原函数.

6. 求 $\overline{T}(p)=A\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}\dfrac{1}{p^2+\pi^2a^2/l^2}$ 的原函数.

7. 求 $T(p)=\dfrac{1}{p^2+\omega^2a^2}\bar{g}(p)$ 的原函数，$\bar{g}(p)$ 是某个已知的 $g(t)$ 的像函数.

8. 求 $T(p)=\dfrac{1}{p+\omega^2a^2}\bar{g}(p)$ 的原函数，$\bar{g}(p)$ 是某个已知的 $g(t)$ 的像

函数.

9. 已知像函数 $\bar{y}(p)=e^{-p^2/4}p^{-(\lambda/2+1)}\int e^{p^2/4}p^{(\lambda/2+1)}\left(C_1+\frac{C_2}{p}\right)\mathrm{d}p$，其中 C_1 和 C_2 是两个任意常数. 问 λ 应取怎样的数值才有可能选定 C_1 和 C_2 使原函数 $y(t)$ 为多项式？

10. 已知 $\bar{y}(p)=\frac{(p-1)^\lambda}{p^{\lambda-1}}$. 问 λ 应取怎样的数值，原函数才是多项式？

11. 已知 $\bar{X}(p)=F_0\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\frac{mp^2+k}{D(p)}$，其中 $D(p)=(Mp^2+Rp+K+k)(mp^2+k)-k^2$，而 F_0，ω，m，k，K，M，R 都是正的常数. 试论证 $D(p)$ 没有正的根，也没有纯虚数根. 在什么条件下，原函数 $X(t)$ 不含有稳定振荡的部分而只含有指数式衰减的部分或衰减振荡的部分？

12. 求下列像函数的原函数.

(1) $\bar{f}(p)=\frac{\pi}{2a}\frac{1}{p+a}$，　　(2) $\bar{f}(p)=\frac{\pi}{2p}$，

(3) $\bar{f}(p)=\frac{\pi}{2}\frac{1}{p(p+1)}$，　　(4) $\bar{f}(p)=\frac{\pi}{2p^2}$.

§6.4 应 用 例

综合以上两节，用拉普拉斯变换求解微分方程、积分方程的步骤可归纳为：(1)对方程施行拉普拉斯变换，这变换把初始条件也一并考虑了. (2)从变换后的方程解出像函数. (3)对求出的像函数进行反演，原函数就是原来的方程的解.

例 1 求解交流 RL 电路的方程

$$\begin{cases}L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}j+Rj=E_0\sin\omega t,\\ j(0)=0.\end{cases}$$

解 对方程施行拉普拉斯变换，

$$Lp\bar{j}+R\bar{j}=E_0\frac{\omega}{p^2+\omega^2}.$$

从变换后的方程容易解出

$$\bar{j}=\frac{E_0}{Lp+R}\frac{\omega}{p^2+\omega^2}=\frac{E_0}{L}\frac{1}{p+R/L}\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

最后是进行反演. 由于

$$\frac{\omega}{p^2+\omega^2} \doteq \sin\omega t, \quad \frac{1}{p+R/L} \doteq e^{-(R/L)t},$$

引用卷积定理完成反演,

$$\begin{aligned}
j(t) &= \frac{E_0}{L}\int_0^t e^{-(R/L)(t-\tau)}\sin\omega\tau d\tau \\
&= \frac{E_0}{L}\left\{e^{-(R/L)t}\left[e^{(R/L)\tau}\frac{(R/L)\sin\omega\tau-\omega\cos\omega\tau}{R^2/L^2+\omega^2}\right]_0^t\right\} \\
&= \frac{E_0}{L}\frac{(R/L)\sin\omega t-\omega\cos\omega t}{R^2/L^2+\omega^2}+\frac{E_0}{L}\frac{\omega e^{-(R/L)t}}{R^2/L^2+\omega^2} \\
&= \frac{E_0}{R^2+L^2\omega^2}(R\sin\omega t-\omega L\cos\omega t)+\frac{E_0\omega L}{R^2+L^2\omega^2}e^{-(R/L)t}.
\end{aligned}$$

所得结果的第一部分代表一个稳定的(幅度不变的)振荡,第二部分则是随时间而衰减的.

稳定振荡部分还可以如下改写:

$$\begin{aligned}
&\frac{E_0}{R^2+\omega^2L^2}(R\sin\omega t-\omega L\cos\omega t) \\
&= \frac{E_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\left(\frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin\omega t-\frac{\omega L}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cos\omega t\right) \\
&= \frac{E_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}(\cos\theta\sin\omega t-\sin\theta\cos\omega t) \\
&= \frac{E_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin(\omega t-\theta),
\end{aligned}$$

其中

$$\theta = \arccos\frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}} = \arcsin\frac{\omega L}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}.$$

电工学里常用的复数阻抗法或矢量法只给出这个形式的稳定振荡,没有考虑随时间衰减的部分.

例 2 两个线圈(图 6-5)具有相同的 R,L 和 C. 两线圈之间互感系数为 M. 在初级线路有直流电源,其电压为 E_0. 今接通初级线路中的电钥 K,问次级电路中的电流 j_2 的变化情况如何?

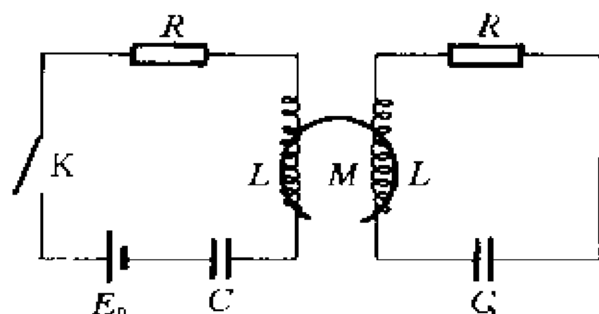


图 6-5

解 先写出电路方程，

$$\begin{cases} L\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}j_1+Rj_1+\dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t j_1\mathrm{d}t+M\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}j_2=E_0, \\ L\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}j_2+Rj_2+\dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t j_2\mathrm{d}t+M\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}j_1=0. \end{cases}$$

还有初始条件 $j_1(0)=0, j_2(0)=0$.

对方程施行拉普拉斯变换，

$$\begin{cases} \left(Lp+R+\dfrac{1}{Cp}\right)\bar{j}_1+Mp\bar{j}_2=\dfrac{E_0}{p}, \\ \left(Lp+R+\dfrac{1}{Cp}\right)\bar{j}_2+Mp\bar{j}_1=0. \end{cases}$$

从变换后的方程解出 $\bar{j}_2$，

$$j_2=\frac{E_0Mp^2}{M^2p^4-\left(Lp^2+Rp+\dfrac{1}{C}\right)^2}.$$

把它分解为分项分式，

$$\bar{j}_2=\frac{E_0}{2}\left[\frac{1}{(L+M)p^2+Rp+\dfrac{1}{C}}-\frac{1}{(L-M)p^2+Rp+\dfrac{1}{C}}\right].$$

应用 §6.3 例 3 进行反演，

$$j_2(t)=C_1\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}\sin\omega_1 t+C_2\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}\sin\omega_2 t,$$

其中

$$\lambda_1=\frac{R}{2(L+M)}, \lambda_2=\frac{R}{2(L-M)},$$

$$\omega_1=\sqrt{\frac{1}{C(L+M)}-\frac{R^2}{4(L+M)^2}},$$

$$\omega_2=\sqrt{\frac{1}{C(L-M)}-\frac{R^2}{4(L-M)^2}},$$

$$C_1=\frac{E_0}{2(L+M)\omega_1},C_2=\frac{-E_0}{2(L-M)\omega_2}.$$

习　题

1. 求解下列常微分方程.

(1) $\dfrac{d^3y}{dt^3}+3\dfrac{d^2y}{dt^2}+3\dfrac{dy}{dt}+y=6e^{-t},y(0)=\dfrac{dy}{dt}\Big|_{t=0}=\dfrac{d^2y}{dt^2}\Big|_{t=0}=0.$

(2) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+9y=30\operatorname{ch}t,y(0)=3,\dfrac{dy}{dt}\Big|_{t=0}=0.$

(3) $\begin{cases}\dfrac{dy}{dt}+2y+2z=10e^{2t},\\ \dfrac{dz}{dt}-2y+z=7e^{2t}.\end{cases}\qquad \begin{cases}y(0)=1,\\ z(0)=3.\end{cases}$

(4) $\dfrac{d^2y}{dt^2}-2\dfrac{dy}{dt}+y=t^2e^t,y(0)=\dfrac{dy}{dt}\Big|_{t=0}=0.$

2. 电压为 E 的直流电源通过电感 L 和电阻 R 对电容 C 充电. 求解充电电流 j 的变化情况.

3. 放射性元素 E_1 蜕变为 E_2，元素 E_1 的原子数 N_1 变化规律为 $\dfrac{dN_1}{dt}=-C_1N_1$. 元素 E_2 又蜕变为 E_3，元素 E_2 的原子数 N_2 变化规律为 $\dfrac{dN_2}{dt}=C_1N_1-C_2N_2$. 元素 E_3 又蜕变为 E_4，元素 E_3 的原子数 N_3 的变化规律为 $\dfrac{dN_3}{dt}=C_2N_2-C_3N_3$. 元素 E_4 是稳定的，不再蜕变，它的原子数 N_4 的变化规律为 $\dfrac{dN_4}{dt}=C_3N_3$. 以上 C_1,C_2,C_3 和 C_4 都是常数. 设开始时只有元素 E_1 的 N_0 个原子，求解 N_4 的变化情况 $N_4(t)$.

4. 设地面有一震动，其速度 $v=H(t)$，地震仪中的感生电流 j 遵守规律

$$\frac{dj}{dt}+2cj+c^2\int_0^t j\,dt=\lambda\frac{dv}{dt}.$$

这电流通过检流计，使检流计发生偏转. 偏转 y 遵守规律

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2c\frac{dy}{dt}+c^2y=\mu j.$$

求解偏转 y 的变化情况 $y(t)$.

5. 求解交流 RC 电路的方程

$$\begin{cases} Rj + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t j\mathrm{d}t = E_0\sin\omega t, \\ j(0)=0. \end{cases}$$

6. 求解 $\dfrac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{\pi^2a^2}{l^2}T=A\sin\omega t, T(0)=0, T'(0)=0.$

7. 求解 $\dfrac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2a^2T=g(t), T(0)=0, T'(0)=0$, $g(t)$ 是某个已知函数.

8. 求解 $\dfrac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2a^2T=g(t), T(0)=0$, $g(t)$ 是某个已知函数.

9. 埃尔米特方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-2t\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\lambda y=0$ 里的 λ 应取怎样的数值才有可能使方程的解为多项式?

10. 拉盖尔方程 $t\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+(1-t)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\lambda y=0$ 的 λ 应取怎样的数值才有可能使方程的解为多项式?

11. 有一种船舶减震器利用的是耦合振动原理. 在水面上颠簸的船体不妨看作是一个阻尼振子,其质量为 M,劲度系数为 K,阻尼系数为 R. 减震器则是附着在船体上的振子,其质量为 m,劲度系数为 k. 因此,船体的位移 $X(t)$ 和减震器的位移 $x(t)$ 的运动方程是

$$\begin{cases} M\dfrac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2}=F_0\sin\omega t-KX-R\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}-k(X-x), \\ m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-k(x-X), \end{cases}$$

其中 $F_0\sin\omega t$ 是使船体颠簸的外力. 在什么条件下,船体的运动不含有稳定振荡而只含有指数式衰减或衰减振荡?

12. 用运算微积方法求出下列积分.

(1) $I(t)=\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos tx}{x^2+a^2}\mathrm{d}x$,　　(2) $I(t)=\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin tx}{x}\mathrm{d}x$,

(3) $I(t)=\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin tx}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x$,　　(4) $I(t)=\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2 tx}{x^2}\mathrm{d}x$.

第二篇　数学物理方程

数学物理方程主要是指物理学的一个分支——数学物理所涉及的偏微分方程，有时也包括相关的积分方程、微分积分方程. 本篇介绍物理学中常见的三类偏微分方程及有关的定解问题和这些问题的几种常用解法.

第七章　数学物理定解问题

质点力学研究质点的位移怎样随着时间而变化，电路问题研究电流或电压怎样随着时间而变化. 总之，是研究某个物理量（位移、电流或电压）怎样随着时间而变化. 这往往导致以时间为自变数的常微分方程（质点的运动方程、电路微分方程）.

但是，在科学技术和生产实际中还常常要求研究空间连续分布的各种物理场的状态和物理过程，例如研究静电场的电场强度或电势在空间中的分布，研究电磁波的电场强度和磁感应强度在空间和时间中的变化情况，研究声场中的声压在空间和时间中的变化情况. 研究半导体扩散工艺中杂质浓度（单位体积里的杂质的量）在硅片中怎样分布并怎样随着时间而变化，等等. 总之，是研究某个物理量（电场强度、电势、磁感应强度、声压、杂质浓度）在空间的某个区域中的分布情况，以及它怎样随着时间而变化. 这些问题中的自变数就不仅仅是时间，而且还有空间坐标.

解决这些问题，当然首先必须掌握所研究的物理量在空间中的分布规律和在时间中的变化规律，这就是物理课程中所研究并

加以论述的**物理规律**，它是解决问题的依据. 物理规律反映同一类物理现象的共同规律，即**普遍性**，亦即**共性**.

可是，同一类物理现象中，各个具体问题又各有其**特殊性**，即**个性**. 物理规律并不反映这种个性.

例如，在半导体扩散工艺中，有"恒定表面浓度扩散"和"限定源扩散". 前者是用携带着充足杂质的氮气包围硅片，使杂质源源不绝地通过硅片表面向硅片内部扩散，而硅片表面的杂质浓度保持一定. 后者是只让硅片表层已有的杂质向硅片深部扩散，但不让新的杂质通过硅片表面进入硅片. 在这两种情况下，虽然杂质按照同样的规律在硅片中扩散，硅片表面状况的不同使得扩散结果也不同.

这样，为了解算具体问题，还必须考虑到所研究的区域的边界处在怎样的状况下，或者，换个说法，必须考虑到研究对象处在怎样的特定"环境"中. 我们知道，"超距作用"是不存在的，物理的联系总是要通过中介的（这在物理学中引起各种场的概念），周围"环境"的影响总是通过边界才传给研究对象，所以周围"环境"的影响体现于边界所处的物理状况，即**边界条件**.

还有，研究问题不能割断历史.

例如，弦乐器的弦的振动有它的"历史". 两根同样的弦，其一在薄刀背敲击下发出的声音比较刺耳，另一在宽锤敲击下或手指的弹拨下发出的声音比较和谐. 虽然这两根弦的振动是按照同样的规律进行的，但由于"历史"不同，即在敲击的那个所谓"初始"时刻的振动情况不一样，后来的振动情况也就不一样.

硅片里的杂质扩散也有它的"历史". 两块硅片、原来的杂质浓度分布不同，在同一工艺条件下进行扩散，扩散的结果也不一样.

这样，为了解算随着时间而发展变化的问题，还必须考虑到研究对象的特定"历史"，即它在早先某个所谓"初始"时刻的状态，即**初始条件**.

边界条件和初始条件反映了具体问题的特定环境和历史，即

问题的特殊性，亦即个性. 在数学上，边界条件和初始条件合称为**定解条件**.

现在，说一说物理规律的数学表示. 物理规律，用数学的语言“翻译”出来，不过是物理量 u 在空间和时间中的变化规律，换句话说，它是物理量 u 在各个地点和各个时刻所取的值之间的联系. 正是这种联系使我们有可能从边界条件和初始条件去推算 u 在任意地点 (x,y,z) 和任意时刻 t 的值 $u(x,y,z,t)$. 而物理的联系总是要通过中介的，它的直接表现只能是 u 在邻近地点和邻近时刻所取的值之间的关系式. 这种邻近地点、邻近时刻之间的关系式往往是偏微分方程（参看下节）. 物理规律用偏微分方程表达出来，叫作**数学物理方程**. 数学物理方程，作为同一类物理现象的共性，跟具体条件无关. 在数学上，数学物理方程本身（不连带定解条件）叫作**泛定方程**.

这样，问题在数学上的完整提法是：在给定的定解条件下，求解数学物理方程. 这叫作数学物理定解问题或简称为定解问题.

§7.1 数学物理方程的导出

本节要导出一些典型的数学物理方程. 这里说的“导出”其实不过是用数学语言把物理规律“翻译”出来罢了. 通过这些典型方程的导出，希望读者学会“翻译”技巧.

数学物理方程是物理规律的数学表述，与定解条件无关，所以在导出过程中用不着考虑定解条件.

物理规律反映的是某个物理量在邻近地点和邻近时刻之间的联系，因此数学物理方程的**导出步骤**如下：首先当然要确定研究哪一个物理量 u. 从所研究的系统中划出一个小部分，根据物理规律分析邻近部分和这个小部分的相互作用（抓住主要的作用，略去不那么重要的因素），这种相互作用在一个短时间段里怎样影响物理量 u. 把这种影响用算式表达出来，经简化整理就是数学物理方

程.

下面导出常见的一些数学物理方程.它们分别属于**三种类型**,即波动方程(一～六,十四)、输运方程(七、八)和稳定场方程(九～十三).这大致对应于数学上的分类,即双曲型、抛物型和椭圆型偏微分方程.我们还将直接给出一些方程而不作推导.

(一) 均匀弦的微小横振动

演奏弦乐器(例如二胡,提琴)的人用弓在弦上来回拉动.弓所接触的只是弦的很小一段,似乎应该只引起这个小段的振动,实际上振动总是传播到整根弦,弦的各处都振动起来.

振动是怎样传播的呢?不妨认为弦是**柔软的**,就是说在放松的条件下,把弦弯成任意的形状,它都保持静止.可是在绷紧以后,相邻小段之间有拉力,这种拉力叫作弦中**张力**.张力沿着弦的切线方向.由于张力作用,一个小段的振动必定带动它的邻段,而邻段又带动它自己的邻段,…….这样,一个小段的振动必然传播到整根弦.这种振动传播现象叫作**波**.

弦乐器所用的弦往往是很轻的,它的重量只有张力的几万分之一.跟张力相比,弦的重量完全可以略去.这样,真实的弦就抽象为"没有重量的"弦.

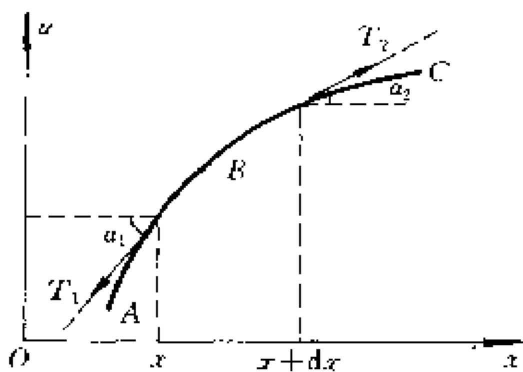


图 7-1

把没有重量的弦绷紧,它在不振动时是一根直线,就取这直线作为 x 轴(图 7-1).把弦上各点的横向位移记作 u.这样,横向位移 u 是 x 和 t 的函数,记作 $u(x,t)$.要推导的就是 u 所遵从的方程.

弦的振动是一种机械运动.机械运动的基本定律是质点力学的 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$.然而弦并不是质点,所以 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$ 对整根弦并不合用.但整根弦可以细分为许多极小的小段,每个小段可以抽象为质点,

就是说，整根弦由许多互相牵连的质点组成，对每个质点即每个小段可以应用 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$.

把弦细分为许多极小的小段. 拿区间 $(x, x+\mathrm{d}x)$ 上的小段 B 为代表加以研究. B 既然没有重量而且是柔软的，它就只受到邻段 A 和 C 的拉力 T_1 和 T_2.

弦的每小段都没有纵向（即 x 方向）的运动，所以作用于 B 的纵向合力应为零.

弦的横向加速度记作 u_{tt}（这是记号 $\partial^2 u/\partial t^2$ 的缩写）. 按照 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$，小段 B 的纵向和横向运动方程分别为

$$\begin{cases} T_2\cos\alpha_2 - T_1\cos\alpha_1 = 0, & (7.1.1) \\ T_2\sin\alpha_2 - T_1\sin\alpha_1 - (\rho\mathrm{d}s)u_{tt} & (7.1.2) \end{cases}$$

式中 ρ 是弦的线密度，即单位长度的质量. $\mathrm{d}s$ 为小段 B 的弧长.

我们将限于考虑小的振动. 这时 α_1、α_2 为小量，如果忽略 α_1^2、α_2^2 以上的高阶小量，则 $\cos\alpha_1 \approx 1-\alpha_1^2/2! + \cdots \approx 1$，$\cos\alpha_2 \approx 1$，$\sin\alpha_1 \approx \alpha_1 - \alpha_1^3/3! + \cdots \approx \alpha_1 \approx \mathrm{tg}\alpha_1$，$\sin\alpha_2 \approx \alpha_2 \approx \mathrm{tg}\alpha_2$，$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}u)^2} = \sqrt{1+(ux)^2}\mathrm{d}x \approx \mathrm{d}x$（其中 $u_x = \partial u/\partial x = \mathrm{tg}\alpha \approx \alpha$），又 $\mathrm{tg}\alpha_1 = u_x|_x$，$\mathrm{tg}\alpha_2 - u_x|_{x+\mathrm{d}x}$. 这样，(7.1.1)和(7.1.2)简化为

$$\begin{cases} T_2 - T_1 = 0, & (7.1.3) \\ T_2 u_x|_{x+\mathrm{d}x} - T_1 u_x|_x = u_{tt}\rho\mathrm{d}x. & (7.1.4) \end{cases}$$

因此 $T_2 = T_1$，弦中张力不随 x 而变，它在整根弦中取同一数值. 另一方面，在振动过程中的每个时刻都有长度 $\mathrm{d}s \approx \mathrm{d}x$，即长度 $\mathrm{d}s$ 不随时间而变，所以作用于 B 段的张力也不随时间而变. 弦中张力既跟 x 无关，又跟 t 无关，只能是常数，记为 T. (7.1.4)成为

$$T(u_x|_{x+\mathrm{d}x} \quad u_x|_x) = \rho u_{tt}\mathrm{d}x.$$

由于 $\mathrm{d}x$ 取得很小，$u_x|_{x+\mathrm{d}x} - u_x|_x = \partial u_x/\partial x\mathrm{d}x = u_{xx}\mathrm{d}x$（其中 u_{xx} 是 $\partial u_x/\partial x = \partial^2 u/\partial x^2$ 的缩写）. 这样，B 段的运动方程就成为

$$\rho u_{tt} - T u_{xx} - 0. \quad (7.1.5)$$

其实，作为代表的 B 段是任选的，所以方程(7.1.5)适用于弦上各处，是弦作微小横振动的运动方程，简称为**弦振动方程**.

对于均匀弦，ρ 是常数，(7.1.5)通常改写为

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=0, \qquad (7.1.6)$$

其中 $a^2=T/\rho$. 以后会看到 a 就是振动在弦上传播的速度.

质点的位移仅是时间 t 的函数，质点的运动方程也就是以时间 t 为自变数的常微分方程. 而弦的位移 u 是时间 t 和坐标 x 两个自变数的函数，弦的运动方程则是以 x 和 t 为自变数的偏微分方程. 它是弦上许多彼此相牵连的质点的运动方程，质点之间的牵连反映在 u_{xx}项.

如果弦在振动过程中还受到外加横向力的作用，每单位长度弦所受横向力为 $F(x,t)$，则应将(7.1.2)修改为 $T_2\sin\alpha_2-T_1\sin\alpha_1+F(x,t)\mathrm{d}x=(\rho\mathrm{d}s)u_{tt}$. 与此相应，(7.1.6)修改为

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t). \qquad (7.1.7)$$

式中 $f(x,t)=F(x,t)/\rho$ 称为力密度，为 t 时刻作用于 x 处单位质量上的横向外力. (7.1.7)称为弦的**受迫振动方程**，而(7.1.6)称为弦的**自由振动方程**.

（二）均匀杆的纵振动

这里要推导的是杆上各点沿杆长方向的纵向位移 $u(x,t)$所遵从的方程.

一根杆，只要其中任一小段有纵向移动，必然使它的邻段压缩或伸长，这邻段的压缩或伸长又使它自己的邻段压缩或伸长，……. 这样，任一小段的纵振动必然传播到整根杆. 这种振动的传播就是波.

把杆细分为许多极小的小段. 拿区间$(x,x+\mathrm{d}x)$上的小段 B（图 7-2)为代表加以研究. 在振动过程中，B 两端的位移分别记作 $u(x,t)$和 $u(x+\mathrm{d}x,t)=u+\mathrm{d}u|_t$. 显然，$B$ 段的伸长即是 $u(x+\mathrm{d}x,t)-u(x,t)=\mathrm{d}u|_t$，而相对伸长则是$[u(x+\mathrm{d}x,t)-u(x,t)]/\mathrm{d}x=\mathrm{d}u|_t/\mathrm{d}x=u_x\mathrm{d}x/\mathrm{d}x=u_x$.

确切些说，在杆作纵振动时，相对伸长 u_x 还随地点而异. 在 B 的两端，相对伸长就不一样，分别是 $u_x|_x$ 和 $u_x|_{x+\mathrm{d}x}$. 如果杆的材料

的杨氏模量是Y,根据胡克定律,B两端的张应力(即单位横截面两方的相互作用力)分别是$Yu_x|_x$和$Yu_x|_{x+dx}$.于是,写出B段的运动方程

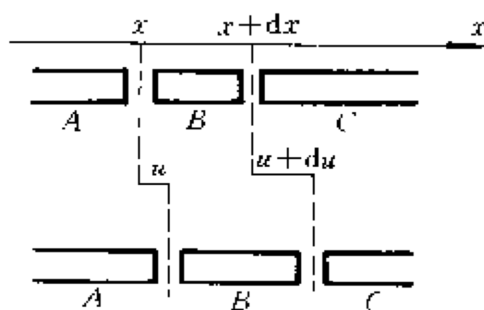


图 7-2

$$\rho(Sdx)u_{tt}=YSu_x|_{x+dx}-YSu_x|_x$$
$$-YS\partial ux/\partial xdx,$$

式中ρ为杆的密度,S为杆的横截面积.用Sdx遍除上式各项,得

$$\rho u_{tt}-Yu_{xx}=0. \qquad (7.1.8)$$

这就是**杆的纵振动方程**.

对于均匀杆,Y和ρ是常数,(7.1.8)可以改写成

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=0, \qquad (7.1.9)$$

其中$a^2=Y/\rho$.这跟弦振动方程(7.1.6)形式上完全相同.a也就是纵振动在杆中传播的速度.

杆的受迫纵振动方程也跟弦的受迫振动方程(7.1.7)完全一样,只是其中$F(x,t)$应是杆的每单位长度上每单位横截面积所受纵向外力.

(三)传输线方程(电报方程)

对于直流电路和低频交流电路,线与线之间的电容与电感可以忽略不计,电路的基尔霍夫定律指出,同一支路中的电流相等.但对于较高频率的交变电流(不过,这里也不考虑频率很高以致显著地向外发射电磁波的情况),电路中导线的自感和电容的效应不能忽略,因而同一支路中的电流未必相等.

考虑双线或同轴传输线(图 7-3a).电容和电感是沿着传输线连续分布的,为了运用熟知的分立元件的电路定律,把传输线划分为许多小段,取x与$x+dx$之间的一段作为代表加以研究.把每单位长度的传输线所具有的导线电阻、线间电漏、电容和电感分别记作R,G,C和L.我们所研究的小段可以看作是分立的电阻Rdx和自感Ldx串接在线路中,分立的电容Cdx和漏电电阻$(1/G)dx$跨接在两线之间.画出等效电路如图 7-3b.这个小段两端的电流并不相等,这是由于两线之间的漏电流$(Gdx)v$,还有两线之间的电容Cdx上的充放电.这个小段两端的电压也不相等,这是由于导线电阻Rdx上的电

压降$(R\mathrm{d}x)j$和两线之间的电感$L\mathrm{d}x$上的感生电动势$(L\mathrm{d}x)\partial j/\partial t$，这样，

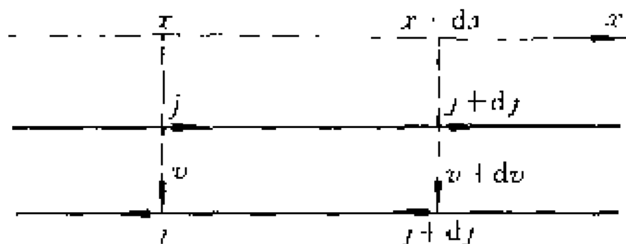


图 7-3a

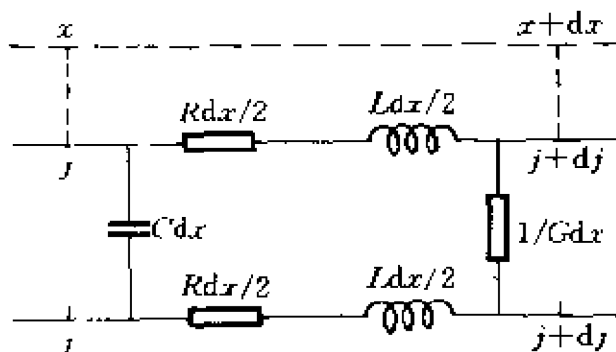


图 7-3b

$$\begin{cases}\mathrm{d}j=-Gv\mathrm{d}x-\dfrac{\partial}{\partial t}(Cv\mathrm{d}x),\\ \mathrm{d}v=-Rj\mathrm{d}x-Lj_t\mathrm{d}x.\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}j_x=-Gv-Cv_t,\\ v_x=-Rj+Lj_t.\end{cases} \tag{7.1.10}$$

亦即

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}j+\left(G+C\dfrac{\partial}{\partial t}\right)v=0,\\ \left(R+L\dfrac{\partial}{\partial t}\right)j+\dfrac{\partial}{\partial x}v=0.\end{cases} \tag{7.1.11}$$

以$\partial/\partial x$作用于(7.1.11)的第一式，以$G+C\partial/\partial t$作用于第二式，两者相减就消去v，得$j(x,t)$的方程

$$LCj_{tt}-j_{xx}+(LG+RC)j_t+RGj=0. \tag{7.1.12}$$

以$R+L\partial/\partial t$作用于(7.1.11)的第一式，以$\partial/\partial x$作用于其第二式，两者相减就消去j，得$v(x,t)$的方程

$$LCv_{tt}-v_{xx}+(LG+RC)v_t+RGv=0. \tag{7.1.13}$$

导线电阻R和线间电漏G很小的传输线叫作理想传输线. 对于理想传

输线，(7.1.12)和(7.1.13)可以简化为

$$j_{tt}-a^2 j_{xx}=0 \text{ 和 } u_{tt}-a^2 v_{xx}=0, \tag{7.1.14}$$

其中 $a^2=1/LC$(参看§14.2例3，$1/LC$—光速平方)。

方程(7.1.12)和(7.1.13)以及它们的特例(7.1.14)叫作**传输线方程(电报方程)**。传输线方程(7.1.14)跟弦振动方程(7.1.6)、杆纵振动方程(7.1.9)又是完全一样，尽管它们的物理本质根本不同。

(四) 均匀薄膜的微小横振动

把柔软的均匀薄膜张紧，静止薄膜的平面记作 xy 平面。研究膜在垂直于 xy 平面方向的微小横振动，膜上各点的横向位移记为 $u(x,y,t)$。"膜是柔软的"，这是说，在膜的切平面的法线方向不存在剪应力。如果在膜上划一直线(参看图7-4a，图面垂直于所划直线)，直线两方的膜必互相牵引。每单位长直线两方的牵引力叫作张力。与弦的微小横振动相类似，膜上张力也是常数，记为 T。直线上任一点的张力 T 在该点的切平面内，其方向垂直于直线。记张力 T 的"仰角"(张力方向与 xy 平面的夹角)为 α(见图7-4a)，对于小振动，$\alpha\approx 0$，所以，张力 T 的横向分量 $=T\sin\alpha\approx T\operatorname{tg}\alpha=T\partial u/\partial n$，$n$ 指的是张力 T 在 xy 平面上的投影方向，即直线在 xy 平面的投影的法线方向。

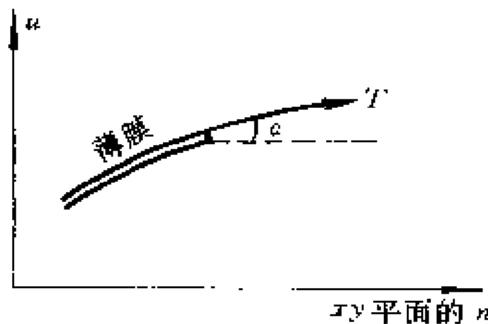


图 7-4a

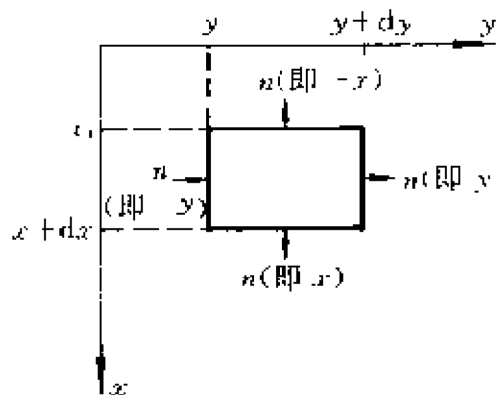


图 7-4b

把薄膜细分为许多极小的小块。拿 x 与 $x+dx$ 之间，y 与 $y+dy$ 之间的小块(图7-4b)为代表加以研究。

先看 x 和 $x+dx$ 这两边。在这两边，作为代表的小块膜受邻近部分的张力作用，张力的横向分力分别是 $-T\partial u/\partial x|_x$ 和 $T\partial u/\partial x|_{x+dx}$。这样，这小块膜在 x 和 $x+dx$ 两边所受横向作用力是

$$[Tu_x|_{x+dx}-Tu_x|_x]dy=Tu_{xx}dxdy.$$

同理，在 y 和 $y+dy$ 两边所受横向作用力是

$$Tu_{yy}dxdy.$$

用 ρ 表示单位面积的薄膜的质量，可以写出这小块膜的横向运动方程

$$\rho u_{tt}dxdy=Tu_{xx}dxdy+Tu_{yy}dxdy,$$

即

$$\rho u_{tt}-T(u_{xx}+u_{yy})=0. \tag{7.1.15}$$

这就是**薄膜微小振动方程**. $\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$ 叫作**二维拉普拉斯算符**，通常记作 Δ，或者为了强调二维而记作 Δ_2. 这样，(7.1.15)可以记作

$$\rho u_{tt}-T\Delta_2 u=0.$$

对于均匀薄膜，面密度 ρ 是常数. (7.1.15)可以改写成

$$u_{tt}-a^2\Delta_2 u=0. \tag{7.1.16}$$

式中常数 $a^2=T/\rho$，a 为膜上振动的传播速度.

如果薄膜上有横向外力作用，记单位面积上的横向外力为 $F(x,y,t)$，重复上述步骤，则得**薄膜的受迫振动方程**

$$u_{tt}-a^2\Delta_2 u=f(x,y,t). \tag{7.1.17}$$

其中 $f(x,y,t)=F(x,y,t)/\rho$ 为作用于单位质量上的横向外力.

（五）流体力学与声学方程

流体力学中研究的物理量是流体的流动速度 $\boldsymbol{v}$、压强 p 和密度 ρ. 对于声波在空气中的传播，相应地要研究空气质点在平衡位置附近的振动速度 $\boldsymbol{v}$、空气的压强 p 和密度 ρ. 物体的振动引起周围空气压强和密度的变化，使空气中形成疏密相间的状态，这种疏密相间状态向周围的传播形成声波.

记空气处于平衡状态时的压强和密度分别为 p_0，ρ_0，并把声波中的空气密度相对变化量 $(\rho-\rho_0)/\rho_0$ 记为 s，

$$s=\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0},\quad \rho=\rho_0(1+s).$$

由于空气的振动速度 $|\boldsymbol{v}|\ll$声速，$\boldsymbol{v}$ 是很小的量，且假定：声振动不过分剧烈，s 也是很小的量. 声振动时空气可以看作没有粘性的理想流体，声波的传播过程可当作绝热过程，借助于理想流体的欧勒型运动方程、连续性方程和绝热过程的物态方程，在不受外力的情

况下，略去 $\boldsymbol{v}$ 和 s 的二次以上的小量，可以导出声波方程（其推导本书从略）

$$s_{tt}-a^2\Delta_3 s=0. \qquad (a^2=\frac{\gamma p_0}{\rho_0}) \tag{7.1.18}$$

其中 γ 为空气定压比热与定容比热的比值.

假设在声波传播过程中，空气是无旋的，即 $\nabla\times\boldsymbol{v}=0$. 由于对任何存在二阶偏导数的标量函数 $\varphi(x,y,z)$，有 $\nabla\times\nabla\varphi=0$. 总可以找到一个标量函数 $u(x,y,z,t)$ 满足 $\boldsymbol{v}(x,y,z,t)=-\nabla u(x,y,z,t)$，$u$ 称为速度势. 进而可得 u 遵从的声波方程为

$$u_{tt}-a^2\Delta_3 u=0, \quad (a^2=\frac{\gamma p_0}{\rho_0}) \tag{7.1.19}$$

跟方程(7.1.18)形式相同.

（六）电磁波方程

利用电磁场的麦克斯韦方程组的微分形式，可导出真空中的**电磁波方程**. 在国际单位制下，方程为

$$\boldsymbol{E}_{tt}-a^2\Delta_3\boldsymbol{E}=0, \tag{7.1.20}$$

和

$$\boldsymbol{H}_{tt}-a^2\Delta_3\boldsymbol{H}=0. \tag{7.1.21}$$

其中 $a^2=1/\mu_0\varepsilon_0=$ 光速平方，ε_0、μ_0 分别为真空中介电常数和导磁率，$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 为真空中电场强度和磁场强度，均为矢量方程.

（七）扩散方程

由于浓度（单位体积中的分子数或质量）的不均匀，物质从浓度大的地方向浓度小的地方转移，这种现象叫作**扩散**. 扩散现象广泛存在于气体、液体和固体中.

制做半导体器件就常用扩散法. 把含有所需杂质的物质涂敷在硅片表面，或者用携带杂质的气体包围着硅片，把硅片放在扩散炉里，杂质就向硅片里面扩散，扩散运动的方向基本上是垂直于硅片表面而指向硅片深处. 这种只沿某一方向进行的扩散叫作**一维的扩散**.

在扩散问题中研究的是浓度 u 在空间中的分布和在时间中的

变化 $u(x,y,z,t)$.

扩散运动的起源是浓度的不均匀.浓度不均匀的程度可用**浓度梯度** ∇u 表示.扩散运动的强弱可用**扩散流强度** q,即单位时间里通过单位横截面积的原子或分子数或质量表示.

根据实验结果,扩散现象遵循的**扩散定律即斐克定律**是

$$\boldsymbol{q}=-D\,\nabla u. \tag{7.1.22}$$

或写成分量形式

$$q_x=-D\frac{\partial u}{\partial x},\quad q_y=-D\frac{\partial u}{\partial y},\quad q_z=-D\frac{\partial u}{\partial z} \tag{7.1.23}$$

负号表示扩散转移的方向(浓度减小的方向)跟浓度梯度(浓度增大的方向)相反.比例系数 D 叫作**扩散系数**.不同物质的扩散系数各不一样.同一物质在不同温度的扩散系数也不同,一般说,温度越高,扩散系数越大.

现在应用扩散定律和粒子数守恒定律(或质量守恒定律)导出三维扩散方程.为此,把空间加以细分,拿 x 与 $x+dx$ 之间,y 与 $y+dy$ 之间,z 与 $z+dz$ 之间的小平行六面体(图 7-5)为代表加以研究.这个平行六面体里的浓度变化取决于穿过它的表面的扩散流.

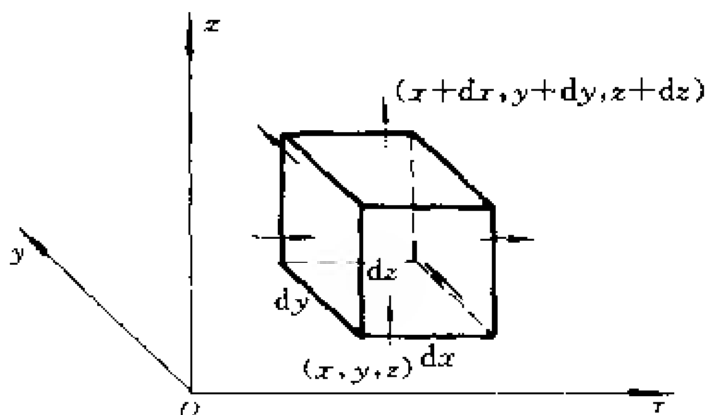


图 7-5

先考察单位时间内 x 方向的扩散流.在左表面,流量 $q_x|_x dydz$ 是流入平行六面体的;在右表面,流量 $q_x|_{x+dx}dydz$ 则是流出的,由于 dx 取得很小,$q_x|_{x+dx}-q_x|_x=\frac{\partial q_x}{\partial x}dx$.出入相抵,

单位时间内 x 方向净流入流量 $=-(q_x|_{x+dx}-q_x|_x)dydz$

$$= -\frac{\partial q_x}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

考察 y 方向、z 方向的扩散流，同理可得

$$单位时间内\ y\ 方向净流入流量 = \frac{\partial}{\partial y}\left(D\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$单位时间内\ z\ 方向净流入流量 = \frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial u}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

根据粒子数（或质量）守恒定律，如果平行六面体中没有源和汇（其它物质能转化成这种物质的粒子称为源、这种物质的粒子转化成其它物质称为汇），则平行六面体中单位时间内增加的粒子数＝单位时间内净流入的粒子数，

即

$$\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

其中 $\partial u/\partial t$ 为浓度的时间增长率，即单位时间内平行六面体中单位体积内增加的粒子数. 于是得**三维扩散方程**

$$u_t - \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] = 0. \tag{7.1.24}$$

如果扩散系数在空间中是均匀的，则(7.1.24)简化为

$$u_t - a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0,\ 即\ u_t - a^2\Delta u = 0\ (a^2 = D). \tag{7.1.25}$$

如果仅在 x 方向有扩散，则一维扩散方程为

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0 \qquad (a^2 = D). \tag{7.1.26}$$

现在说一说有源或汇的扩散问题. 考察两种情况：

(1) 扩散源的强度（单位时间内单位体积中产生的粒子数）为 $F(x,y,z,t)$，与浓度 u 无关. 这时，扩散方程(7.1.24)、(7.1.25)应修改为

$$u_t - \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] = F(x,y,z,t). \tag{7.1.27}$$

$$u_t - a^2\Delta u = F(x,y,z,t) \qquad (a^2 = D). \tag{7.1.28}$$

（2）扩散源的强度与浓度 u 成正比.

例如[235]U 原子核的链式反应使中子数增殖，中子浓度增殖的时间变化率为 b^2u，比例系数 $b^2>0$，即与中子浓度 u 成正比，这是有源的情况. 一维和三维扩散方程应分别修改为

$$\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}-b^2u=0, \\ u_t-a^2\Delta u-b^2u=0. \end{cases} \tag{7.1.29}$$

再如放射性衰变现象中，原有粒子的浓度按指数律减少，$u=u_0\mathrm{e}^{-\lambda t}$，$\lambda$ 为衰变常数. 经过 τ（半衰期）时刻后，浓度减为原来的一半，即 $u_0/2=u_0\mathrm{e}^{-\lambda\tau}$，所以 $\lambda=(\ln 2)/\tau$，于是 $u=u_0\mathrm{e}^{-(\ln 2)t/\tau}$. 对 t 求导数，则得单纯由蜕变所导致的浓度减少的时间变化率为 $-\lambda u=-u(\ln 2)/\tau$，也跟原有粒子浓度成正比，但比例系数 $-\lambda=-(\ln 2)/\tau<0$. 相应地，一维和三维扩散方程应分别修改为

$$\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}+\dfrac{\ln^2}{\tau}u=0, \\ u_t-a^2\Delta u+\dfrac{\ln 2}{\tau}u=0. \end{cases} \tag{7.1.30}$$

（八）热传导方程

由于温度不均匀，热量从温度高的地方向温度低的地方转移，这种现象叫作**热传导**.

在热传导问题中研究的是温度在空间中的分布和在时间中的变化 $u(x,y,z,t)$.

热传导的起源是温度的不均匀. 温度不均匀的程度可用**温度梯度** ∇u 表示. 热传导的强弱可用**热流强度** $\boldsymbol{q}$，即单位时间通过单位横截面积的热量表示.

根据实验结果，热传导现象所遵循的**热传导定律**，即**傅里叶定律**是

$$\boldsymbol{q}=-k\ \nabla u,$$

比例系数 k 叫作**热传导系数**. 不同物质的热传导系数各不一样.

仿照扩散问题，应用热传导定律和能量守恒定律，可导出没有

热源和热汇的一维和三维热传导方程

$$c\rho u_t-\frac{\partial}{\partial x}(ku_x)=0, \tag{7.1.31}$$

$$c\rho u_t-\left[\frac{\partial}{\partial x}(ku_x)+\frac{\partial}{\partial y}(ku_y)+\frac{\partial}{\partial z}(ku_z)\right]=0. \tag{7.1.32}$$

其中 c 是比热，ρ 是密度. 对于均匀物体，k、c、ρ 是常数，上式成为

$$u_t-a^2u_{xx}=0, \quad \left(a^2=\frac{k}{c\rho}\right) \tag{7.1.33}$$

$$u_t-a^2\Delta_3 u=0, \tag{7.1.34}$$

跟扩散方程(7.1.26)、(7.1.25)形式上完全一样.

如果在物体中存在热源，热源强度(单位时间在单位体积中产生的热量)为 $F(x,y,z,t)$，热传导方程(7.1.31)、(7.1.32)应修改为

$$c\rho u_t-\frac{\partial}{\partial x}(ku_x)=F(x,t), \tag{7.1.35}$$

$$c\rho u_t-\left[\frac{\partial}{\partial x}(ku_x)+\frac{\partial}{\partial y}(ku_y)-\frac{\partial}{\partial z}(ku_z)\right]=F(x,y,z,t). \tag{7.1.36}$$

对于均匀物体，(7.1.35)和(7.1.36)可化为

$$u_t-a^2u_{xx}=f(x,t) \quad \left(a^2=\frac{k}{c\rho}\right) \tag{7.1.37}$$

$$u_t-a^2\Delta_3 u=f(x,y,z,t), \tag{7.1.38}$$

其中 $f(x,t)=F(x,t)/c\rho$，$f(x,y,z,t)=F(x,y,z,t)/c\rho$，分别为一维和三维情况下，按单位热容量计算的热源强度.

(九) 稳定浓度分布

如果扩散源强度 $F(x,y,z)$ 不随时间变化，扩散运动持续进行下去，最终将达到稳定状态，空间中各点的浓度不再随时间变化，即 $u_t=0$，于是，(7.1.27)成为 $\nabla\cdot(D\nabla u)=-F(x,y,z)$，如 D 是常数，有

$$D\Delta u=-F \tag{7.1.39}$$

这是**泊松方程**. 如没有源，则是**拉普拉斯方程**

$$\Delta u=0. \tag{7.1.40}$$

(7.1.39)和(7.1.40)是浓度的稳定分布方程.

(十) 稳定温度分布

如果热源强度 $F(x,y,z)$ 不随时间变化，热传导持续进行下去，最终将达到稳定状态，空间中各点的温度不再随时间变化，即 $u_t=0$，于是，(7.1.36)成为 $\nabla\cdot(k\nabla u)=-F(x,y,z)$，如 k 是常数，

$$k\Delta u=-F \tag{7.1.41}$$

也是**泊松方程**，如没有热源，也简化为**拉普拉斯方程**

$$\Delta u=0 \tag{7.1.42}$$

(7.1.41)和(7.1.42)是温度的稳定分布方程.

(十一) 静电场

从电磁学知道，静电场是有源无旋场，电场线不闭合，始于正电荷，终于负电荷. 反映静电场基本性质的是高斯定理和电场强度的无旋性. 据此，我们来导出描述静电场的数学物理方程.

用国际单位制，高斯定理可以表述为：穿过闭合曲面 Σ 向外的电通量等于闭合曲面 Σ 所围空间 T 中的电量的 $1/\varepsilon_0$ 倍(ε_0 为真空介电常数)，即

$$\oint_{\Sigma}\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_T\rho \mathrm{d}V.$$

把左边的曲面积分改为体积积分，

$$\int_T\nabla\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}V=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_T\rho \mathrm{d}V.$$

上式对任意的空间 T 都成立，这只能是由于两边的被积函数相等，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho. \tag{7.1.43}$$

此外，静电场的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 是无旋的，即

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=0 \tag{7.1.44}$$

(7.1.43)和(7.1.44)是静电场的基本微分方程. 它们也可从微分形式的麦克斯韦方程组得到. 事实上，对真空中的静电场，$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}=0$，代入麦克斯韦方程 $\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$ 和 $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{B}_t$ 即得.

由(7.1.43),存在电势函数 $V(x,y,z)$,使

$$\boldsymbol{E}=-\nabla V. \tag{7.1.45}$$

将(7.1.45)代入(7.1.43)得

$$\Delta V=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho. \tag{7.1.46}$$

这就是静电场的电势函数 V 应当满足的**静电场方程**,它是**泊松方程**. $\boldsymbol{E}$ 是矢量,而 V 是标量,求解方程(7.1.46)比较方便.

如果在静电场的某一区域里没有电荷,即 $\rho=0$,则电势函数 V 的静电场方程(7.1.46)在该区域上简化为**拉普拉斯方程**

$$\Delta V=0 \tag{7.1.47}$$

*(十二) 稳恒电流场

这里研究的是具有稳恒电流的导电媒质中的电场. 根据电荷守恒定律,导电媒质中电荷满足连续性方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0 \tag{7.1.48}$$

其中 $\rho(x,y,z,t)$ 为自由电荷体密度,$\boldsymbol{j}(x,y,z,t)$ 为传导电流的体密度. (7.1.48)对任意变化的电流场均成立. 在稳恒电流情况下,$\boldsymbol{j}(x,y,z)$ 不随时间 t 变化,电荷密度 $\rho(x,y,z)$ 也不随时间变化,因而 $\partial\rho/\partial t=0$,于是

$$\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0, \tag{7.1.49}$$

称为稳恒电流的连续性方程. 对于稳恒电流场,从任一闭合面流出的电流总是等于流入的电流,因此可用闭合的电流线描述导电媒质的稳恒电流场. 电流的散度 $\nabla\cdot\boldsymbol{j}$ 代表电流源的强度. 对稳恒电流场,$\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0$,即表示没有电流源.

由于电流是稳恒的,产生的磁场也是稳恒的. 据麦克斯韦方程组中的第二方程,有

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{B}_t=0, \tag{7.1.50}$$

可知稳恒电流场的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 是无旋的. 而 $\boldsymbol{E}$ 和稳恒电流也遵从欧姆定律

$$\boldsymbol{j}=\sigma\boldsymbol{E}. \tag{7.1.51}$$

因为 $\boldsymbol{E}$ 是无旋的，一定存在一个标量函数 $\varphi(x,y,z)$，满足

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi, \tag{7.1.52}$$

$\varphi(x,y,z)$是稳恒电流场的电势函数. 将(7.1.51)、(7.1.52)代入(7.1.49)，有

$$\nabla\cdot(\sigma\boldsymbol{E})=-\nabla\cdot(\sigma\,\nabla\varphi)=0. \tag{7.1.53}$$

对于均匀导电媒质，σ＝常数，(7.1.53)可简化成

$$\Delta\varphi=0. \tag{7.1.54}$$

这是**拉普拉斯方程**，它是在电源外部的均匀导电媒质中，稳恒电流势 $\varphi(x,y,z)$所满足的方程.

但是，在一些问题中，人们的注意力集中在某个局部空间. 例如，在大地电测中，关心的是大地中的稳恒电流分布和稳恒电流势的分布，对大地外面的电源和线路并不关心. 这时，往往把电极 A 看作稳恒电流的源，把电极 B 看作稳恒电流的汇(见图 7-6). 于是(7.1.49)应代之以

$$\nabla\cdot\boldsymbol{j}=f, \tag{7.1.55}$$

其中 $f(x,y,z)$是电流源强度的分布. 而式(7.1.54)也应代之以**泊松方程**

$$\Delta\varphi=-f \tag{7.1.56}$$

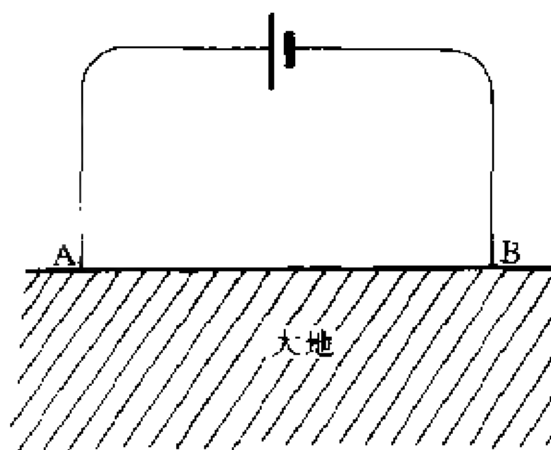


图 7-6

*(十三) 不可压缩流体的无旋稳恒流动

流体有源或汇时的连续性方程是

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=F(x,y,z,t), \tag{7.1.57}$$

其中 $F(x,y,z,t)$ 为源或汇的强度，即单位时间内单位体积中产生的流体的质量，$F>0$ 为源，$F<0$ 为汇. 对于不可压缩的流体，密度 $\rho=$ 常数，因此，$\partial\rho/\partial t=0$，又 $\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\rho=\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}$，从而连续性方程简化成

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=f(x,y,z,t) \tag{7.1.58}$$

其中 $f(x,y,z,t)=F(x,y,z,t)/\rho$，为按流体的单位质量计算的源或汇的强度.

若流体流动是无旋的，$\nabla\times\boldsymbol{v}=0$，则一定存在标量函数 $\varphi(x,y,z,t)$，使得

$$\boldsymbol{v}=-\nabla\varphi, \tag{7.1.59}$$

φ 称为速度势. 将(7.1.59)代入(7.1.58)，得

$$\Delta\varphi=-f(x,y,z,t) \tag{7.1.60}$$

这就是不可压缩流体无旋流动时速度势满足的泊松方程.

如果流动是稳恒的，密度 $\rho(x,y,z)$ 和源或汇的强度 $F(x,y,z)$ 都与时间无关，从而 $f(x,y,z)$，$v(x,y,z)$，$\varphi(x,y,z)$ 也与 t 无关. 方程(7.1.60)简化成

$$\Delta\varphi(x,y,z)=-f(x,y,z). \tag{7.1.61}$$

如果在某一区域里没有流体的源或汇，则(7.1.61)在该区域上进一步简化为拉普拉斯方程

$$\Delta\varphi(x,y,z)=0. \tag{7.1.62}$$

（十四）杆的微小横振动

杆在横向变形时，存在切应力. 在切应力的作用下，杆作横向振动. 对于微小的横振动，杆的横振动方程是(本书不推导)

$$u_{tt}-a^2u_{xxxx}=0, \quad (a^2=YI/\rho) \tag{7.1.63}$$

其中 Y 是杨氏模量，I 是转动惯量，ρ 是密度. 方程中出现关于空间坐标 x 的四阶偏导数，而前面导出的各种方程对空间坐标的偏导数都是二阶的.

对于杆的受迫横振动，如果单位长度杆上外加横向力是 $F(x,t)$，则相应

的方程为

$$u_{tt}-a^2u_{xxxx}=F(x,t)/\rho=f(x,t), \tag{7.1.64}$$

其中 $f(x,t)$ 为作用于杆的单位质量上的力密度.

（十五）量子力学的薛定谔方程

以上各例引自古典物理学. 作为另一类例子，这里提一下量子力学的薛定谔方程. 微观粒子在势场 $V(x,y,z,t)$ 中，波函数 u（为符号前后一贯起见，这里用 u 表示波函数，而在量子力学中通常是用 ψ）、满足**薛定谔方程**

$$i\hbar^2u_t=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta u+Vu. \tag{7.1.65}$$

这里系数中出现虚数单位 i，而前面所讲方程的系数全是实数. 势能 V 不显含时间 t 的情况叫作定态. 对于定态，方程(7.1.65)简化为**定态薛定谔方程**

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta u+Vu=Eu. \tag{7.1.66}$$

习　　题

1. 拿图 7-7 的 B 段弦作为代表，推导弦振动方程.

2. 用均质材料制做细圆锥杆，试推导它的纵振动方程.

3. 弦在阻尼介质中振动，单位长度的弦所受阻力 $F=-Ru_t$（比例常数 R 叫作阻力系数），试推导弦在这阻尼介质中的振动方程.

4. 试推导一维和三维的热传导方程(7.1.41)和(7.1.42).

5. 混凝土浇灌后逐渐放出“水化热”，放热速率正比于当时尚储存着的水化热密度 Q，即 $\frac{dQ}{dt}=-\beta Q$. 试推导浇灌后的混凝土内的热传导方程.

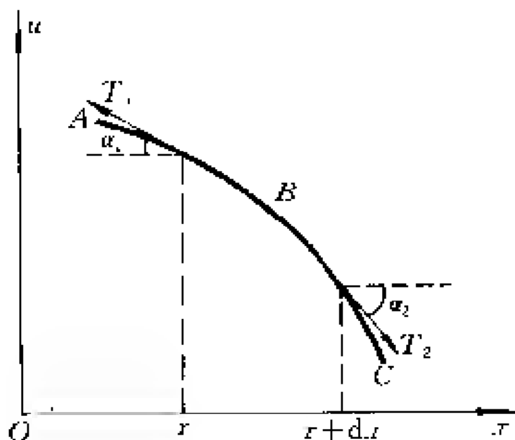


图 7-7

6. 均质导线电阻率为 r，通有均匀分布的直流电，电流密度为 j. 试推导导线内的热传导方程.

7. 长为 l 柔软均质轻绳，一端固定在以匀速 ω 转动的竖直轴上. 由于惯性离心力的作用，这弦的平衡位置应是水平线. 试推导此弦相对于水平线的

横振动方程.

8. 长为 l 的柔软均质重绳，上端固定在以匀速 ω 转动的竖直轴上. 由于重力作用，绳的平衡位置应是竖直线. 试推导此绳相对于竖直线的横振动方程.

9. 推导均匀圆杆的扭转振动方程. 杆半径 R，切变模量为 N.

10. 推导水槽中的重力波方程. 水槽长 l，截面为矩形，两端由刚性平面封闭. 槽中的水在平衡时深度为 h.

§7.2 定解条件

数学物理方程是同一类现象的共同规律，反映的是该类现象的普遍性的一面. 但是就物理现象而言，各个具体问题还有其特殊性的一面，这就要研究对象所处的特定"环境"和"历史"，即边界条件和初始条件.

(一) 初始条件

对于随着时间而发展变化的问题，必须考虑到研究对象的特定"历史"，就是说，追溯到早先某个所谓"初始"时刻的状态，即初始条件.

对于输运过程(扩散、热传导)，初始状态指的是所研究的物理量 u 的初始分布(初始浓度分布、初始温度分布). 因此，初始条件是

$$u(x,y,z,t)\big|_{t=0}=\varphi(x,y,z), \qquad (7.2.1)$$

其中 $\varphi(x,y,z)$ 是已知函数.

对于振动过程(弦、杆、膜的振动，较高频率交变电流沿传输线传播，声振动和声波，电磁波)，只给出初始"位移"

$$u(x,y,z,t)\big|_{t=0}=\varphi(x,y,z) \qquad (7.2.2)$$

是不够的，还需要给出初始"速度"

$$u_t(x,y,z,t)\big|_{t=0}=\psi(x,y,z). \qquad (7.2.3)$$

从数学的角度看，就时间 t 这个自变数而言，输运过程的泛定

方程只出现一阶的导数 u_t，是一阶微分方程，所以只需一个初始条件(7.2.1)；振动过程的泛定方程则出现二阶的导数 u_{tt}，是二阶微分方程，所以需要两个初始条件(7.2.2)和(7.2.3).

注意：初始条件应当给出**整个系统**的初始状态，而不仅是系统中**个别地点**的初始状态. 例如，一根长为 l 而两端固定的弦，用手把它的中点朝横向拨开距离 h(图 7-8)，然后放手任其振动. 所谓初始时刻就是放手的那个瞬间，初始条件就是放手那个瞬间的弦的位移和速度. 初始速度显然为零，即 $u_t(x,t)|_{t=0}=0$；至于初始位移如写成

$$u(x,t)|_{t=0}=h,$$

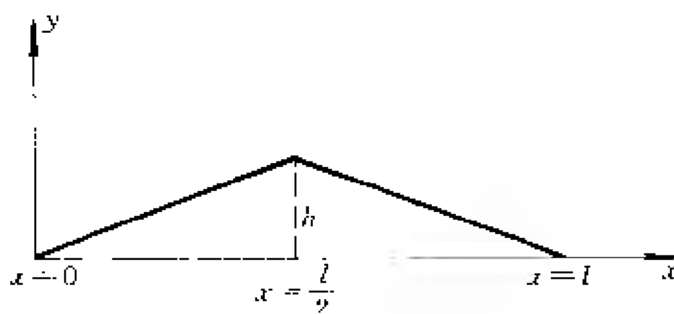


图 7-8

那就错了，因为 h 只是弦的中点的初始位移，其他各点的位移并不是 h. 考虑到弦的初始形状是由两段直线衔接而成，初始位移应是 x 的分段函数

$$u(x,t)|_{t=0}=\begin{cases}(2h/l)x & (\text{在}[0,l/2]\text{上}),\\(2h/l)(l-x) & (\text{在}[l/2,l]\text{上}).\end{cases}$$

最后，谈一谈"没有初始条件的问题". 没有外源，只是由于初始时刻的不均匀分布引起的输运叫作**自由输运**. 在自由输运过程中，不均匀的分布逐渐均匀化. 随着分布的逐渐均匀化，输运过程也逐步衰减. 因此，一定时间以后，自由输运就衰减到可以认为已消失. 没有外加力，只是由于初始偏离或初始速度引起的振动叫作**自由振动**. 上节推导自由振动方程时没有计及**阻尼作用**(该节习题 3 要求计及阻尼作用)，而实际上阻尼是不可避免的，自由振动不

可避免逐渐衰减，因此，一定时间以后，自由振动就衰减到可以认为已消失．这样，在周期性外源引起的输运问题或周期性外力作用下的振动问题中，经过很多周期之后，初始条件引起的自由输运或自由振动衰减到可以认为已消失，这时的输运或振动完全是周期性外源或外力所引起．处理这类问题时，我们完全可以忽略初始条件的影响，这类问题也就叫作**没有初始条件的问题**．

稳定场问题(静电场，稳定浓度分布，稳定温度分布，无旋稳恒电流场，无旋稳恒流动)根本就不存在初始条件问题，这是无需多说的．

(二) 边界条件

研究具体的物理系统，还必须考虑研究对象所处的特定“环境”，而周围环境的影响常体现为边界上的物理状况，即边界条件．

常见的线性边界条件，数学上分为三类：第一类边界条件，直接规定了所研究的物理量在边界上的数值；第二类边界条件，规定了所研究的物理量在边界外法线方向上方向导数的数值；第三类边界条件，规定了所研究的物理量及其外法向导数的线性组合在边界上的数值．即

第一类 $$u(x,y,z,t)_{\text{边界}x_0,y_0,z_0}=f(x_0,y_0,z_0,t), \qquad (7.2.4)$$

第二类 $$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\text{边界}x_0,y_0,z_0}=f(x_0,y_0,z_0,t), \qquad (7.2.5)$$

第三类 $$(u+Hu_n)|_{\text{边界}x_0,y_0,z_0}=f(x_0,y_0,z_0,t). \qquad (7.2.6)$$

其中 f 是时间 t 的已知函数，H 为常数系数．

(1) 第一类边界条件

例如弦的两端 $x=0$ 和 $x=l$ 固定而振动，则边界条件是 $u|_{x=0}=0$，$u|_{x=l}=0$．又如细杆导热问题，若杆的一个端点 $x=a$ 的温度 u 按已知的规律 $f(t)$ 变化，则该端点的边界条件是

$$u(x,t)|_{x=a}=f(t). \qquad (7.2.7)$$

特别是如果该端点处于恒温 u_0，则边界条件成为

$$u(x,t)|_{x=a}=u_0.$$

再如，半导体扩散工艺的“恒定表面浓度扩散”中，硅片周围环境是携带着充足杂质的氮气，杂质源源不断通过硅片表面向内部扩散，而硅片表面的杂质浓度保持一定. 硅片的边界就是它的表面 $x=0$ 和 $x=l$，边界上的物理状况则是杂质浓度 u 保持为常数 N_0，

$$u(x,t)|_{x=0}=N_0,\quad u(x,t)|_{x=l}=N_0.$$

(2) 第二类边界条件

例如作纵振动的杆的某个端点 $x=a$ 受有沿端点外法线方向的外力 $f(t)$，根据胡克定律，该端点的张应力 $Yu_n|_{x=a}$ 与外力的关系为

$$(Yu_n)|_{x=a}S=f(t) \tag{7.2.8}$$

其中 S 为杆的横截面积. 如该端点是自由的，$f(t)=0$，则 $u_n|_{x=a}=0$. 当 $f(t)\neq 0$ 时，对 $x=l$ 端点，$\partial u/\partial x|_{x=l}=f(t)/YS$，对 $x=0$ 端点，$\partial u/\partial x|_{x=0}=-f(t)/YS$.

又如细杆导热问题，若杆的某个端点 $x=a$ 有热流 $f(t)$ 沿该端点外法线方向流出，则根据热传导定律，边界条件为 $-ku_n|_{x=a}=f(t)$；如热流 $f(t)$ 是流入，则边界条件为 $-ku_n|_{x=a}=-f(t)$. 如果端点绝热，则 $u_n|_{x=a}=0$.

(3) 第三类边界条件

例如，细杆导热问题，如果杆的某一端点 $x=a$ 自由冷却，即杆端和周围介质(温度 θ)按照牛顿冷却定律交换热量，从“自由冷却”这个条件既不能推断在该端点的温度 u 的值，也不能推断在该端点的温度梯度 u_x 的值. 但是，自由冷却规定了从杆端流出的热流强度($-ku_n$)与温度差($u|_{x=a}-\theta$)之间的关系

$$-ku_n|_{x=a}=h(u|_{x=a}-\theta),$$

即
$$(u+Hu_n)|_{x=a}=\theta\quad (H=k/h).$$

对于两端 $x=0$ 和 $x=l$ 都是自由冷却的杆(图 7-9)，在 $x=l$ 的一端，外法向 n 就是 x 方向，所以自由冷却条件可表为

$$(u+Hu_x)|_{x=l}=\theta;$$

在 $x=0$ 的一端，外法向 n 是 $-x$ 方向，所以自由冷却条件可表为

$$(u-Hu_x)|_{x=0}=\theta.$$

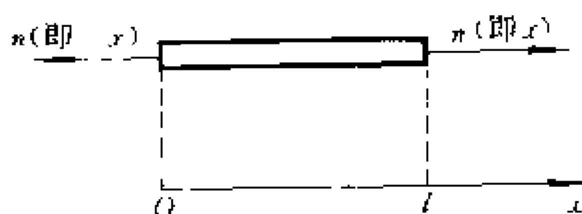


图 7-9

值得**注意**的是，如果杆端跟周围介质的热交换系数 h 远远大于杆的热传导系数 k，则 $H=k/h\approx 0$，上述边界条件就退化为第一类边界条件 $u|_{x=0}=\theta$ 和 $u|_{x=l}=\theta$.

又如，作纵振动的杆，如果某一端点 $x=a$ 既非固定也非自由，而是通过弹性体连结到固定物上，从"弹性连结"既不能推断在该端点的位移 u 的值，也不能推断在该端点的相对伸长 u_x 的值. 但是，弹性连结规定了杆中弹性力(YSu_n)等于弹性连结物中的弹性恢复力($-ku$，k 是劲度系数)，

$$\left(u+\frac{YS}{k}u_n\right)\Big|_{x=a}=0.$$

边界条件(7.2.4)～(7.2.8)都是**线性的**. 其中 $f\equiv 0$ 的边界条件又叫作**齐次的**.

线性的边界条件并不限于以上三类. 例如，杆的一端挂有重物而作纵振动(图 7-10). 杆端所受的力有重力(Mg)和惯性力($-Mu_{tt}$)，所以

$$YSu_x|_{x=l}=Mg-Mu_{tt}|_{x=l}.$$

在这个边界条件中不仅出现对 x 的偏导数 u_x，还出现了对 t 的偏导数 u_{tt}.

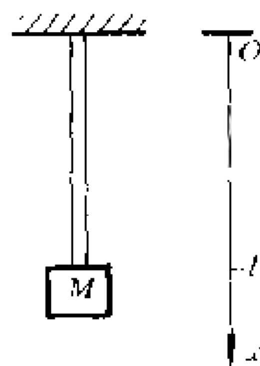


图 7-10

有的边界条件甚至是**非线性的**. 例如，在热传导问题中，如果物体表面按斯蒂芬定律(温度四次方定律)向周围辐射热量，那就出现非线性边界条件了.

上节导出的泛定方程，除杆的横振动方程以外，在边界上的每一点都只要一个边界条件. 以弦振动为例，就 x 这个自变数而言，弦振动方程中出现二阶导数 u_{xx}，是二阶微分方程，要求两个条件，即两端点各一个边界条件. 杆的横振动方程中出现四阶偏导数 u_{xxxx}，所以每个端点就要两个边界条件. 例

如，端点 $x=a$ 被固定（图 7-11a），那么这端点的位移始终为零，而且杆在该处的斜率亦为零，即

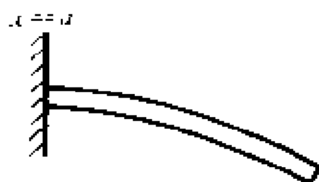


图 7-11a

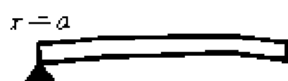


图 7-11b



图 7-11c

$$u|_{x=a}=0,\quad u_x|_{x=a}=0.\quad (\text{固定端})$$

又如端点 $x=a$ 是被支承的（图 7-11b），那么这端点的位移始终为零，而该处截面上挠矩为零，即

$$u|_{x=a}=0,\quad u_{xx}|_{x=a}=0.\ (\text{支承端})$$

再如端点 $x=a$ 是自由的（图 7-11c），那么该处截面上不仅挠矩为零，而且切力也为零，即

$$u_{xx}|_{x=a}=0,\quad u_{xxx}|_{x=a}=0.\quad (\text{自由端})$$

边界条件只要**确切说明**边界上的物理状况就行. 例如，长为 l 的均匀杆，一端固定于车壁上，另一端自由，车子以速度 v_0 进行而忽然停止（图 7-12）. 边界条件应当怎样写呢？这个问题本来很简单，$x=0$ 端固定而 $x=l$ 端自由可用“$u|_{x=0}=0$”和“$u_x|_{x=l}=0$”确切地表示. 但有些初学者却“不满足”于这个简单的说明，而想到什么 $x=0$ 端在突然停止时有某个冲力，在振动过程中还不断受到车壁的作用力，$x=l$ 端在突然停止时有向前冲出去的惯性，但又苦于不知道固定端所受的作用力和自由端的运动情况，因而觉得很难写出边界条件. 其实这是对边界条件要求过高了，因为只有解出定解问题之后才好计算固定端所受作用力和自由端的运动情况. 既然“$u|_{x=0}=0$”和“$u_x|_{x=l}=0$”能够确切说明 $x=0$ 端固定而 $x=l$ 端自由，这两个简单的式子就是所要的边界

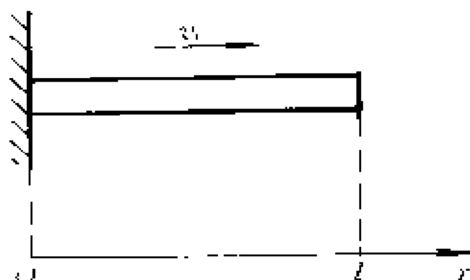


图 7-12

条件.

注意**区分**边界条件与泛定方程中的外力或外源. 例如, 一维扩散问题, 如果在某一端点 $x=a$ 有粒子流注入, 流的强度 q 是已知的, 这注入的粒子流是一种边界条件, 即 $Du_x|_{x=a}=q$. 可是, 有些初学者认为既然注入的粒子流是外源, 应在泛定方程中列入外源:

$$u_t-a^2u_{xx}=q/c\rho.$$

这就错了, 因为这个方程意味着处处有粒子流注入, 其强度处处是 q.

最后, 谈一谈"没有边界条件的问题". 物理系统总是有限的, 必然有边界, 要求边界条件. 拿弦振动问题为例, 弦总是有限长的, 有两个端点. 但如果着重研究靠近一端的那段弦, 那么, 在不太长的时间里, 另一端的影响还没来得及传到, 不妨认为另一端并不存在, 或者说另一端在无限远, 当然就无需提出另一端的边界条件了. 这样, 有限长的真实的弦抽象成**半无界的**弦. 如果着重研究不靠近两端的那段弦, 那么, 在不太长的时间里, 两端的影响都没来得及传到, 不妨认为两端都不存在, 或者说两端都在无限远, 当然就无需提出边界条件了. 这样, 有限长的真实的弦抽象成**无界的**弦.

又如, 半导体工艺的金扩散比较快, 在 1100℃ 左右, 金原子用几分钟时间就扩散到整个硅片. 硼和磷的扩散则慢得多, 在差不多同样的温度, 硼或磷原子用了几十分钟以至两、三小时只能进入硅片几微米. 用扩散法制做超导材料 Nb_3Sn 线, 锡原子进入铌芯也只有几微米. 硅片或铌芯的厚度 l 很小, 不到一毫米, 可是, 硼、磷、锡原子的扩散深度更小. 如果着重研究边界 $x=0$ 附近的慢扩散, 在不太长的时间(其实是几小时甚至几十小时)里, 硼、磷、锡原子来不及达到另一边界 $x=l$, 根本不受另一边界 $x=l$ 的影响, 我们不妨认为不存在另一边界 $x=l$, 认为硅片或铌芯从 $x=0$ 延伸到无限远(其实还不到一毫米), 构成**半无界的**问题.

(三) 衔接条件

有时，由于一些原因，在所研究的区域里出现**跃变点**，泛定方程在跃变点失去意义. 例如弦振动问题，如果有横向力 $F(t)$ 集中地作用于 $x=x_0$ 点，这点就成为弦的折点(图 7-13). 在折点 x_0，斜率 u_x 的左极限值 $u_x(x_0-0,t)$ 跟右极限值 $u_x(x_0+0,t)$ 不同，即 u_x 有跃变，因而 u_{xx} 不存在，弦振动方程 $u_{tt}-a^2u_{xx}=0$ 在这一点没有意义. 这样，我们只能把 $x<x_0$ 和 $x>x_0$ 两段分别考虑，在各段上，弦振动方程是有意义的. 但是，既然这不过是同一根弦的两段，它们并不是各自独立振动的. 反映在数学上，不可能在两段上分别列出适定的定解问题. 事实上，对于 $x<x_0$ 的一段，无法列出 $x=x_0$ 处的边界条件；对于 $x>x_0$ 的一段同样无法列出 $x=x_0$ 处的边界条件. 两段应该作为一个整体来研究，因为两段的振动是互相关连的. 首先，$x=x_0$ 虽是折点，但仍是连续的，即

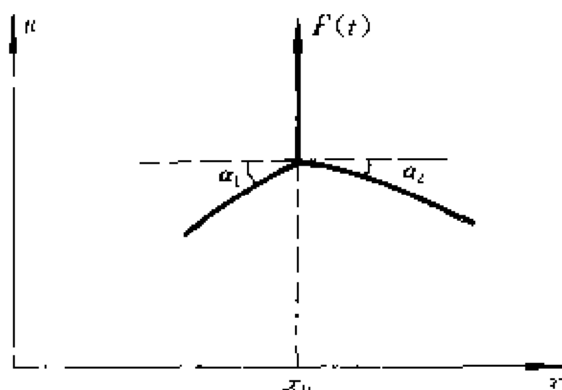


图 7-13

$$u(x_0-0,t)=u(x_0+0,t). \qquad (7.2.9)$$

其次，在折点，力 $F(t)$ 应同张力平衡，即

$$F(t)-T\sin\alpha_1-T\sin\alpha_2=0.$$

由于 $\sin\alpha_1\approx\mathrm{tg}\alpha_1=u_x(x_0-0,t)$，$\sin\alpha_2\approx\mathrm{tg}\alpha_2=-u_x(x_0+0,t)$，上式即

$$Tu_x(x_0+0,t)-Tu_x(x_0-0,t)=-F(t). \qquad (7.2.10)$$

条件(7.2.9)和(7.2.10)合称为**衔接条件**. 考虑到衔接条件，两段弦作为一个整体，其振动问题是适定的，其含义见§7.4(四).

严格说来，跃变点也是科学的抽象. 实际上存在的是一个小的过渡区，在过渡区上，某些物理量的空间变化率很大，但毕竟还是连续变动的. 只要过渡区很小，不妨认为过渡集中于一个点即跃变点，这就简化了问题，不必详细考察过渡区上的变化情况.

习　题

1. 长为 l 的均匀弦，两端 $x=0$ 和 $x=l$ 固定，弦中张力为 T_0. 在 $x=h$ 点，以横向力 F_0 拉弦，达到稳定后放手任其自由振动. 写出初始条件.

2. 长为 l 的均匀杆两端受拉力 F_0 作用而纵振动. 写出边界条件.

3. 长为 l 的均匀杆，两端有恒定热流进入，其强度为 q_0，写出这个热传导问题的边界条件.

4. 半径为 R 而表面熏黑的金属长圆柱，受到阳光照射. 阳光方向垂直于柱轴，热流强度为 M. 写出这个圆柱的热传导问题的边界条件.

5. 习题 1 是否需要衔接条件?

6. 一根杆由横截面相同的两段连接而成. 两段的材料不同，杨氏模量分别是 Y^{I} 和 Y^{II}，密度分别是 ρ^{I} 和 ρ^{II}. 试写出衔接条件.

7. 写出静电场中电介质表面的衔接条件.

8. 一根导热杆由两段构成，两段热传导系数、比热、密度分别是 k^{I}，c^{I}，ρ^{I} 和 k^{II}，c^{II}，ρ^{II}. 初始温度是 u_0，然后保持两端温度为零. 试把这个热传导问题表为定解问题.

§7.3　数学物理方程的分类

（一）线性二阶偏微分方程

§7.1 的泛定方程，除杆的横振动方程以外，都是二阶的. 本书将着重讨论二阶偏微分方程.

把所有自变数（包括空间坐标和时间坐标）依次记作 $x_1, x_2, \cdots x_n$. 二阶偏微分方程如果可以表为

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu + f = 0, \qquad (7.3.1)$$

其中 a_{ij}, b_i, c, f 只是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的函数，就叫作**线性的**方程. §7.1 导出的泛定方程以及许多常见的偏微分方程都是线性的.

如 $f\equiv 0$，则方程称为**齐次的**，否则叫**非齐次的**. 从 §7.1 导出的各方程来看，大凡有源（外力、热源、电荷等）的方程为非齐次，没

有源的方程为齐次. 不过,这也不是绝对的. 例如,扩散方程(7.1.29)、(7.1.30)分别是有源和有汇的,但仍然是齐次方程.

如果泛定方程和定解条件都是线性的,可以把定解问题的解看作几个部分的线性叠加,只要这些部分各自所满足的泛定方程和定解条件的相应的线性叠加正好是原来的泛定方程和定解条件就行. 这叫作**叠加原理**. 本书将经常引用叠加原理.

以下研究方程分类,并把各类方程分别化为标准形式. 这样,今后就只需讨论标准形式的方程的解法.

(二) 两个自变数的方程分类

先研究两个自变数 x 和 y 的二阶线性偏微分方程

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu+f=0, \quad (7.3.2)$$

其中 $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c, f$ 只是 x 和 y 的函数. 在以下的讨论中,我们假定 $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c, f$ 都是实数.

试作自变数的代换

$$\begin{cases} x=x(\xi,\eta), \\ y=y(\xi,\eta), \end{cases} \text{即} \begin{cases} \xi=\xi(x,y), \\ \eta=\eta(x,y), \end{cases} \quad (7.3.3)$$

代换的雅可俾式 $\dfrac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}\neq 0$. 通过代换(7.3.3),$u(x,y)$成为 ξ 和 η 的函数. 这里,还应把方程(7.3.2)改用新的自变数 ξ 和 η 表出. 为此,作如下计算:

$$\begin{cases} u_x=u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x, \\ u_y=u_\xi\xi_y+u_\eta\eta_y; \end{cases} \quad (7.3.4)$$

$$\begin{cases} u_{xx}=(u_{\xi\xi}\xi_x^2+u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+u_\xi\xi_{xx})+(u_{\eta\xi}\eta_x\xi_x+u_{\eta\eta}\eta_x^2+u_\eta\eta_{xx}) \\ \quad =u_{\xi\xi}\xi_x^2+2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+u_{\eta\eta}\eta_x^2+u_\xi\xi_{xx}+u_\eta\eta_{xx}, \\ u_{xy}=(u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y+u_{\xi\eta}\xi_x\eta_y+u_\xi\xi_{xy})+(u_{\eta\xi}\eta_x\xi_y+u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y+u_\eta\eta_{xy}) \\ \quad =u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y+u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y+u_\xi\xi_{xy}+u_\eta\eta_{xy}, \\ u_{yy}=(u_{\xi\xi}\xi_y^2+u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y+u_\xi\xi_{yy})+(u_{\eta\xi}\eta_y\xi_y+u_{\eta\eta}\eta_y^2+u_\eta\eta_{yy}) \\ \quad =u_{\xi\xi}\xi_y^2+2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y+u_{\eta\eta}\eta_y^2+u_\xi\xi_{yy}+u_\eta\eta_{yy}. \end{cases}$$

(7.3.5)

把(7.3.4)和(7.3.5)代入(7.3.2)得到采用新自变数 ξ 和 η 后的方程

$$A_{11}u_{\xi\xi}+2A_{12}u_{\xi\eta}+A_{22}u_{\eta\eta}+B_1u_\xi+B_2u_\eta+Cu+F=0, \tag{7.3.6}$$

其中系数

$$\begin{cases}A_{11}=a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2,\\ A_{12}=a_{11}\xi_x\eta_x+a_{12}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+a_{22}\xi_y\eta_y,\\ A_{22}=a_{11}\eta_x^2+2a_{12}\eta_x\eta_y+a_{22}\eta_y^2,\\ B_1=a_{11}\xi_{xx}+2a_{12}\xi_{xy}+a_{22}\xi_{yy}+b_1\xi_x+b_2\xi_y,\\ B_2=a_{11}\eta_{xx}+2a_{12}\eta_{xy}+a_{22}\eta_{yy}+b_1\eta_x+b_2\eta_y,\\ C=c\\ F=f.\end{cases} \tag{7.3.7}$$

方程(7.3.6)仍然是线性的.

从(7.3.7)可以看到,如果取一阶偏微分方程

$$a_{11}z_x^2+2a_{12}z_xz_y+a_{22}z_y^2=0 \tag{7.3.8}$$

的一个特解作为新自变数 ξ,则 $a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2=0$,从而 $A_{11}=0$. 同理,如果(7.3.8)的另一特解作为新自变数 η,则 $A_{22}=0$. 这样,方程(7.3.6)就得以化简.

一阶偏微分方程(7.3.8)的求解可转化为常微分方程的求解. 事实上,(7.3.8)可改写为

$$a_{11}\left(-\frac{z_x}{z_y}\right)^2-2a_{12}\left(-\frac{z_x}{z_y}\right)+a_{22}=0. \tag{7.3.9}$$

如果把

$$z(x,y)=\text{常数} \tag{7.3.10}$$

当作定义隐函数 $y(x)$ 的方程,则 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=-z_x/z_y$,从而(7.3.9)正是

$$a_{11}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2-2a_{12}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a_{22}=0. \tag{7.3.11}$$

常微分方程(7.3.11)叫作二阶线性偏微分方程(7.3.2)的特

征方程，特征方程的一般积分"$\xi(x,y)=$常数"和"$\eta(x,y)=$常数"叫作**特征线**.

特征方程(7.3.11)可分为两个方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{a_{12}+\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}},\qquad(7.3.12)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{a_{12}-\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}.\qquad(7.3.13)$$

通常根据(7.3.12)和(7.3.13)的根号下的符号划分偏微分方程(7.3.2)的类型：

$$\begin{cases}a_{12}^2-a_{11}a_{22}>0, & \textbf{双曲型};\\ a_{12}^2-a_{11}a_{22}=0, & \textbf{抛物型};\\ a_{12}^2-a_{11}a_{22}<0, & \textbf{椭圆型}.\end{cases}$$

方程(7.3.2)的系数 a_{11}，a_{12}和 a_{22}可以是 x 和 y 的函数，所以，一个方程在自变数的某一区域上属于某一类型，在另一区域上可能属于另一类型. 用(7.3.7)容易验证

$$A_{12}^2-A_{11}A_{22}=(a_{12}^2-a_{11}a_{22})(\xi_x\eta_y-\xi_y\eta_x)^2,$$

这是说，作自变数的代换时，**方程的类型不变**.

(1) 双曲型方程

(7.3.12)和(7.3.13)各给出一族实的特征线

$$\xi(x,y)=\text{常数},\ \eta(x,y)=\text{常数}.$$

取 $\xi=\xi(x,y)$和 $\eta=\eta(x,y)$作为新的自变数，则 $A_{11}=0$，$A_{22}=0$. 从而自变数代换后的方程(7.3.6)成为

$$u_{\xi\eta}=-\frac{1}{2A_{12}}[B_1u_\xi+B_2u_\eta+Cu+F].\qquad(7.3.14)$$

或者，再作自变数代换

$$\begin{cases}\xi=\alpha+\beta,\\ \eta=\alpha-\beta,\end{cases}\quad\text{即}\begin{cases}\alpha=\dfrac{1}{2}(\xi+\eta),\\ \beta=\dfrac{1}{2}(\xi-\eta),\end{cases}$$

则方程(7.3.14)化为

$$u_{\alpha\alpha}-u_{\beta\beta}=-\frac{1}{A_{12}}[(B_1+B_2)u_\alpha+(B_1-B_2)u_\beta+2Cu+2F]. \tag{7.3.15}$$

(7.3.14)或(7.3.15)是**双曲型**方程的**标准形式**.一维波动方程,如弦振动方程(7.1.6)和(7.1.7),杆的纵振动方程(7.1.9),电报方程(7.1.13)和(7.1.14)等,都是标准形式的双曲型方程.

(2) 抛物型方程

由于 $a_{12}^2-a_{11}a_{22}=0$,特征方程(7.3.12)和(7.3.13)变成同一个方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}}{a_{11}}. \tag{7.3.16}$$

它们只能给出一族实的特征线

$$\xi(x,y)=常数,$$

则 $\xi=\xi(x,y)$ 是(7.3.9)的解.取 ξ 作为新的自变数,取与 $\xi(x,y)$ 无关的函数 $\eta=\eta(x,y)$ 作为另一新的自变数.采用新自变数后,将 $\xi_x/\xi_y=-dy/dx=-a_{12}/a_{11}$ 和 $a_{12}=\pm\sqrt{a_{11}\cdot a_{22}}$ 代入(7.3.7),得方程的前三个系数为

$$A_{11}=\xi_y^2\left[a_{11}\left(\frac{\xi x}{\xi y}\right)^2+2a_{12}\frac{\xi_x}{\xi_y}+a_{22}\right]=-\frac{\xi_y^2}{a_{11}}[a_{12}^2-a_{11}\cdot a_{22}]=0$$

$$A_{12}=\xi_y\left[a_{11}\left(\frac{\xi_x}{\xi_y}\right)\eta_x+a_{12}\left(\frac{\xi_x}{\xi_y}\eta_y+\eta_x\right)+a_{22}\eta_y\right]=-\frac{\xi_y\eta_y}{a_{11}}[a_{12}^2-a_{11}\cdot a_{22}]=0$$

$$A_{22}=\eta_y^2\left[a_{11}\left(\frac{\eta_x}{\eta_y}\right)^2+2a_{12}\frac{\eta_x}{\eta_y}+a_{22}\right]=\eta_y^2\left[\sqrt{a_{11}}\left(\frac{\eta_x}{\eta_y}\right)\pm\sqrt{a_{22}}\right]^2.$$

可见,只要取 $\eta(x,y)$ 使 $\eta x/\eta y\neq\pm\sqrt{a_{22}}/\sqrt{a_{11}}$,即 η 不满足特征方程(7.3.16),则 $A_{22}\neq0$,从而自变数代换后的方程(7.3.6)成为

$$u_{\eta\eta}=-\frac{1}{A_{22}}[B_1u_\xi+B_2u_\eta+Cu+F]. \tag{7.3.17}$$

这是**抛物型**方程的**标准形式**.一维输运方程,如扩散方程(7.1.34),

热传导方程(7.1.41)等,都是标准形式的抛物型方程.

(3) 椭圆型方程

(7.3.12)和(7.3.13)各给出一族复数的特征线

$$\xi(x,y)=\text{常数}, \quad \eta(x,y)=\text{常数},$$

而且 $\eta=\xi^*$. 取 $\xi=\xi(x,y)$和 $\eta=\eta(x,y)=\xi^*(x,y)$作为新的自变数,则 $A_{11}=0, A_{22}=0$,从而自变数代换后的方程(7.3.6)成为

$$u_{\xi\eta}=-\frac{1}{2A_{12}}[B_1u_\xi+B_2u_\eta+Cu+F]. \tag{7.3.18}$$

这方程不同于(7.3.14),因为这里的 ξ 和 η 是复变数.一般说来,这是不方便的.通常又作代换

$$\begin{cases}\xi=\alpha+i\beta,\\ \eta=\alpha-i\beta,\end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases}\alpha=\text{Re}\xi=\dfrac{1}{2}(\xi+\eta),\\ \beta=\text{Im}\xi=\dfrac{1}{2i}(\xi-\eta).\end{cases}$$

则方程(7.3.18)化为

$$u_{\alpha\alpha}+u_{\beta\beta}=-\frac{1}{A_{12}}[(B_1+B_2)u_\alpha+i(B_2-B_1)u_\beta+2Cu+F]. \tag{7.3.19}$$

(7.3.18)或(7.3.19)是**椭圆型方程的标准形式**.平面稳定场方程,如稳定浓度分布(7.1.47),稳定温度分布(7.1.49),静电场方程(7.1.54)和(7.1.55),无旋稳恒电流场方程(7.1.65)和(7.1.66),无旋稳恒流动方程(7.1.71)和(7.1.72)等,在二维情况下,都是(7.3.19)形式的椭圆型方程.

(三) 多自变数的方程分类

考察线性方程(7.3.1)

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}u_{x_ix_j}+\sum_{i=1}^{n}b_iu_{x_i}+cu+f=0. \tag{7.3.1}$$

试作自变数的代换

$$\xi_k=\xi_k(x_1,x_2,\cdots,x_n), k=1,2,\cdots,n. \tag{7.3.20}$$

代换的雅可俾式 $\dfrac{\partial(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\neq 0$.通过代换(7.3.20),$u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$成为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 的函数.这里,还应把方程(7.3.1)改用新的自变数 ξ_k 表出.为

此，作如下计算：

$$
\begin{cases}
u_{x_i} = \sum_{k=1}^{n} u_{\xi_k} (\xi_k)_{x_i}, \\
u_{x_i x_j} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} u_{\xi_k \xi_l} (\xi_k)_{x_i} (\xi_l)_{x_j} + \sum_{k=1}^{n} u_{\xi_k} (\xi_k)_{x_i x_j}
\end{cases}
\tag{7.3.21}
$$

把(7.3.21)代入(7.3.1)得到采用新自变数 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 后的方程

$$
\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} A_{kl} u_{\xi_k \xi_l} + \sum_{k=1}^{n} B_k u_{\xi_k} + Cu + F = 0, \tag{7.3.22}
$$

其中系数

$$
\begin{cases}
A_{kl} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} (\xi_k)_{x_i} (\xi_l)_{x_j}, \\
B_k = \sum_{i=1}^{n} b_i (\xi_k)_{x_i} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} (\xi_k)_{x_i x_j}.
\end{cases}
\tag{7.3.23}
$$

方程(7.3.22)仍然是线性的.

值得注意的是，二阶偏导数的系数变换公式恰恰是二次齐次式

$$
\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i y_j \tag{7.3.24}
$$

的系数在自变数代换($y_1, y_2, \cdots, y_n \to \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$)

$$
y_i = \sum_{k=1}^{n} (\xi_k)_{x_i} \eta_k \tag{7.3.25}
$$

下的变换公式. 二次齐次式(7.3.24)可以用适当的代换而对角化，在相应的代换下，方程(7.3.22)也就“对角化”，即

$$
\begin{cases}
A_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \\
A_{ii} = +1, -1 \text{ 或 } 0.
\end{cases}
\tag{7.3.26}
$$

二次齐次式对角化时有一条**惯性定律**，从而 A_{ii} 之为正或为负或为零的个数亦各为一定. 据此，划分偏微分方程的类型：

$$
\begin{cases}
\text{所有 } n \text{ 个 } A_{ii} \neq 0\text{，且全为同号，} & \textbf{椭圆型；} \\
\text{有某些 } A_{ii} = 0\text{，} & \textbf{抛物型；} \\
\text{所有 } n \text{ 个 } A_{ii} \neq 0\text{，其中 } n-1 \text{ 个同号，另一反号，} & \textbf{双曲型；} \\
\text{所有 } n \text{ 个 } A_{ii} \neq 0\text{，两种符号都不止一个，} & \textbf{超双曲型.}
\end{cases}
$$

相应的标准形式是

$$
\begin{cases}
\sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} + \sum_{i=1}^{n} B_i u_{x_i} + Cu + F = 0, & \text{(椭圆型)} \\
\sum_{i=1}^{n-m} u_{x_i x_i} + \sum_{i=1}^{n} B_i u_{x_i} + Cu + F = 0, & \text{(抛物型)} \\
u_{x_1 x_1} - \sum_{i=2}^{n} u_{x_i x_i} + \sum_{i=1}^{n} B_i u_{x_i} + Cu + F = 0, & \text{(双曲型)} \\
\sum_{i=1}^{m} u_{x_i x_i} - \sum_{i=m+1}^{n} u_{x_i x_i} + \sum_{i=1}^{n} B_i u_{x_i} + Cu + F = 0. & \text{(超双曲型)}
\end{cases}
$$

§7.1 导出的泛定方程之中，波动方程（弦、杆、膜的振动方程，电报方程，声振动和声波方程，电磁波方程）是双曲型的，输运方程（扩散方程，热传导方程）是抛物型的，稳定场方程（静电场，稳定浓度分布，稳定温度分布，无旋稳恒电流场，无旋稳恒流动）是椭圆型的. 量子力学的薛定谔方程（7.1.65）虽是抛物型的，但由于系数中有 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$，所以并不代表输运过程，而是代表波动（量子力学的波函数）.

应当指出，除非自变数的个数 $n\leqslant 2$，二阶线性偏微分方程（7.3.1）只能逐点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 化为上述标准形式，一般不能在某个区域上各点同时化为标准形式. 即使方程在某个区域上各点属于同一类型，一般还是不能在该区域上各点同时化为标准形式. 道理是这样的：非“对角的”系数 $A_{ij}(i\neq j)$ 有

$$\frac{n(n-1)}{2} \tag{7.3.27}$$

个，要求它们为零意味着满足 $n(n-1)/2$ 个条件，可供选择的代换 $\xi_k(k=1, 2, \cdots, n)$ 只有

$$n \tag{7.3.28}$$

个. 如 $n>3$，则（7.3.28）总是小于（7.3.27），因而不可能选择一种代换使所有非“对角的”系数全为零. 如 $n=3$，则（7.3.28）等于（7.3.27），可选一代换使所有非“对角的”系数为零，但“对角的”系数一般未必全相同. 因此，必须 $n\leqslant 2$，才有可能在某一区域上各点同时化为标准形式.

（四）常系数线性方程

如果线性方程的系数都是常数，则按上述方法化成标准形式之后还可以进一步简化.

以传输线方程（7.1.12）或（7.1.13）为例

$$LCu_{tt} - u_{xx} + (LG+RC)u_t + RGu = 0. \tag{7.3.29}$$

试作函数变换 $u(x,t)\to v(x,t)$,

$$u(x,t)=\mathrm{e}^{\lambda x+\mu t}v(x,t), \tag{7.3.30}$$

其中 λ 和 μ 是尚待确定的常数. 于是,

$$\begin{cases} u_x=\mathrm{e}^{\lambda x+\mu t}(v_x+\lambda v), \\ u_t=\mathrm{e}^{\lambda x+\mu t}(v_t+\mu v), \\ u_{xx}=\mathrm{e}^{\lambda x+\mu t}(v_{xx}+2\lambda v_x+\lambda^2 v), \\ u_{xt}=\mathrm{e}^{\lambda x+\mu t}(v_{xt}+\lambda v_t+\mu v_x+\lambda\mu v), \\ u_{tt}=\mathrm{e}^{\lambda x+\mu t}(v_{tt}+2\mu v_t+\mu^2 v). \end{cases} \tag{7.3.31}$$

把(7.3.30)和(7.3.31)代入(7.3.29),约去公共因子 $\mathrm{e}^{\lambda x+\mu t}$,得

$$LCv_{tt}-v_{xx}-2\lambda v_x+[2\mu LC+(LG+RC)]v_t$$
$$+[LC\mu^2-\lambda^2+\mu(LG+RC)+RG]v=0.$$

如果选取 $\lambda=0,\mu=-(LG+RC)/2LC$,即 $u(x,t)=\mathrm{e}^{-\frac{LG+RC}{2LC}t}v(x,t)$,则一阶偏导数 v_t 和 v_x 的项消失,方程简化为

$$LCv_{tt}-v_{xx}-\frac{(LG-RC)^2}{4LC}v=0. \tag{7.3.32}$$

习　题

1. 把下列方程化为标准形式.

(1) $au_{xx}+2au_{xy}+au_{yy}+bu_x+cu_y+u=0$,

(2) $u_{xx}-2u_{xy}-3u_{yy}+2u_x+6u_y=0$,

(3) $u_{xx}+4u_{xy}+5u_{yy}+u_x+2u_y=0$,

(4) $u_{xx}+yu_{yy}=0$,

(5) $u_{xx}+xu_{yy}=0$,

(6) $y^2u_{xx}+x^2u_{yy}=0$,

(7) $4y^2u_{xx}-\mathrm{e}^{2x}u_{yy}-4y^2u_x=0$.

2. 简化下列常系数方程.

(1) $u_{xx}+u_{yy}+\alpha u_x+\beta u_y+\gamma u=0$,

(2) $u_{xx}=\frac{1}{a^2}u_y+\alpha u+\beta u_x$,

(3) $u_{yy}+\frac{c-b}{a}u_x+\frac{b}{a}u_y+u=0$.

(4) $u_{xy}+3u_x+4u_y+2u=0$,

(5) $2au_{xx}+2au_{xy}+au_{yy}+2bu_x+2cu_y+u=0$.

§7.4 达朗贝尔公式 定解问题

读者已经熟悉常微分方程的常规解法：先不考虑任何附加条件，从方程本身求出通解，通解中含有任意常数(积分常数)，然后利用附加条件确定这些常数. 偏微分方程能否仿照这种办法求解呢?

(一) 达朗贝尔公式

试研究均匀弦的横振动方程(7.1.6)、均匀杆的纵振动方程(7.1.9)、理想传输线方程(7.1.14)，它们具有同一形式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u=0,$$

即

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+a\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}-a\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0. \qquad (7.4.1)$$

(1) 通解

方程(7.4.1)的形式提示我们作代换

$$x=a(\xi+\eta), \qquad t=\xi-\eta, \qquad (7.4.2)$$

因为在这个代换下，

$$\frac{\partial}{\partial\xi}=\frac{\partial t}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial t}+a\frac{\partial}{\partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}=\frac{\partial t}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial x}=-\left(\frac{\partial}{\partial t}-a\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

方程(7.4.1)就成为$(\partial^2/\partial\xi\partial\eta)u=0$. 但为了以后的书写便利，把代换(7.4.2)修改为

$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}(\xi+\eta),\\ t=\dfrac{1}{2a}(\xi-\eta),\end{cases} \quad 即\begin{cases}\xi=x+at,\\ \eta=x-at.\end{cases}$$

在此代换下，方程(7.4.1)化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0, \tag{7.4.3}$$

就很容易求解了.

先对 η 积分，得

$$\frac{\partial u}{\partial\xi}=f(\xi) \tag{7.4.4}$$

其中 f 是任意函数. 再对 ξ 积分，就得到通解

$$\begin{aligned} u &= \int f(\xi)\mathrm{d}\xi+f_2(\eta)=f_1(\xi)+f_2(\eta) \\ &=f_1(x+at)+f_2(x-at), \end{aligned} \tag{7.4.5}$$

其中 f_1 和 f_2 都是任意函数.

式(7.4.5)就是偏微分方程(7.4.1)的通解. 不同于常微分方程的情况，式中出现任意函数而不是任意常数.

通解(7.4.5)具有鲜明物理意义. 以 $f_2(x-at)$ 而论，改用以速度 a 沿 x 正方向移动的坐标轴 X，则新旧坐标和时间之间的关系为

$$\begin{cases} X=x-at, \\ T=t, \end{cases}$$

而

$$f_2(x-at)=f_2(X),$$

与时间 T 无关. 这是说，函数的图象在动坐标系中保持不变，亦即是随着动坐标系以速度 a 沿 x 正方向移动的行波. 同理，$f_1(x+at)$是以速度 a 沿 x 负方向移动的行波.

这样，偏微分方程(7.4.1)描写以速度 a 向两方传播的行波.

(2) 函数 f_1 与 f_2 的确定

通解(7.4.5)中的函数 f_1 与 f_2 可用定解条件确定.

我们假定所研究的弦、杆、传输线是“无限长的”(此词的真正含义见 §7.2(二)末)，这就不存在边界条件，设初始条件是

$$u|_{t=0}=\varphi(x), \qquad u_t|_{t=0}=\psi(x). \ (-\infty<x<\infty)$$

$$(7.4.6)$$

以一般解(7.4.5)代入初始条件,得

$$\begin{cases} f_1(x)+f_2(x)=\varphi(x), \\ af_1'(x)-af_2'(x)=\psi(x); \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} f_1(x)+f_2(x)=\varphi(x), \\ f_1(x)-f_2(x)=\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{x_0}^{x}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi+f_1(x_0)-f_2(x_0). \end{cases}$$

由此解得

$$\begin{cases} f_1(x)=\dfrac{1}{2}\varphi(x)+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x_0}^{x}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi+\dfrac{1}{2}[f_1(x_0)-f_2(x_0)], \\ f_2(x)=\dfrac{1}{2}\varphi(x)-\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x_0}^{x}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi-\dfrac{1}{2}[f_1(x_0)-f_2(x_0)]. \end{cases}$$

以此代回(7.4.5)即得满足初始条件(7.4.6)的特解

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi. \tag{7.4.7}$$

这叫作达朗贝尔公式

作为第一个例子,设初速为零即 $\psi(x)=0$,而初始位移 $\varphi(x)$ 只在区间 (x_1,x_2) 上不为零,于 $x=(x_1+x_2)/2$ 处达到最大值 u_0,如图 7-14a 所示.

$$\varphi(x)=\begin{cases} 2u_0\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}, & x_1\leqslant x\leqslant\dfrac{x_1+x_2}{2} \\ 2u_0\dfrac{x_2-x}{x_2-x_1}, & \dfrac{x_1+x_2}{2}\leqslant x\leqslant x_2 \\ 0. & x<x_1 \text{ 或 } x>x_2 \end{cases}.$$

达朗贝尔公式(7.4.7)给出 $u(x,t)=\frac{1}{2}\varphi(x+at)+\frac{1}{2}\varphi(x-at)$,即初始位移(图 7-14b 最下一图的粗线所描画)分为两半(该图细线),分别向左右两方以速度 a 移动(图 7-14b 由下而上各图的细线所描画),这两个行波的和(图 7-14b 由下而上的粗线所描画)给出各个时刻的波形.

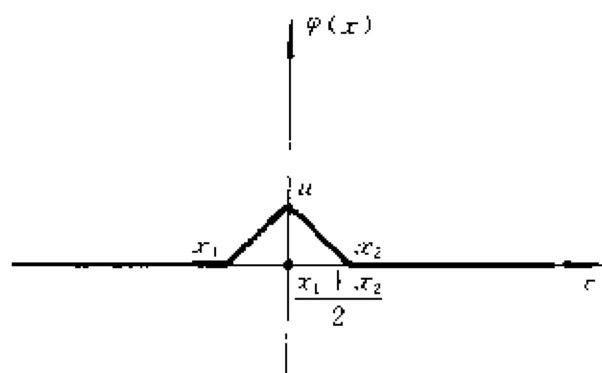


图 7-14a

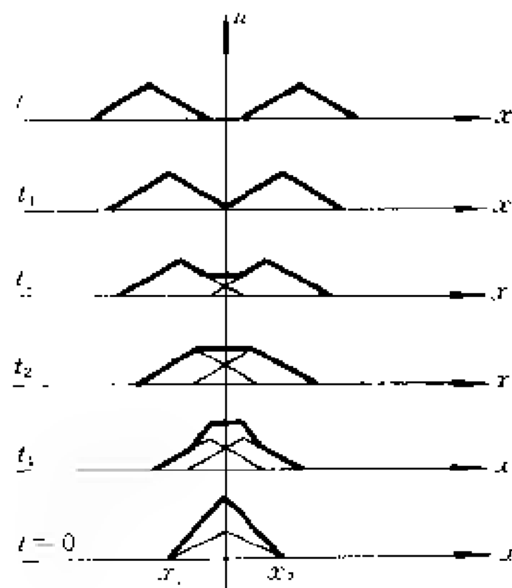


图 7-14b

作为第二个例子,设初始位移为零即 $\varphi(x)=0$,而且初速$\psi(x)$也只在区间(x_1,x_2)上不为零,

$$\psi(x)=\begin{cases}\text{常数 } \psi_0 & (x \text{ 在}(x_1,x_2)\text{上}),\\ 0 & (x \text{ 不在}(x_1,x_2)\text{上}).\end{cases}$$

达朗贝尔公式(7.4.7)给出

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi-\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{x-at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\\ &=\Psi(x+at)-\Psi(x-at),\end{aligned}$$

这里 Ψ 指的是(图 7-15)

$$\begin{aligned}\Psi(x)&=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\\ &=\begin{cases}0 & (x\leqslant x_1),\\ \dfrac{1}{2a}(x-x_1)\psi_0 & (x_1\leqslant x\leqslant x_2),\\ \dfrac{1}{2a}(x_2-x_1)\psi_0 & (x_2\leqslant x).\end{cases}\end{aligned}$$

于是,作出$+\Psi(x)$和$-\Psi(x)$两个图形,让它们以速度 a 分别向左右两方移动(图 7-16 由下而上各图的细线所描画),两者的和(图 7-16 由下而上各图的粗线)就描画出各个时刻的波形.

在图 7-14b 中，波已"通过"的地区，振动消失而弦静止在原平衡位置；在图 7-16 中，波已"通过"的地区，虽然振动也消失，但偏离了原平衡位置.

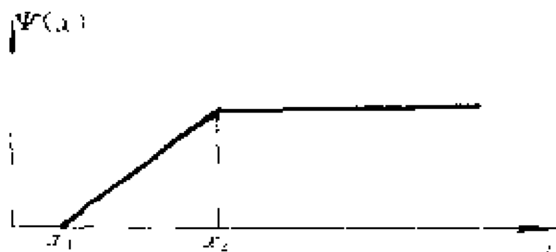


图 7-15

（二）端点的反射

研究半无限长弦的自由振动. 半无限长的弦具有一个端点.

先考察端点固定的情况，即定解问题.

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=0,\quad (0<x<\infty) \tag{7.4.8}$$

$$\begin{cases} u|_{t=0}=\varphi(x), \\ u_t|_{t=0}=\psi(x), \end{cases}\quad (0\leqslant x<\infty) \tag{7.4.9}$$

$$u|_{x=0}=0. \tag{7.4.10}$$

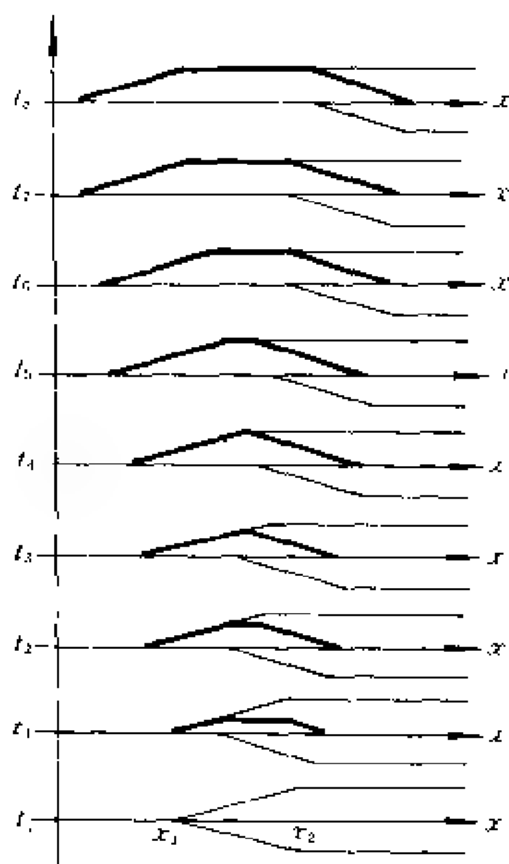


图 7-16

注意初始条件(7.4.9)里的 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 必须宗量 $x\geqslant 0$ 才有意义，这是因为在 $x<0$ 的区域上弦并不存在，也就谈不上初始条件. 这样，对于较迟的时间 $(t>x/a)$，达朗贝尔公式里的 $\varphi(x-at)$ 和 $\int_{x-at}\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi$ 失去意义，公式也就不能应用.

参照 § 5.2 习题 4，不妨把这根半无限长弦当作某根无限长弦的 $x\geqslant 0$ 的部分. 按照(7.4.10)，这无限长弦的振动过程中，点 $x=0$ 必须保持不动. 这是说，无限长弦的位移 $u(x,t)$ 应当是奇函数，因而无限长弦的初始位移 $\Phi(x)$ 和初始速度 $\Psi(x)$ 都应当是奇函

数，即

$$\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x) & (x\geqslant 0),\\ -\varphi(-x) & (x<0);\end{cases}\quad \Psi(x)=\begin{cases}\psi(x) & (x\geqslant 0),\\ -\psi(-x) & (x<0).\end{cases}$$

(7.4.11)

通常采用"延拓"一词把(7.4.11)说成"把 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 从半无界区间 $x\geqslant 0$ 奇延拓到整个无界区间，分别成为 $\Phi(x)$ 和 $\Psi(x)$". 现在完全可以应用达朗贝尔公式(7.4.7)求解无限长弦的自由振动，它的 $x\geqslant 0$ 的部分正是我们所考察的半无限长弦. 根据(7.4.7)，

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\Phi(x+at)+\Phi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

把(7.4.11)代入上式，

$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]\\ \quad +\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\ \left(t\leqslant\frac{x}{a}\right),\\ \frac{1}{2}[\varphi(x+at)-\varphi(at-x)]\\ \quad +\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\ \left(t\geqslant\frac{x}{a}\right).\end{cases}\tag{7.4.12}$$

为了阐明(7.4.12)的物理意义，图 7-17 描画了只有初始位移而没有初始速度的情况. 最下一图右半边用实线描画出分别向左右两方移动的波，左半边用细线描画出其奇延拓，奇延拓的波也分别向左右两方移动. 在这图中，端点还没有引起什么影响. 由下而上各图按着时间顺序描画了波的传播情况，粗线为合成的波形，端点 $x=0$ 确实保持不动. 由图可见，端点的影响表现为**反射波**. 这反射波的相位跟入射波相反，这就是所谓**半波损失**.

再考察半无限长杆的自由振动，杆的端点自由，这个定解问题是

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=0,\quad (0<x<\infty)\tag{7.4.13}$$

图 7-17

$$\begin{cases} u|_{t=0}=\varphi(x), \\ u_t|_{t=0}=\psi(x), \end{cases} \quad (0\leqslant x<\infty) \tag{7.4.14}$$

$$u_x|_{x=0}=0. \tag{7.4.15}$$

同样，不妨把这根半无限长杆当作某根无限长杆的 $x\geqslant 0$ 的部分. 按照(7.4.15)，这无限长杆的振动过程中，在点 $x=0$ 的相对伸长 u_x 必须保持为零. 这是说，无限长杆的位移 $u(x,t)$ 应当是偶函数，因而无限长杆的初始位移 $\Phi(x)$ 和初始速度 $\Psi(x)$ 都应当是偶函数，即

$$\Phi(x)=\begin{cases} \varphi(x) & (x\geqslant 0), \\ \varphi(-x) & (x<0); \end{cases} \quad \Psi(x)=\begin{cases} \psi(x) & (x\geqslant 0), \\ \psi(-x) & (x<0). \end{cases} \tag{7.4.16}$$

这就是"把 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 从半无界区间 $x\geqslant 0$ 偶延拓到整个无界区间分别成为 $\Phi(x)$ 和 $\Psi(x)$". 现在，应用达朗贝尔公式(7.4.7)求

解无限长杆的自由振动，

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\Phi(x+at)+\Phi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

把(7.4.16)代入上式，

$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]\\ \qquad+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\ \left(t\leqslant\frac{x}{a}\right),\\ \frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(at-x)]\\ \qquad+\frac{1}{2a}\int_{0}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2a}\int_{0}^{at-x}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\ \left(t>\frac{x}{a}\right).\end{cases}\tag{7.4.17}$$

自由端点的影响可以仿照图 7-17 加以阐明，这也是一种反射波.不同的是反射波的相位跟入射波相同，没有半波损失.

(三) 定解问题是一个整体

从偏微分方程(7.4.1)解出达朗贝尔公式(7.4.7)的过程，与读者所熟悉的常微分方程的求解过程是完全类似的.

但是，很可惜，绝大多数偏微分方程很难求出通解；即使已求得通解，用定解条件确定其中待定函数往往更加困难.

在本章的开头已指出，从物理的角度来说，问题的完整提法是在给定的定解条件下求解数学物理方程.现在我们要指出，除了达朗贝尔公式一类极少的例外，从数学的角度来说，不可能先求偏微分方程的通解然后再考虑定解条件，必须同时考虑偏微分方程和定解条件以进行求解.

这样，不管从物理上说还是从数学上说，定解问题是一个整体.

(四) 定解问题的适定性

定解问题来自实际，它的解答也应回到实际中去.为此，应当要求定解问题(1)有解，(2)其解是唯一的，(3)解是稳定的.解的存在性和唯一性这两个要求明白易懂.至于第三个要求即稳定性说

的是:如果定解条件的数值有细微的改变,解的数值也只作细微的改变.

为什么要求稳定呢?由于测量不可能绝对精密,来自实际的定解条件不免带有细微的误差,如果解不是稳定的,那么它就很可能与实际情况相去甚远,没有价值.

定解问题如果满足以上三个条件,就称为**适定的**.非适定的定解问题应当修改其提法,使其成为适定的.

以达朗贝尔解(7.4.7)为例.如果 $\varphi(x)\in C^2$(这些记号的意思是 $\varphi(x)$ 属于具有二阶连续导数的函数类),$\psi(x)\in C^1$,不难直接验证它确实满足方程(7.4.1)和条件(7.4.6).这是说,解是存在的.

在推得达朗贝尔公式(7.4.7)的过程中,没有对所求解的 u 作过任何假定和限制,凡满足方程(7.4.1)和条件(7.4.6)的解必可表为(7.4.7).这是说,解是唯一的.

最后,证明达朗贝尔解(7.4.7)的稳定性.设有相差很细微的两组初始条件

$$\begin{cases}u|_{t=0}=\varphi_1(x),\\ u_t|_{t=0}=\psi_1(x);\end{cases}\qquad \begin{cases}u|_{t=0}=\varphi_2(x),\\ u_t|_{t=0}=\psi_2(x);\end{cases}\tag{7.4.18}$$

$$|\varphi_1-\varphi_2|<\delta,\qquad |\psi_1-\psi_2|<\delta.\tag{7.4.19}$$

则相应的两解 u_1 和 u_2 相差

$$\begin{aligned}\left|u_1-u_2\right|&\leqslant\frac{1}{2}\left|\varphi_1(x+at)-\varphi_2(x+at)\right|+\frac{1}{2}\left|\varphi_1(x-at)-\varphi_2(x-at)\right|\\&\quad+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}|\psi_1(\xi)-\psi_2(\xi)|\mathrm{d}\xi\\&<\frac{1}{2}\delta+\frac{1}{2}\delta+\frac{1}{2a}2at\delta=(1+t)\delta.\end{aligned}$$

两解的差确是细微的.

本书所研究的定解问题多是适定的,我们将不再一一加以论说.

从下章开始,我们将不再先求泛定方程的通解,而是把泛定方程和定解条件作为整体来处理.

习　题

1. 求解无限长弦的自由振动，设弦的初始位移为 $\varphi(x)$，初始速度为 $-a\varphi'(x)$.

2. 求解无限长理想传输线上电压和电流的传播情况，设初始电压分布为 $A\cos kx$，初始电流分布为 $\sqrt{C/L}A\cos kx$.

3. 在 $G/C=R/L$ 条件下求无限长传输线上的电报方程的通解.

4. 无限长弦在点 $x=x_0$ 受到初始冲击，冲量为 I，试求解弦的振动. [提示：$u_t|_{t=0}=(I/\rho)\delta(x-x_0)$]

5. 求解细圆锥形均质杆的纵振动. [提示：泛定方程见 §7.1 习题 2，作变换 $u=v/x$.]

6. 半无限长杆的端点受到纵向力 $F(t)=A\sin\omega t$ 作用，求解杆的纵振动.

7. 求解半无限长理想传输线上电报方程的解，端点通过电阻 R 而相接，初始电压分布 $A\cos kx$，初始电流分布 $\sqrt{C/L}A\cos kx$. 在什么条件下端点没有反射(这种情况叫作匹配)？

8. 半无限长弦的初始位移和速度都是零，端点作微小振动 $u|_{x=0}=A\sin\omega t$. 求解弦的振动.

第八章　分离变数(傅里叶级数)法

§7.4 先求泛定方程通解的办法只适用于很少数的某些定解问题. 本章介绍的分离变数(傅里叶级数)法是定解问题的一种基本解法,适用于大量的各种各样定解问题. 其基本思想是把偏微分方程分解为几个常微分方程,其中有的常微分方程带有附加条件而构成本征值问题. 本章将限于本征函数为三角函数的情况. 至于本征函数不限于三角函数的情况请见第九～第十一章.

§8.1　齐次方程的分离变数法

(一) 分离变数法介绍

研究两端固定的均匀弦的自由振动,即定解问题

泛定方程
$$u_{tt}-a^2u_{xx}=0, \tag{8.1.1}$$

边界条件
$$\begin{cases}u|_{x=0}=0,\\ u|_{x=l}=0,\end{cases} \tag{8.1.2}$$

初始条件
$$\begin{cases}u|_{t=0}=\varphi(x),\\ u_t|_{t=0}=\psi(x).\end{cases}\quad (0<x<l). \tag{8.1.3}$$

§7.4 已指出端点引起波的反射. 这里研究的弦是有限长的,它有两个端点,波就在这两端点之间往复反射. 我们知道,两列反向行进的同频率的波形成**驻波**. 这就启发我们尝试从驻波出发解决问题.

在驻波中,有些点振幅最大,叫作**波腹**(图 8-1);还有些点振幅最小(在图 8-1 中这个最小振幅是零),叫作**波节**. 驻波没有波形传播现象,就是说,各点振动相位(周相)并不依次滞后,它们按同一方式随时间 t 振动,可以统一表示为 $T(t)$. 但是各点的振幅 X

却随地点 x 而异，即振幅 X 是 x 的函数 $X(x)$. 这样，驻波的一般表示式为

$$u(x,t)=X(x)T(t). \tag{8.1.4}$$

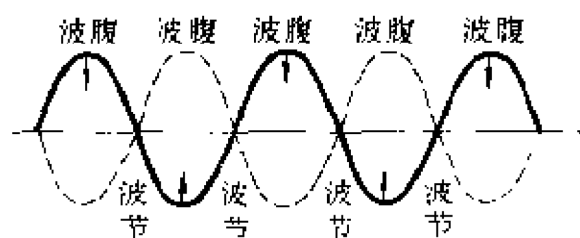


图 8-1

在(8.1.4)里，自变数 x 只出现于 X 之中，自变数 t 只出现于 T 之中，驻波的一般表示式具有分离变数的形式.

那么，在两端固定的弦上究竟有哪些驻波呢?把驻波的一般表示式(8.1.4)代入弦振动方程(8.1.1)和边界条件(8.1.2)，得

$$XT''-a^2X''T=0, \tag{8.1.5}$$

$$\begin{cases}X(0)T(t)=0,\\ X(l)T(t)=0.\end{cases} \tag{8.1.6}$$

条件(8.1.6)的意义很清楚：不论在什么时刻 t，$X(0)T(t)$ 和 $X(l)T(t)$ 总是零. 这只能是

$$X(0)=0,\quad X(l)=0. \tag{8.1.7}$$

注意：由于边界条件是齐次的，才得出(8.1.7)这样简单的结论，关于非齐次边界条件的处理请看§8.3. 现在再看方程(8.1.5)，用 a^2XT 遍除各项即得

$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{X''}{X}.$$

左边是时间 t 的函数，跟坐标 x 无关；右边则是坐标 x 的函数，跟时间 t 无关. 两边相等显然是不可能的，除非两边实际上是同一个常数. 把这个常数记作 $-\lambda$，

$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{X''}{X}=-\lambda$$

这可以分离为关于 X 的常微分方程和关于 T 的常微分方程，前者还附带有条件(8.1.7)，

$$\begin{cases}X''+\lambda X=0, & (8.1.8)\\ X(0)=0,X(l)=0. & (8.1.7)\end{cases}$$

$$T'' + \lambda a^2 T = 0. \tag{8.1.9}$$

先求解 X，将 $\lambda<0$、$\lambda=0$ 和 $\lambda>0$ 三种可能性逐一加以考察.

(1)$\lambda<0$. 方程(8.1.8)的解是

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

积分常数 C_1 和 C_2 由条件(8.1.7)确定，即

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0. \end{cases}$$

由此解出 $C_1=0, C_2=0$，从而 $X(x)\equiv 0$，所求驻波 $u(x,t)=X(x)T(t)\equiv 0$，这是没有意义的. 于是，$\lambda<0$ 的可能性就排除了.

(2)$\lambda=0$. 方程(8.1.8)的解是

$$X(x) = C_1 x + C_2.$$

积分常数 C_1 和 C_2 由条件(8.1.7)确定，即

$$\begin{cases} C_2 = 0, \\ C_1 l + C_2 = 0. \end{cases}$$

由此解出 $C_1=0, C_2=0$，从而 $X(x)\equiv 0$，所求驻波 $u=XT\equiv 0$，没有意义. 于是，$\lambda=0$ 的可能性也排除了.

(3)$\lambda>0$. 方程(8.1.8)的解是

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}\,x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\,x.$$

积分常数 C_1 和 C_2 由条件(8.1.7)确定，即

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 \sin\sqrt{\lambda}\,l = 0. \end{cases}$$

如 $\sin\sqrt{\lambda}\,l \neq 0$，则仍然解出 $C_1=0, C_2=0$，从而 $u(x,t)\equiv 0$，同样没有意义，应予排除. 现只剩下一种可能性：$C_1=0, \sin\sqrt{\lambda}\,l=0$，于是，$\sqrt{\lambda}\,l=n\pi$（$n$ 为正整数），亦即

$$\lambda = \frac{n^2\pi^2}{l^2}. \quad (n=1,2,3,\cdots) \tag{8.1.10}$$

当 λ 取这样的数值时，

$$X(x)=C_2\sin\frac{n\pi x}{l},\qquad(8.1.11)$$

C_2 为任意常数. 请注意,(8.1.11)正是傅里叶正弦级数的基本函数族.

这样,分离变数过程中所引入的常数 λ 不能为负数或零,甚至也不能是任意的正数,它必须取(8.1.10)所给出的特定数值,才可能从方程(8.1.8)和条件(8.1.7)求出有意义的解. 常数 λ 的这种特定数值叫作**本征值**,相应的解叫作**本征函数**. 方程(8.1.8)和条件(8.1.7)则构成所谓**本征值问题**.

再看 T 的方程(8.1.9),按照(8.1.10),这应改写为

$$T''+a^2\frac{n^2\pi^2}{l^2}T=0.$$

这个方程的解是

$$T(t)=A\cos\frac{n\pi at}{l}+B\sin\frac{n\pi at}{l},\qquad(8.1.12)$$

其中 A 和 B 是积分常数.

把(8.1.11)和(8.1.12)代入(8.1.4),得到分离变数形式的解

$$u_n(x,t)=\left(A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+B_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l},\quad(n=1,2,3,\cdots)\qquad(8.1.13)$$

n 为正整数. 这就是两端固定弦上的可能的驻波. 每一个 n 对应于一种驻波. 这些驻波也叫作两端固定弦的**本征振动**.

在 $x=kl/n(k=0,1,2,\cdots,n)$ 共计 $n+1$ 个点上,$\sin(n\pi x/l)=\sin k\pi=0$,从而 $u_n(x,t)=0$. 这些点就是驻波的节点. 相邻节点间隔 l/n 应为半波长,所以波长 $=2l/n$.

本征振动(8.1.13)的角频率(又叫圆频率)是 $\omega=n\pi a/l$,从而频率 $f=\omega/2\pi=na/2l$.

$n=1$ 的驻波除两端 $x=0$ 和 $x=l$ 外没有其它节点,它的波长 $2l$ 在所有本征振动中是最长的;相应地,它的频率 $a/2l$ 在所有本征振动中是最低的. 这个驻波叫作**基波**. $n>1$ 的各个驻波分别叫

作 n 次谐波. n 次谐波的波长 $2l/n$ 是基波的 $1/n$，频率 $na/2l$ 则是基波的 n 倍.

以上本征振动是满足弦振动方程(8.1.1)和边界条件(8.1.2)的线性独立的特解. 由于方程(8.1.1)和边界条件(8.1.2)都是线性而且齐次的，本征振动的线性叠加

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+B_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l},\qquad(8.1.14)$$

仍然满足方程(8.1.1)和边界条件(8.1.2)，这就是满足方程(8.1.1)和边界条件(8.1.2)的一般解，其中 A_n 和 B_n 为任意常数. 这里尚未考虑初始条件.

下面的任务便是求定解问题(8.1.1)～(8.1.3)的确定解，在数学上，就是要选取适当的叠加系数 A_n 和 B_n 使(8.1.14)满足初始条件(8.1.3). 为此，以(8.1.14)代入(8.1.3)，

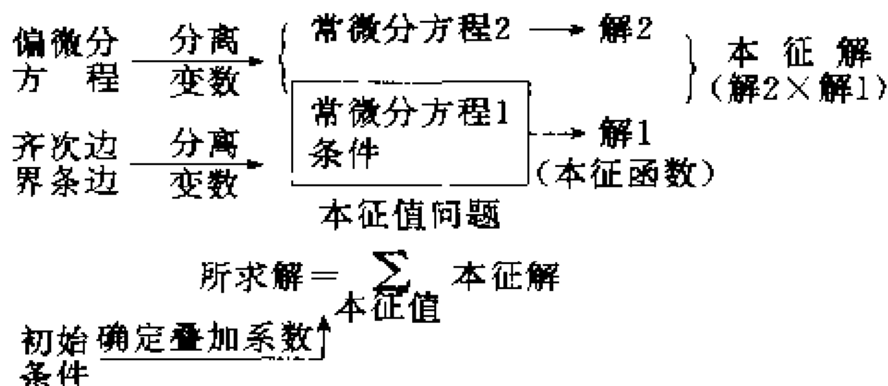
$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{l}=\varphi(x),\\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}=\psi(x).\end{cases}\quad(0<x<l)\qquad(8.1.15)$$

(8.1.15)的左边是傅里叶正弦级数，这就提示我们把右边的 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 展开为傅里叶正弦级数，然后比较两边的系数就可确定 A_n 和 B_n，

$$\begin{cases}A_n=\text{傅里叶系数 }\varphi_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi,\\ B_n=\dfrac{l}{n\pi a}\cdot\text{傅里叶系数 }\psi_n=\dfrac{2}{n\pi a}\displaystyle\int_0^l\psi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi.\end{cases}\qquad(8.1.16)$$

至此，定解问题(8.1.1)～(8.1.3)已经解出，答案是(8.1.14)，其中系数 A_n 和 B_n 取决于弦的初始状态，具体计算公式是(8.1.16). 解(8.1.14)正好是傅里叶正弦级数，这是在 $x=0$ 和 $x=l$ 处的第一类齐次边界条件(8.1.2)所决定的.

回顾整个求解过程，可以作出图解如下：



关键在于把分离变数形式的试探解代入偏微分方程，从而把它分解为几个常微分方程，自变数各自分离开来了，问题转化为求解常微分方程. 另一方面，代入齐次边界条件把它转化为常微分方程的附加条件，这些条件与相应的常微分方程构成本征值问题. 虽然我们是从驻波引出解题的线索，其实整个求解过程跟驻波并没有特殊的联系，从数学上讲，完全可以推广应用于线性齐次方程和线性齐次边界条件的多种定解问题. 这个方法，按照它的特点，叫作**分离变数法**.

用分离变数法得到的定解问题的解一般是无穷级数. 不过，在具体问题中，级数里常常只有前若干项较为重要，后面的项则迅速减小，从而可以一概略去.

（二）例题

前面已研究了区间两端均为第一类齐次边界条件的定解问题. 下面例 1 是区间两端均为第二类齐次边界条件的例题.

例 1 磁致伸缩换能器、鱼群探测换能器等器件的核心是两端自由的均匀杆，它作纵振动. 研究两端自由棒的自由纵振动，即定解问题

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=0, \tag{8.1.17}$$

$$\begin{cases} u_x|_{x=0}=0, \\ u_x|_{x=l}=0, \end{cases} \tag{8.1.18}$$

$$\begin{cases} u|_{t=0}=\varphi(x), \\ u_t|_{t=0}=\psi(x). \end{cases} \quad (0<x<l) \tag{8.1.19}$$

解 按照分离变数法的步骤，先以分离变数形式的试探解

$$u(x,t)=X(x)T(t) \tag{8.1.20}$$

代入泛定方程(8.1.17)和边界条件(8.1.18),得

$$XT''-a^2X''T=0, \tag{8.1.21}$$

$$X'(0)T(t)=0, \quad X'(l)T(t)=0, \tag{8.1.22}$$

条件(8.1.22)也就是

$$X'(0)=0, \quad X'(l)=0. \tag{8.1.23}$$

再看方程(8.1.21),用 a^2XT 遍除各项即得

$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{X''}{X}$$

两边分别是时间 t 和坐标 x 的函数,不可能相等,除非两边实际上是同一个常数. 把这个常数记作 $-\lambda$,

$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{X''}{X}=-\lambda$$

这可分离为关于 X 的常微分方程和关于 T 的常微分方程,前者附带有条件(8.1.23),

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0, & (8.1.24) \\ X'(0)=0, X'(l)=0; & (8.1.23) \end{cases}$$

$$T''+\lambda a^2T=0 \tag{8.1.25}$$

求解本征值问题(8.1.24)、(8.1.23). 如果 $\lambda<0$,只能得到无意义的解 $X(x)\equiv0$. 如果 $\lambda=0$,则方程(8.1.23)的解是 $X(x)=C_0+D_0x$,代入条件(8.1.23),得 $D_0=0$,于是 $X(x)=C_0$,C_0 为任意常数,这是对应于本征值 $\lambda=0$ 的本征函数. 如果 $\lambda>0$,方程(8.1.24)的解是

$$X(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}\,x+C_2\sin\sqrt{\lambda}\,x$$

积分常数 C_1 和 C_2 由条件(8.1.23)确定,即

$$\begin{cases} \sqrt{\lambda}\,C_2=0 \\ \sqrt{\lambda}\,(-C_1\sin\sqrt{\lambda}\,l+C_2\cos\sqrt{\lambda}\,l)=0 \end{cases}$$

由于 $\sqrt{\lambda}\neq0$,所以 $C_2=0$,$C_1\sin\sqrt{\lambda}\,l=0$. 如果 $C_1=0$,则得无意义的解 $X(x)\equiv0$;因此 $C_1\neq0$,$\sin\sqrt{\lambda}\,l=0$. 于是 $\sqrt{\lambda}\,l=n\pi(n=1,2,$

…）．即 $\lambda=n^2\pi^2/l^2(n=1,2,\cdots)$，这是 $\lambda>0$ 情况下的本征值．相应的本征函数是 $X(x)=C_1\cos(n\pi x/l)(n=1,2,\cdots)$．

现在把 $\lambda=0$ 与 $\lambda>0$ 情况的本征值和本征函数合在一起，

$$\lambda=\frac{n^2\pi^2}{l^2},(n=0,1,2,\cdots) \tag{8.1.26}$$

$$X(x)=C_1\cos\frac{n\pi}{l}x,(n=0,1,2,\cdots) \tag{8.1.27}$$

C_1 为任意常数．(8.1.27)即傅里叶余弦级数的基本函数族．

当 $\lambda>0$ 时，将本征值(8.1.26)代入 T 的方程(8.1.25)，有

$$T''=0 \text{ 及 } T''+\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T=0.\ (n\neq0)$$

其解是

$$T_0(t)=A_0+B_0t. \tag{8.1.28}$$

$$T_n(t)=A_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+B_n\sin\frac{n\pi a}{l}t.\ (n=1,2,\cdots) \tag{8.1.29}$$

其中 A_n,B_n,A_0,B_0 均为独立的任意常数．

把(8.1.27)、(8.1.28)和(8.1.29)代回(8.1.20)，得到本征振动

$$\begin{cases}u_n(x,t)=\left(A_n\cos\dfrac{n\pi a}{l}t+B_n\sin\dfrac{n\pi a}{l}t\right)\cos\dfrac{n\pi}{l}x,(n=1,2,\cdots)\\ u_0(x,t)=A_0+B_0t.\end{cases} \tag{8.1.30}$$

请注意，(8.1.30)正是傅里叶余弦级数的基本函数族．

所有本征振动的叠加应是一般解 $u(x,t)$，即

$$u(x,t)=A_0+B_0t+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+B_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\cos\frac{n\pi}{l}x \tag{8.1.31}$$

系数 A_0,B_0,A_n,B_n 应由初始条件(8.1.19)确定．以(8.1.31)代入(8.1.19)，有

$$\begin{cases}A_0+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{n\pi}{l}x=\varphi(x),\\ B_0+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi a}{l}B_n\cos\frac{n\pi}{l}x=\psi(x).\end{cases}\quad(0\leqslant x\leqslant l)$$

把右边的$\varphi(x)$和$\psi(x)$展开为傅里叶余弦级数，然后比较两边的系数，得

$$\begin{cases}A_0=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_0^l\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi,\\B_0=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_0^l\psi(\xi)\mathrm{d}\xi;\end{cases}\quad\begin{cases}A_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l\varphi(\xi)\cos\dfrac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi,\\B_n=\dfrac{2}{n\pi a}\displaystyle\int_0^l\psi(\xi)\cos\dfrac{n\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi.\end{cases}\tag{8.1.32}$$

答案(8.1.31)中的A_0+B_0t描写杆的整体移动，其余部分才真正描写杆的纵振动. 从(8.1.32)知道A_0与B_0分别等于平均初始位移和平均初始速度. 由于不受外力作用，杆以不变的速度B_0移动. 解(8.1.31)正是傅里叶余弦级数. 这是在$x=0$和$x=l$处的第二类齐次边界条件(8.1.18)决定的.

下一个例子是一端为第一类齐次边界条件，另一端为第二类齐次边界条件.

例2 研究细杆导热问题. 初始时刻杆的一端温度为零度，另一端温度为u_0，杆上温度梯度均匀，零度的一端保持温度不变，另一端跟外界绝热. 试求细杆上温度的变化.

解 杆上温度$u(x,t)$满足下列泛定方程和定解条件

$$u_t-a^2u_{xx}=0\qquad(a^2=k/c\rho),\tag{8.1.33}$$

$$\begin{cases}u|_{x=0}=0,\\u_x|_{x=l}=0,\end{cases}\tag{8.1.34}$$

$$u|_{t=0}=u_0x/l\qquad(0<x<l).\tag{8.1.35}$$

泛定方程和边界条件都是齐次的，可以应用分离变数法，首先以分离变数形式的试探解

$$u(x,t)=X(x)T(t)\tag{8.1.36}$$

代入方程(8.1.33)和边界条件(8.1.34)，可得关于$X(x)$的常微分方程和条件以及关于$T(t)$的常微分方程：

$$\begin{cases}X''+\lambda X=0,&(8.1.37)\\X(0)=0,X'(l)=0&(8.1.38)\end{cases}$$

$$T'+\lambda a^2T=0\tag{8.1.39}$$

$X(x)$的方程(8.1.37)和条件(8.1.38)构成本征值问题，如果$\lambda<0$或$=0$，只能得到无意义的解$X(x)\equiv 0$. 如果$\lambda>0$，则方程(8.1.37)的解是

$$X(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}\,x+C_2\sin\sqrt{\lambda}\,x.$$

积分常数C_1和C_2由条件(8.1.38)确定，即

$$\begin{cases}C_1=0,\\C_2\cos\sqrt{\lambda}\,l=0.\end{cases}$$

由此仍然得出没有意义的解$C_1=0$，$C_2=0$，从而$X(x)\equiv 0$，除非是$\cos\sqrt{\lambda}\,l=0$. 在$\cos\sqrt{\lambda}\,l=0$的条件下，C_2是任意常数. 条件$\cos\sqrt{\lambda}\,l=0$，即$\sqrt{\lambda}\,l=(k+\frac{1}{2})\pi\ (k=0,1,2,\cdots)$，亦即

$$\lambda=\frac{(k+\frac{1}{2})^2\pi^2}{l^2}=\frac{(2k+1)^2\pi^2}{4l^2}\quad(k=0,1,2,\cdots).\tag{8.1.40}$$

(8.1.40)给出本征值，相应的本征函数是

$$X(x)=C_2\sin\frac{(2k+1)\pi}{2l}x\quad(k=0,1,2,\cdots).\tag{8.1.41}$$

再看关于T的方程(8.1.39). 根据(8.1.40)，这应改写成

$$T'+a^2\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}{l^2}T=0.$$

这个方程的解是

$$T(t)=Ce^{-\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2a^2t}{l^2}}.\tag{8.1.42}$$

本例的本征函数(8.1.41)即$\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}$既不同于第一类齐次边界条件的$\sin\frac{n\pi x}{l}$，又不同于第二类齐次边界条件的$\cos\frac{n\pi x}{l}$. 其实，边界条件$u_x|_{x=l}=0$表明，应当把导热细杆从区间$(0,l)$偶延拓到区间$(l,2l)$上. 延拓后，条件是$u|_{x=0}=0$，$u_x|_{x=l}=0$，$u|_{x=2l}=0$. 第一个和第三个条件决定了本征函数是$\sin\frac{n\pi x}{2l}$，其中$n$

是整数. 第二个条件则限制了整数 n 只能是奇数，这是因为 $\left(\sin\frac{n\pi x}{2l}\right)'\Big|_{x=l}=\frac{n\pi}{2l}\cos\frac{n\pi}{2}$，而如果 n 是偶数则 $\cos\frac{n\pi}{2}$ 并不等于零. 这样，本征函数应是 $\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}$ 即(8.1.41).

这样，$u(x,t)$的解一般应是

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}C_k e^{-\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2a^2t}{l^2}}\sin\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}. \qquad (8.1.43)$$

系数 C_k 应由初始条件(8.1.35)确定. 因此，以(8.1.43)代入(8.1.35)，

$$\sum_{k=0}^{\infty}C_k\sin\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}=\frac{u_0}{l}x \quad (0<x<l). \qquad (8.1.44)$$

(8.1.44)左边是以 $\sin\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}$ 为基本函数族的级数，这提示我们应把右边的(u_0x/l)也以 $\sin\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}$ 为基本函数族展开为级数(这其实就是在区间$(0,2l)$上展开为傅里叶正弦级数)，然后比较两边的系数，得

$$\begin{aligned}C_k&=\frac{2}{l}\int_0^l\frac{u_0}{l}\xi\sin\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\xi}{l}d\xi\\&=\frac{2u_0}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}\left[\sin\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\xi}{l}\right.\\&\qquad\left.-\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\xi}{l}\cos\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\xi}{l}\right]_0^l=(-1)^k\frac{2q_0l}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}.\end{aligned}$$

于是，得到答案

$$u(x,t)=\frac{2u_0}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}e^{-\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2a^2}{l^2}t}\sin\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}.$$

(8.1.45)

应当着重指出：如果考虑早先的时刻即考虑 $t<0$，则

$$e^{-\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2a^2t}{l^2}}$$

随 k 的增大而急剧增大，从而级数解(8.1.45)发散，成为无意义．这是可以理解的．因为杆上温度分布总是趋于某种平衡状态，而且只要边界条件相同，不管初始温度分布是怎样的，总是趋于同一平衡状态，所以从某个时刻的温度分布可以推算以后时刻的温度分布，却**不能反推**早先时刻的温度分布．其实，其他输运过程，例如扩散，也是如此．这是输运过程不同于振动过程的地方．

另一方面，对于以后的时刻，$t>0$，则

$$e^{-\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2a^2t}{l^2}}$$

随 k 的增大而急剧减小，从而级数解(8.1.45)收敛得很快．t 越大，级数收敛越快．在 $t>0.18l^2/a^2$ 时，可以只保留 $k=0$ 的项而略去 $k>0$的项，其误差不超过 1%，

$$u(x,t)=\frac{8u_0}{\pi^2}e^{-\frac{\pi^2a^2}{4l^2}t}\sin\frac{\pi x}{2l}.$$

下一个例子是关于稳定场的．

例 3　散热片的横截面为矩形(图 8-2)．它的一边 $y=b$ 处于较高温度 U，其他三边 $y=0$，$x=0$ 和 $x=a$ 则处于冷却介质中因而保持较低的温度 u_0．求解这横截面上的稳定温度分布 $u(x,y)$，即定解问题

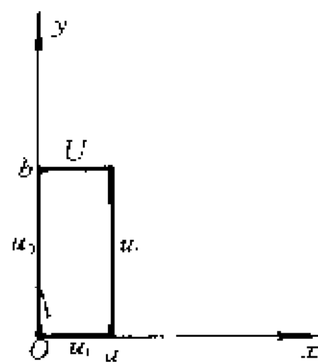


图 8-2

$$u_{xx}+u_{yy}=0; \tag{8.1.46}$$

$$u|_{x=0}=u_0,\ u|_{x=a}=u_0\quad(0<y<b); \tag{8.1.47}$$

$$u|_{y=0}=u_0,\ u|_{y=b}=U\quad(0<x<a). \tag{8.1.48}$$

解 这是二维拉普拉斯方程的第一类边界值问题. 由于不含初始条件,拉普拉斯方程的边界条件不可能全是齐次的,因为这种条件下的解只能是零. 但是,尽可能把一些边界条件化为齐次,毕竟会带来一些方便. 常用的办法是把 $u(x,y)$ 分解为 $v(x,y)$ 和 $w(x,y)$ 的线性叠加,

$$u(x,y)=v(x,y)+w(x,y)$$

v 和 w 分别满足拉普拉斯方程,并各有一组齐次边界条件,即

$v_{xx}+v_{yy}=0;$	$w_{xx}+w_{yy}=0;$
$v\|_{x=0}=u_0, v\|_{x=a}=u_0;$	$w\|_{x=0}=0, w\|_{x=a}=0;$
$v\|_{y=0}=0, v\|_{y=b}=0;$	$w\|_{y=0}=u_0, w\|_{y=b}=U.$

很容易验证,把 v 和 w 的泛定方程叠加起来确是 u 的泛定方程,把 v 和 w 的边界条件叠加起来确是 u 的边界条件. 于是,问题转化为求解 v 和 w,而 v 和 w 各有两个齐次边界条件足以构成本征值问题,不难分别解出.

其实,本例还有一个特殊的简便方法,就是令

$$u(x,y)=u_0+v(x,y) \tag{8.1.49}$$

这只不过是把温标移动一下,把原来的 u_0 作为新温标 $v(x,y)$ 的零点. 以(8.1.49)代入(8.1.46)~(8.1.48),得

$$v_{xx}+v_{yy}=0; \tag{8.1.50}$$

$$v|_{x=0}=0, v|_{x=a}=0; \tag{8.1.51}$$

$$v|_{y=0}=0, v|_{y=b}=U-u_0. \tag{8.1.52}$$

以分离变数形式的试探解

$$v(x,y)=X(x)Y(y)$$

代入泛定方程(8.1.50)和齐次边界条件(8.1.51),可得 X 和 Y 的常微分方程以及 X 的边界条件:

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0, \\ X(0)=0, X(a)=0; \end{cases} \tag{8.1.53}$$

$$Y''-\lambda Y=0. \tag{8.1.54}$$

(8.1.53)构成本征值问题. 不难解得本征值

$$\lambda=\frac{n^2\pi^2}{a^2}\quad(n=1,2,3,\cdots),\qquad(8.1.55)$$

本征函数

$$X(x)=C\sin\frac{n\pi x}{a}.\ (n=1,2,3,\cdots)\qquad(8.1.56)$$

将本征值(8.1.55)代入方程(8.1.54),解得

$$Y(y)=Ae^{\frac{n\pi}{a}y}+Be^{-\frac{n\pi}{a}y}$$

这样,分离变数形式的解已求出为

$$v_n(x,y)=(A_ne^{\frac{n\pi}{a}y}+B_ne^{-\frac{n\pi}{a}y})\sin\frac{n\pi}{a}x,$$

称为本征解.一般解 $v(x,y)$ 应是这些本征解的叠加,

$$v(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_ne^{\frac{n\pi y}{a}}+B_ne^{-\frac{n\pi y}{a}}\right)\sin\frac{n\pi}{a}x\qquad(8.1.57)$$

为确定系数 A_n 和 B_n,以(8.1.57)代入非齐次边界条件(8.1.52),

$$\begin{cases}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(A_n+B_n)\sin\dfrac{n\pi}{a}x=0,\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(A_ne^{\frac{n\pi b}{a}}+B_ne^{-\frac{n\pi b}{a}}\right)\sin\dfrac{n\pi}{a}x=U-u_0.\end{cases}$$

把右边展开为傅里叶正弦级数,然后比较两边系数,即得

$$\begin{cases}A_n+B_n=0,\\ A_ne^{\frac{n\pi b}{a}}+B_ne^{-\frac{n\pi b}{a}}=\begin{cases}0 & (n\ 为偶数),\\ \dfrac{4}{n\pi}(U-u_0) & (n\ 为奇数).\end{cases}\end{cases}$$

由此解出

$$A_n=-B_n=\begin{cases}0 & (n\ 为偶数),\\ 4(U-u_0)/n\pi(e^{n\pi b/a}-e^{-n\pi b/a}) & (n\ 为奇数).\end{cases}$$

于是,得到答案

$$u(x,y)=u_0+\frac{4(U-u_0)}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)}$$

$$\times\frac{\operatorname{sh}\frac{(2k+1)\pi y}{a}}{\operatorname{sh}\frac{(2k+1)\pi b}{a}}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{a}.$$

下一个例题是平面极坐标系的分离变数法.

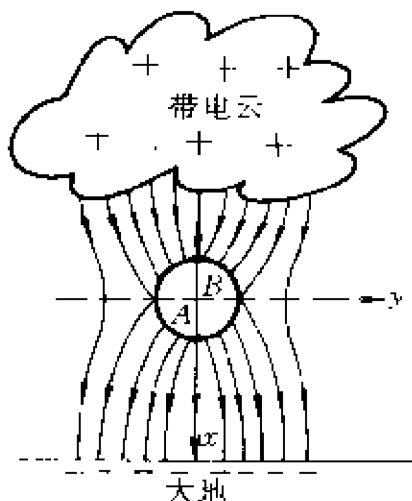


图 8-3a

例 4 带电的云跟大地之间的静电场近似是匀强静电场，其电场强度 E_0 是竖直的. 水平架设的输电线处在这个静电场之中(图 8-3a). 输电线是导体圆柱. 柱面由于静电感应出现感应电荷，圆柱邻近的静电场也就不再是匀强的了. 不过，离圆柱"无限远"处的静电场仍保持为匀强的. 现在研究导体圆柱怎样改变了匀强静电场.

首先需要把这个物理问题表为定解问题. 取圆柱的轴为 z 轴. 如果圆柱"无限长"，那么，这个静电场的电场强度、电势显然跟 z 无关，我们只需在 xy 平面上加以研究就够了. 图 8-3a 画的正是 xy 平面上的静电场，圆柱面在 xy 平面的剖口是圆 $x^2+y^2=a^2$，其中 a 是圆柱的半径.

柱外的空间中没有电荷，所以电势 u 满足二维的拉普拉斯方程

$$u_{xx}+u_{yy}=0 \quad (\text{在柱外}).$$

导体中的电荷既然不再移动，这说明导体中各处电势相同. 又因为电势只具有相对的意义，完全可以把导体的电势当作零，从而写出边界条件

$$u\big|_{x^2+y^2=a^2}=0.$$

按照分离变数法，以 $u(x,y)=X(x)Y(y)$ 代入拉普拉斯方程固然不难把它分解为两个常微分方程，但代入上述边界条件却只能得到

$$X(x)Y(\sqrt{a^2-x^2})=0$$

不能分解为 $X(x)$ 或 $Y(y)$ 的边界条件. 事实上,既然边界是圆,直角坐标系显然是不适当的,必须采用平面极坐标系.

拉普拉斯方程在极坐标系中的表达式见微积分教本或§5 习题 3 的答案."柱外空间中的电势 u 满足拉普拉斯方程"就表为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0 \quad (\rho>a), \tag{8.1.58}$$

式中 ρ 是极径,φ 是极角."导体电势为零"就表为齐次的边界条件

$$u|_{\rho=a}=0 \tag{8.1.59}$$

在"无限远"处的静电场仍然保持为匀强的 $\boldsymbol{E}_0$. 由于选取了 x 轴平行于 $\boldsymbol{E}_0$,所以在无限远处,$E_y=0, E_x=E_0$,即 $-\partial u/\partial x=E_0$,亦即 $u=-E_0x=-E_0\rho\cos\varphi$. 因而还有一个非齐次的边界条件

$$u|_{\rho\to\infty}\sim -E_0\rho\cos\varphi. \tag{8.1.60}$$

问题就在于求解定解问题(8.1.58)~(8.1.60).

解 以分离变数形式的试探解

$$u(\rho,\varphi)=R(\rho)\Phi(\varphi)$$

代入拉普拉斯方程(8.1.58),得

$$\frac{1}{R}\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right)=-\frac{1}{\Phi}\Phi''.$$

上式左边是 ρ 的函数,与 φ 无关;右边是 φ 的函数,与 ρ 无关. 两边不可能相等,除非两边实际上是同一个常数. 把这常数记作 λ,

$$-\frac{1}{\Phi}\Phi''=\lambda=\frac{1}{R}\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}(\rho\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}).$$

这就分解为两个常微分方程

$$\Phi''+\lambda\Phi=0, \tag{8.1.61}$$

$$\rho^2R''+\rho R'-\lambda R=0. \tag{8.1.62}$$

常微分方程(8.1.61)隐含着一个附加条件. 事实上,一个确定地点的极角可以加减 2π 的整倍数,而电势 u 在确定的地点应具确定数值,所以 $u(\rho,\varphi+2\pi)=u(\rho,\varphi)$,即 $R(\rho)\Phi(\varphi+2\pi)=R(\rho)\Phi$

(φ)，亦即

$$\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi). \tag{8.1.63}$$

这叫作**自然的周期条件**. 常微分方程(8.1.61)与条件(8.1.63)构成本征值问题. 读者不难求得方程(8.1.61)的解为

$$\Phi(\varphi)=\begin{cases}A\cos\sqrt{\lambda}\,\varphi+B\sin\sqrt{\lambda}\,\varphi, & (\lambda>0)\\ A+B\varphi & (\lambda=0)\\ Ae^{\sqrt{-\lambda}\varphi}+Be^{-\sqrt{-\lambda}\varphi}. & (\lambda<0)\end{cases} \tag{8.1.64}$$

从而，求得本征值和本征函数

$$\lambda=m^2 \qquad (m=0,1,2,\cdots) \tag{8.1.65}$$

$$\Phi(\varphi)=\begin{cases}A\cos m\varphi+B\sin m\varphi, & (m\neq 0)\\ A. & (m=0)\end{cases} \tag{8.1.66}$$

以本征值(8.1.65)代入常微分方程(8.1.62)，

$$\rho^2\frac{d^2R}{d\rho^2}+\rho\frac{dR}{d\rho}-m^2R=0 \tag{8.1.67}$$

这是欧勒型常微分方程，作代换 $\rho=e^t$，即 $t=\ln\rho$，方程化为

$$\frac{d^2R}{dt^2}-m^2R=0.$$

其解为

$$R=\begin{cases}Ce^{mt}+De^{-mt}=C\rho^m+D\dfrac{1}{\rho^m}, & (m\neq 0)\\ C+Dt=C+D\ln\rho. & (m=0)\end{cases}$$

这样，分离变数形式的解是

$$u_0(\rho,\varphi)=C_0+D_0\ln\rho,$$

$$u_m(\rho,\varphi)=\rho^m(A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi)$$
$$+\rho^{-m}(C_m\cos m\varphi+D_m\sin m\varphi).$$

拉普拉斯方程是线性的，它的一般解应是所有本征解的叠加，即

$$u(\rho,\varphi)=C_0+D_0\ln\rho$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}\rho^m(A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi)$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\rho^{-m}(C_m\cos m\varphi+D_m\sin m\varphi). \qquad (8.1.68)$$

为确定(8.1.68)中的系数，把(8.1.68)代入边界条件. 先代入齐次边界条件(8.1.59)，

$$C_0+D_0\ln a+\sum_{m=1}^{\infty}a^m(A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi)$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}a^{-m}(C_m\cos m\varphi+D_m\sin m\varphi)=0.$$

一个傅里叶级数等于零，意味着所有傅里叶系数为零，即

$$C_0+D_0\ln a=0, a^mA_m+a^{-m}C_m=0, a^mB_m+a^{-m}D_m=0.$$

由此，

$$C_0=-D_0\ln a, C_m=-A_ma^{2m}, D_m=-B_ma^{2m} \qquad (8.1.69)$$

再研究非齐次的边界条件(8.1.60)，这里着重研究 u 的主要部分. 对于很大的 ρ，(8.1.68)中的 $C_0+D_0\ln\rho$ 和 ρ^{-m} 项远远小于 ρ^m 项而可略去. 因此，以(8.1.68)代入(8.1.60)的结果是

$$\sum_{m=1}^{\infty}\rho^m(A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi)\sim-E_0\rho\cos\varphi \qquad (8.1.70)$$

既然主要部分是 ρ^1 项，可见在(8.1.70)中不应出现 $\rho^m(m>1)$ 的项(否则 ρ^m 项就成了主要部分). 这是说，

$$A_m=0, \quad B_m=0. \quad (m>1)$$

就 ρ^1 项而论，从(8.1.70)知

$$A_1=-E_0, \quad B_1=0$$

从而，$C_1=-A_1a^2=E_0a^2$，$C_m=0 \quad (m>1)$，$D_m=0 \quad (m\geqslant1)$.

最后得柱外的静电势为

$$u(\rho,\varphi)=D_0\ln\frac{\rho}{a}-E_0\rho\cos\varphi+E_0\frac{a^2}{\rho}\cos\varphi. \qquad (8.1.71)$$

简单谈谈所得解答(8.1.71)的物理含义. 当中一项，即 $-E_0\rho\cos\varphi$ 正是原来的匀强静电场中的电势分布. 最后一项，即 $E_0(a^2/\rho)\cos\varphi$ 对于大的 ρ 可以忽略，所以它代表在圆柱邻近对匀强电场的修正，这自然是柱面感应电荷的影响. 此外，还有 $D_0\ln(\rho/$

a)项，它的系数 D_0 又是任意常数，这表明解答(8.1.71)包含着某个不确定的因素. 从物理上检查，这个不确定因素就在于问题提出时根本没有说明导体柱原来所带的电量，可见 $D_0\ln(\rho/a)$正是圆柱原来所带电量的影响(从静电学知道，$D_0\ln(\rho/a)$正是均匀带电圆柱体周围的静电场中的电势).

讨论 设圆柱体原来并不带电，从而 $D_0=0$，(8.1.70)这时只含两项

$$u(\rho,\varphi)=-E_0\rho\cos\varphi+E_0\frac{a^2}{\rho}\cos\varphi. \qquad (8.1.72)$$

在图 8—3a 的 A 点和 B 点的电场强度是

$$E=-\frac{\partial u}{\partial\rho}\bigg|_{\substack{\rho=a\\ \varphi=0,\pi}}=\left(E_0\cos\varphi+E_0\frac{a^2}{\rho^2}\cos\varphi\right)\bigg|_{\substack{\rho=a\\ \varphi=0,\pi}}=\pm 2E_0,$$

是原来的匀强电场的两倍！所以在这两处特别容易击穿. 而且不管圆柱的半径多么小，这个结论总是对的！

在图 8-3a 的 y 轴上的电势是

$$u\bigg|_{\varphi=\pm\pi/2}=\left(-E_0\rho\cos\varphi+E_0\frac{a^2}{\rho}\cos\varphi\right)\bigg|_{\varphi=\pm\pi/2}=0,$$

跟导体圆柱的电势相同. 图 8-3a 的 y 轴实际上代表三维空间里的 yz 平面，因此 yz 平面的电势跟导体圆柱的电势相同. 既然导体圆柱跟 yz 平面电势相同，如果让导体圆柱的两侧沿 yz 平面伸出两翼(图 8-3b)，静电场并不改变，电势分布仍然是(8.1.72).

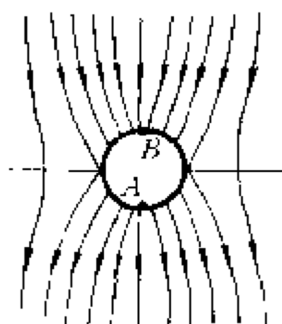


图 8-3b

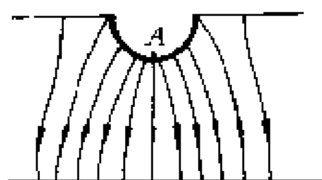


图 8-3c

要是只看带翼圆柱体的下方(图 8-3b 的下半幅，亦即图 8-

3c)，那么这可以说是平行板电容器两极板之间的静电场，只是上极板带有半圆柱形突起. 如果远离突起的电场强度是 E_0，则突起最高处的电场强度总是 E_0 的两倍. 对于高压电容器来说，这容易导致击穿，因此高压电容器的极板必须刨得非常平滑.

下一个例子是所谓"没有初始条件的问题".

例 5 长为 l 的理想传输线，一端 $x=0$ 接于交流电源，其电动势为 $v_0\sin\omega t$. 另一端 $x=l$ 是开路. 求解线上的稳恒电振荡.

"稳恒电振荡"是什么意思？原来，理想传输线是一种理想化的模型，实际上总是存在损耗，所以初始条件所引起的自由振荡总是逐渐衰减. 经过交流电的许多周期之后，自由振荡衰减殆尽. 这时的电振荡完全是交流电源引起的. 交流电源提供的能量正好补偿了损耗，所以这种振荡得以维持一定的幅度而无衰减，这就是所谓稳恒电振荡.

解 既然初始条件所引起的自由振荡已衰减殆尽，在这种问题中当然不必考虑初始条件. 因此，这里求解的是没有初始条件的问题.

$$\begin{cases} v_{tt}-a^2v_{xx}=0, \quad (a^2=1/LC) & (8.1.73) \\ v|_{x=0}=v_0e^{i\omega t}, & (8.1.74) \\ j|_{x=l}=0. & (8.1.75) \end{cases}$$

为了计算的简便，在边界条件(8.1.74)中，$v_0\sin\omega t$ 即 $\mathrm{Im}(v_0e^{i\omega t})$ 改写成了 $v_0e^{i\omega t}$. 这样作是可以的，由于方程和边界条件都是线性的，我们只要取最后结果的虚部就行了.

稳恒振荡完全由交流电源引起，所以周期必与交流电源相同，故

$$v(x,t)=X(x)e^{i\omega t}. \qquad (8.1.76)$$

以(8.1.76)代入偏微分方程(8.1.73)可得 X 的常微分方程

$$X''+(\omega^2LC)X=0.$$

其解是

$$X(x)=Ae^{i\omega\sqrt{LC}x}+Be^{-i\omega\sqrt{LC}x},$$

因而

$$v(x,t)=Ae^{\mathrm{i}\omega(t+\sqrt{LC}\,x)}+Be^{\mathrm{i}\omega(t-\sqrt{LC}\,x)}. \qquad (8.1.77)$$

(8.1.77)的第二项是从电源端发出的波，第一项则是反射波．

系数 A 和 B 由边界条件确定．但边界条件中出现电流 j，所以我们还需要 j 的表达式．在(7.1.10)中，置 $R=0, G=0$，即得 $j_x=-Cv_t, j_t=-(1/L)v_x$.

利用这两个关系式求得与(8.1.76)相应的电流

$$j(x,t)=-\sqrt{\frac{C}{L}}Ae^{\mathrm{i}\omega(t+\sqrt{LC}\,x)}+\sqrt{\frac{C}{L}}Be^{\mathrm{i}\omega(t-\sqrt{LC}\,x)}. \qquad (8.1.78)$$

现在，把(8.1.77)和(8.1.78)分别代入边界条件(8.1.74)和(8.1.75)，得

$$\begin{cases} A+B=v_0, \\ Ae^{\mathrm{i}\omega\sqrt{LC}\,l}-Be^{-\mathrm{i}\omega\sqrt{LC}\,l}=0. \end{cases}$$

由此解出

$$A=\frac{v_0}{1+e^{\mathrm{i}2\omega\sqrt{LC}\,l}}, \quad B=\frac{v_0}{1+e^{-\mathrm{i}2\omega\sqrt{LC}\,l}}. \qquad (8.1.79)$$

这样，传输线上的稳恒振荡为(8.1.77)和(8.1.78)给出，其中系数 A 和 B 则由(8.1.79)给出．

在输入端(交流电源端)的电压 $v|_{x=0}$ 同电流 $j|_{x=0}$ 之比叫作传输线的**输入阻抗** $Z_{输入}$．按照(8.1.77)和(8.1.78)

$$Z_{输入}=v_{x=0}:j|_{x=0}=\sqrt{\frac{L}{C}}\frac{A+B}{A-B}=-\sqrt{\frac{L}{C}}\mathrm{i}\,\mathrm{ctg}(\omega\ \sqrt{FC}l).$$

(8.1.80)

一个有趣的情况是

$$l=\frac{1}{4}波长=\frac{1}{4}\frac{波速}{频率}=\frac{1}{4}\frac{a}{\omega/2\pi}=\frac{\pi}{2\omega\sqrt{LC}}$$

在这种情况下，(8.1.80)给出

$$Z_{输入}=-\sqrt{\frac{L}{C}}\mathrm{i}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{2}=0.$$

这样，长度为 1/4 波长的传输线接在交流电源上，另一端开路，从交流电源一方看过来，这段传输线竟然相当于一个短路元件.

习　　题

1. 长为 l 的弦，两端固定，弦中张力为 T. 在距一端为 x_0 的一点以力 F_0 把弦拉开，然后突然撤除这力. 求解弦的振动.

2. 求解细杆导热问题，杆长 l，两端保持为零度，初始温度分布

$$u|_{t=0}=bx(l-x)/l^2.$$

3. 两端固定弦，长为 l. ①用宽为 2δ 的平面锤敲击弦的 $x=x_0$ 点. ②用宽为 2δ 的余弦式凸面锤敲击弦的 $x=x_0$. 求解弦的振动.

4. 长为 l 的均匀杆，两端受压从而长度缩为 $l(1-2\varepsilon)$. 放手后自由振动，求解杆的这一振动.

5. 长为 l 的杆，一端固定，另一端受力 F_0 而伸长. 求解杆在放手后的振动.

6. 长为 l 的理想传输线，远端开路. 先把传输线充电到电位差 v_0，然后把近端短路. 求解线上电压 $v(x,t)$.

7. 长为 l 的杆，上端固定在电梯天花板，杆身竖直，下端自由. 电梯下降，当速度为 v_0 时突然停止. 求解杆的振动.

8. 在铀块中，除了中子的扩散运动以外，还进行着中子的增殖过程，每秒钟在单位体积中产生的中子数正比于该处的中子浓度 u，从而可表为 βu (β 是表示增殖快慢的常数). 研究厚度为 l 的层状铀块. 求临界厚度. (铀块厚度超过临界厚度，则中子浓度将随着时间而增长以致铀块爆炸. 原子弹里就是这么回事.)

9. 求解薄膜的恒定表面浓度扩散问题. 薄膜厚度为 l，杂质从两面进入薄膜. 由于薄膜周围气氛中含有充分的杂质，薄膜表面上的杂质浓度得以保持为恒定的 N_0，对于较大的 t，把所得答案简化.

10. 把上题改为限定源扩散. 这是说，薄膜两面的表层已含有一定的杂质，比方说，每单位表面积下杂质总量 Φ_0，但此外不再有杂质进入薄膜.

11. 在矩形区域 $0<x<a$，$0<y<b$ 上求解拉普拉斯方程 $\Delta u=0$ 使满足边界条件 $u|_{x=0}=A(b-y)$，$u|_{x=a}=0$，$u|_{y=0}=B\sin\frac{\pi x}{a}$，$u|_{y=b}=0$.

12. 均匀的薄板占据区域 $0<x<a$，$0<y<\infty$. 边界上的温度

$$u|_{x=0}=0,u|_{x=a}=0,u|_{y=0}=u_0,\lim_{y\to\infty}u=0.$$

求解板的稳定温度分布.

13. 在带状区域 $0<x<a,0<y<\infty$ 上求解 $\Delta u=0$ 使

$$u|_{x=0}=0,u|_{x=a}=0,u|_{y=0}=A\left(1-\frac{x}{a}\right),\lim_{y\to\infty}u=0.$$

14. 矩形膜,边长为 l_1 和 l_2,边缘固定.求它的本征振动模式.

15. 细圆环,半径为 ρ_0,初始温度分布已知为 $f(\varphi)$,φ 是以环心为极点的极角.环的表面是绝热的.求解环内温度变化情况.

16. 在圆形域内求解 $\Delta u=0$ 使满足边界条件①$u|_{\rho=\rho_0}=A\cos\varphi$,

②$u|_{\rho=\rho_0}=A+B\sin\varphi$.

17. 半圆形薄板,半径为 ρ_0,板面绝热,边界直径上温度保持零度,圆周上保持 u_0.求稳定状态下的板上温度分布.

18. 把例 4 的导体圆柱换为介质圆柱,介质的介电常数为 ε.求解柱内外的电场.[提示:柱内电势必须有限.在柱面上,电势连续,电位移的法向分量连续.]

19. 半径为 a,表面熏黑了的均匀长圆柱,在温度为零度的空气中受着阳光照射.阳光垂直于柱轴,热流强度为 q.试求柱内稳定温度分布.[提示:泛定方程为 $\Delta u=0$,边界条件为 $(ku_\rho+Hu)|_{\rho=a}=f(\varphi)$,$f(\varphi)$ 是热流强度的法向分量.如取极轴垂直于阳光,则

$$f(\varphi)\equiv\begin{cases}q\sin\varphi & (0<\varphi<\pi),\\ 0 & (\pi<\varphi<2\pi).\end{cases}]$$

20. 在以原点为心,以 ρ_1 和 ρ_2 为半径的两个同心圆所围成的环域上求解 $\Delta u=0$ 使满足边界条件 $u|_{\rho=\rho_1}=f_1(\varphi),u|_{\rho=\rho_2}=f_2(\varphi)$.

21. 求解绕圆柱的水流问题.在远离圆柱因而未受圆柱干扰处的水流是均匀的,流速为 v_0.圆柱半径为 a.

22. 长为 l 的理想传输线,一端接于电动势为 $v_0\sin\omega t$ 的交流电源,另一端短路.求解线上的稳恒电振荡并计算输入阻抗.

23. 长为 l 的非理想传输线,一端接于交流电源 $v_0\sin\omega t$,另一端通过阻抗元件 R_0,L_0 和 C_0 而相接.求解线上的稳恒电振荡.在怎样的条件下不存在反射波(这叫作**匹配**)?

24. 长为 l 的均匀杆,一端固定,另一端在纵向力 $F(t)=F_0\sin\omega t$ 长期作用下.求解杆的稳恒振动.

25. 一长为 l 的均匀导热细杆，杆上有热源，单位长度杆上的热源强度为 $c\rho\beta u.$ $(\beta>0)$，$x=0$ 端绝热，$x=l$ 端保持摄氏零度，初始温度分布为 $u_0x(x-l)$，试求杆上各处温度如何随时间变化的？其中 c 为杆的比热，ρ 为杆的线密度．u_0 为常数．侧面绝热．

26. 一圆环形区域，内外环半径分别为 ρ_1 和 ρ_2，内环上保持温度为 $u_1\cos^2\varphi$，外环上保持温度为 $u_2\sin\varphi$．求此圆环区域内的稳定温度分布．

27. 一长为 l，截面积为 S 的均匀细杆，今将 $x=0$ 端保持为摄氏零度，$x=l$ 端按牛顿冷却定律向温度为零度的媒质散热，侧面绝热，原先杆的温度为 u_0，求在冷却过程中杆上各处温度的变化．

§8.2　非齐次振动方程和输运方程

上一节研究了齐次方程的定解问题．本节要研究非齐次振动方程和输运方程的定解问题．

我们仍然限于齐次的边界条件．关于非齐次边界条件的处理请看§8.3．

本节先介绍傅里叶级数法，它直接求解非齐次方程的定解问题．接着是冲量定理法，它把非齐次方程的定解问题转化为齐次方程的定解问题然后求解．

（一）傅里叶级数法

§8.1中求解两端固定的弦的齐次振动方程定解问题，得到的解(8.1.14)具有傅里叶正弦级数的形式，而且其系数 A_n 和 B_n 决定于初始条件 $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的傅里叶正弦级数(8.1.15)．至于采取正弦级数而不是一般的傅里叶级数的形式，则完全是由于边界条件 $u|_{x=0}=0$ 和 $u|_{x=l}=0$．

分离变数法得出的这些结果给出提示：不妨把所求的解本身展开为傅里叶级数，即

$$u(x,t)=\sum_n T_n(t)X_n(x).\qquad(8.2.1)$$

傅里叶级数(8.2.1)的基本函数族 $X_n(x)$ 为该定解问题齐次方程

在所给齐次边界条件下的本征函数.

由于解是自变数 x 和 t 的函数，因而 $u(x,t)$ 的傅里叶系数不是常数，而是时间 t 的函数，把它记作 $T_n(t)$. 将待定解(8.2.1)代入泛定方程，尝试分离出 $T_n(t)$ 的常微分方程，然后求解.

例 1 求解定解问题

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=A\cos\frac{\pi x}{l}\sin\omega t; \tag{8.2.2}$$

$$u_x|_{x=0}=0,\quad u_x|_{x=l}=0; \tag{8.2.3}$$

$$u|_{t=0}=\varphi(x),\quad u_t|_{t=0}=\psi(x).\qquad (0<x<l) \tag{8.2.4}$$

解 级数展开的基本函数应是相应的齐次泛定方程 $u_{tt}-a^2u_{xx}=0$ 在所给边界条件 $u_x|_{x=0}=0$ 和 $u_x|_{x=l}=0$ 下的本征函数. 我们已经熟悉这些本征函数，它们是 $\cos\frac{n\pi x}{l}(n=0,1,2,\cdots)$. 这样，试把所求的解展开为傅里叶余弦级数

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)\cos\frac{n\pi x}{l}.$$

为了求解 $T_n(t)$，尝试把这个级数代入泛定方程，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[T_n''+\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T_n\right]\cos\frac{n\pi x}{l}=A\cos\frac{\pi x}{l}\sin\omega t.$$

左边是傅里叶余弦级数，这提示我们把右边也展开为傅里叶余弦级数. 其实，右边已经是傅里叶余弦级数，它只有一个单项即 $n=1$ 的项. 于是，比较两边的系数，分离出 $T_n(t)$ 的常微分方程

$$T_1''+\frac{\pi^2a^2}{l^2}T_1=A\sin\omega t,\qquad T_n''+\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T_n=0(n\neq1).$$

又把 $u(x,t)$ 的傅里叶余弦级数代入初始条件，得

$$\sum_{n=0}^{\infty}T_n(0)\cos\frac{n\pi}{l}x=\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n\cos\frac{n\pi}{l}x, \tag{8.2.5}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}T_n'(0)\cos\frac{n\pi}{l}x=\psi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n\cos\frac{n\pi}{l}x. \tag{8.2.6}$$

其中 φ_n、ψ_n 分别为 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的傅里叶余弦级数[以 $\cos(n\pi x/l)$

为基本函数族]的第 n 个傅里叶系数. 等式(8.2.5)、(8.2.6)两边都是傅里叶余弦级数. 由于基本函数族 $\cos(n\pi x/l)$ 的正交性，等式两边对应同一基本函数的傅里叶系数必然相等，于是得 $T_n(t)$ 的非零值初始条件

$$\begin{cases} T_0(0)=\varphi_0=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_0^l \varphi(\xi)\mathrm{d}\xi, \\ T'_0(0)=\psi_0=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_0^l \psi(\xi)\mathrm{d}\xi; \end{cases}$$
$$\begin{cases} T_n(0)=\varphi_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l \varphi(\xi)\cos\frac{n\pi\xi}{l}\mathrm{d}\xi, \\ T'_n(0)=\psi_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l \psi(\xi)\cos\frac{n\pi\xi}{l}\mathrm{d}\xi. \end{cases} \quad (n\neq 0) \tag{8.2.7}$$

$T_n(t)$ 的常微分方程在初始条件(8.2.7)下的解是

$$T_0(t)=\varphi_0+\psi_0 t, \tag{8.2.8}$$

$$T_1(t)=\frac{Al}{\pi a}\frac{1}{\omega^2-\pi^2a^2/l^2}\left(\omega\sin\frac{\pi at}{l}-\frac{\pi a}{l}\sin\omega t\right)+\varphi_1\cos\frac{\pi at}{l}+\frac{l}{\pi a}\psi_1\sin\frac{\pi at}{l}, \tag{8.2.9}$$

$$T_n(t)=\varphi_n\cos\frac{n\pi at}{l}+\frac{l}{n\pi a}\psi_n\sin\frac{n\pi at}{l}. \quad (n\neq 0,1) \tag{8.2.10}$$

(8.2.9)的第一项为 $T_1(t)$ 的非齐次常微分方程的特解，满足零值初始条件. (8.2.9)的后两项之和及(8.2.10)分别为 $T_1(t)$ 和 $T_n(t)$ $(n\neq 0,1)$ 的齐次常微分方程的解，满足非零值初始条件(8.2.7).

这样，所求的解是

$$u(x,t)=\frac{Al}{\pi a}\cdot\frac{1}{\omega^2-\pi^2a^2/l^2}\left(\omega\sin\frac{\pi at}{l}-\frac{\pi a}{l}\sin\omega t\right)\cos\frac{\pi x}{l}+\varphi_0+\psi_0 t+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_n\cos\frac{n\pi at}{l}+\frac{l}{n\pi a}\psi_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\cos\frac{n\pi x}{l}. \tag{8.2.11}$$

尝试成功了. 这个方法叫做傅里叶级数法. 很明显，这个方法

的关键在于分离出 $T_n(t)$ 的常微分方程，其中不可混杂着另一自变数 x，这是怎样做到的呢？原来，这个级数展开的基本函数 $\cos(n\pi x/l)$ 正是相应齐次方程、齐次边界条件下用分离变数法求得的本征函数，这才得以分离出 $T_n(t)$ 的常微分方程.

齐次振动方程和齐次输运方程问题当然也可以用傅里叶级数法（结合分离变数法）求解，这时得到的 $T_n(t)$ 的常微分方程为齐次方程，求解更容易. 建议读者用这样的方法重新求解上节的定解问题(8.1.1)～(8.1.3)以及例 1 和例 2，这里就不赘述了.

综上所述，可以看出，对于振动和输运问题，不论齐次还是非齐次方程定解问题，傅里叶级数法结合分离变数法均可应用. 如仅用分离变数法，则只能用于齐次方程定解问题.

（二）冲量定理法

求解非齐次振动方程和输运方程定解问题还可用冲量定理法. 这里仍然考虑边界条件是齐次的. 应用冲量定理法有一个前提，即初始条件均取零值. 这其实无损于一般性. 现以两端固定弦的受迫振动为例，如果初始条件是非零值，则定解问题为

$$\begin{aligned} &u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t),\\ &u|_{x=0}=0, \quad u|_{x=l}=0,\\ &u|_{t=0}=\varphi(x), \quad u_t|_{t=0}=\psi(x). \end{aligned}$$

由于泛定方程和定解条件都是线性的，可以利用叠加原理，把 u 分解为 u^{I} 与 u^{II} 之和，即

$$u(x,t)=u^{\mathrm{I}}(x,t)+u^{\mathrm{II}}(x,t).$$

并令 u^{I}、u^{II} 分别满足

$$\left.\begin{aligned} &u^{\mathrm{I}}_{tt}-a^2u^{\mathrm{I}}_{xx}=0,\\ &u^{\mathrm{I}}|_{x=0}=0, \quad u^{\mathrm{I}}|_{x=l}=0;\\ &u^{\mathrm{I}}|_{t=0}=\varphi(x), u^{\mathrm{I}}_t|_{t=0}=\psi(x). \end{aligned}\right| \begin{aligned} &u^{\mathrm{II}}_{tt}-a^2u^{\mathrm{II}}_{xx}=f(x,t);\\ &u^{\mathrm{II}}|_{x=0}=0, \quad u^{\mathrm{II}}|_{x=l}=0\\ &u^{\mathrm{II}}|_{t=0}=0, u^{\mathrm{II}}_t|_{t=0}=0 \end{aligned}$$

把竖线两边对应的式子相叠加，正好是原来的定解问题. 这样，问题转化为求解 u^{I} 和 u^{II}. u^{I} 的初始条件是非零值，但方程是齐次

的，可用上节方法求解；u^{I} 的方程是非齐次的，但初始条件已化为零值，符合冲量定理法所提出的要求.

现在用冲量定理法来研究弦的非齐次振动方程定解问题

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t) \tag{8.2.12}$$

$$u|_{x=0}=0,\quad u|_{x=l}=0, \tag{8.2.13}$$

$$u|_{t=0}=0,\quad u_t|_{t=0}=0 \tag{8.2.14}$$

(1) **冲量定理法的物理思想**

首先，在物理上，非齐次泛定方程(8.2.12)表明，作用在每单位长弦上的外力 $F(x,t)=\rho f(x,t)$. 它从时刻零持续作用到时刻 t，我们求解的是 $F(x,t)$ 作用下，在时刻 t 的各处位移 $u(x,t)$.

冲量定理法的基本物理思想是把持续作用力看成许许多多前后相继的"瞬时"力，把持续作用力引起的振动看作所有"瞬时"力引起的振动的叠加. 根据(5.3.9)，持续作用的力 $F(x,t)$ 可以表示成

$$F(x,t)=\int_0^t F(x,\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\rho f(x,t)$$

$$=\int_0^t \rho f(x,\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{8.2.15}$$

其中 $F(x,\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau$ 为作用在很短的时间区间 $(\tau,\tau+d\tau)$ 上而冲量为 $F(x,\tau)\mathrm{d}\tau$ 的"瞬时"力. 把该瞬时力引起的振动记为 $u^{(\tau)}(x,t)$，则 $u^{(\tau)}(x,t)$ 的定解问题为

$$u_{tt}^{(\tau)}-a^2u_{xx}^{(\tau)}=\frac{F(x,\tau)}{\rho}\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau=f(x,\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{8.2.16}$$

$$u^{(\tau)}|_{x=0}=0,\qquad u^{(\tau)}|_{x=l}=0, \tag{8.2.17}$$

$$u^{(\tau)}|_{t=0}=0,\qquad u_t^{(\tau)}|_{t=0}=0. \tag{8.2.18}$$

由于瞬时力 $F(x,\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau$ 作用在时间区间 $(\tau,\tau+\mathrm{d}\tau)$ 上，从时刻零直到时刻 $\tau-0$，它尚未起作用，弦仍然是静止的，$u^{(\tau)}|_{t=\tau-0}=0, u_t^{(\tau)}|_{t=\tau-0}=0$. 时刻 τ，该瞬时力开始作用，至时刻 $\tau+\mathrm{d}\tau$ 结束. 由于 $\mathrm{d}\tau$ 很短，弦上各质点"来不及"位移，故在时刻 $\tau+\mathrm{d}\tau$，位移 $u^{(\tau)}|_{t=\tau+\mathrm{d}\tau}=0$. 再看时刻 $\tau+\mathrm{d}\tau$ 的速度 $u_t^{(\tau)}$，根据冲量定理，

从$\tau-0$时刻到 $\tau+d\tau$ 时刻，单位长度弦的动量变化等于瞬时力 $F(x,\tau)\delta(t-\tau)d\tau$ 的冲量，故有

$$\rho u_t^{(\tau)}|_{t=\tau+d\tau}-\rho u_t^{(\tau)}|_{t=\tau-0}=F(x,\tau)d\tau=\rho f(x,\tau)d\tau$$

从而得到

$$u_t^{(\tau)}|_{t=\tau-d\tau}=f(x,\tau)d\tau$$

如果改取 $\tau+d\tau$ 时刻作为初始时刻，考察瞬时力 $F(x,\tau)\delta(t-\tau)d\tau$ 在 $\tau+d\tau$ 时刻以后引起的振动 $u^{(\tau)}(x,t)$，由于该瞬时力已经作用过了，弦上不受外力，$u^{(\tau)}(x,t)$满足齐次方程，其定解问题为

$$u_{tt}^{(\tau)}-a^2u_{xx}^{(\tau)}=0, \tag{8.2.19}$$

$$u^{(\tau)}|_{x=0}=0,\quad u^{(\tau)}|_{x=l}=0, \tag{8.2.17}$$

$$u^{(\tau)}|_{t=\tau+d\tau}=0,\quad u_t^{(\tau)}|_{t=\tau+d\tau}=f(x,\tau)d\tau. \tag{8.2.20}$$

定解问题(8.2.19)～(8.2.20)与定解问题(8.2.16)～(8.2.18)是等价的. 从(8.2.20)可以看出 $u^{(\tau)}$必含有因子 $d\tau$，若记 $u^{(\tau)}(x,t)=v(x,t;\tau)d\tau$，则 $v(x,t;\tau)$满足定解问题

$$v_{tt}-a^2v_{xx}=f(x,\tau)\delta(t-\tau) \tag{8.2.21}$$

$$v|_{x=0}=0,\quad v|_{x=l}=0, \tag{8.2.22}$$

$$v|_{t=0}=0,\quad v_t|_{t=0}=0. \tag{8.2.23}$$

即

$$v_{tt}-a^2v_{xx}=0, \tag{8.2.24}$$

$$v|_{x=0}=0,\quad v|_{x=l}=0, \tag{8.2.22}$$

$$v|_{t=\tau}=0,\quad v_t|_{t=\tau}=f(x,\tau). \tag{8.2.25}$$

由于 $d\tau$ 很短，在(8.2.25)中已将 $\tau+d\tau$ 时刻记为 τ 时刻. 定解问题(8.2.24)～(8.2.25)为齐次方程问题，可用前面的分离变数法或傅里叶级数法求解. 只是要注意，前面两种方法中初始时刻为零时刻，这里初始时刻为 τ 时刻，因此前二方法解中的 t(表示距初始时刻 0 时刻的时间间隔)，在这里应换成 $t-\tau$.

定解问题(8.2.12)～(8.2.14)是线性的，适用叠加原理，既然外加力是一系列瞬时力的叠加，则定解问题(8.2.12)～(8.2.14)的解也应是瞬时力所引起的振动的叠加. 计及所有瞬时力的影响，

就有

$$u(x,t)=\sum_{\tau=0}^{t}u^{(\tau)}(x,t)=\int_0^t v(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau \qquad (8.2.26)$$

$u(x,t)$就是定解问题(8.2.12)～(8.2.14)的解.这就从物理上给出了求解非齐次振动方程定解问题(8.2.12)～(8.2.14)的方法，因为利用了冲量定理，故称为冲量定理法.

回顾一下求解步骤.为了求解非齐次振动方程定解问题(8.2.12)～(8.2.14)，把持续作用的力$\rho f(x,t)$看作一系列前后相继的脉冲力$\rho f(x,\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau$，改为求解脉冲力$\rho f(x,\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau$从$\tau$时刻起所引起的振动$v(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau$，$v(x,t;\tau)$满足齐次振动方程定解问题(8.2.24)～(8.2.25)，解出$v(x,t;\tau)$后，代入(8.2.26)，对τ积分，就能得到所求的解.

$u(x,t)$和$u^{(\tau)}(x,t)$的量纲为$[x]$，$v(x,t;\tau)$的量纲为$[x]/[t]$.只要注意$\delta(t-\tau)$的量纲为$1/[t]$，不难检验，方程(8.2.12)和(8.2.16)中每一项的量纲均为$[x]/[t]^2$，而方程(8.2.21)中每一项的量纲同是$[x]/[t]^3$因此，从量纲来分析，方程(8.2.12)、(8.2.16)、(8.2.19)、(8.2.21)和(8.2.24)在物理上都是正确的，这从另一个侧面，证明冲量定理法在物理上是行得通的.

(2) 冲量定理法的数学验证

这里要验证，由满足齐次振动方程定解问题(8.2.24)、(8.2.22)、(8.2.25)解$v(x,t;\tau)$通过积分(8.2.26)得到的$u(x,t)$是非齐次振动方程定解问题(8.2.12)～(8.2.14)的解.

首先验证边界条件.由于$v|_{x=0}=0$，$v|_{x=l}=0$，因此，

$$u|_{x=0}=\int_0^t v|_{x=0}\mathrm{d}\tau=0,\quad u|_{x=l}=\int_0^t v|_{x=l}\mathrm{d}\tau=0.$$

$u(x,t)$满足齐次边界条件(8.2.13).

其次验证初始条件.由(8.2.26)，知初始位移

$$u|_{t=0}=\int_0^0 v|_{t=0}\mathrm{d}\tau=0.$$

为验证初始速度，需利用积分号下求导的公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} g(t;\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial g(t;\tau)}{\partial t}\mathrm{d}\tau+g[t;\beta(t)]\frac{\mathrm{d}\beta(t)}{\mathrm{d}t}$$
$$-g[t;\alpha(t)]\frac{\mathrm{d}\alpha(t)}{\mathrm{d}t}, \tag{8.2.27}$$

这个公式在微积分教本中可以找到.把这个公式应用于(8.2.26),有

$$u_t(x,t)=\int_0^t v_t(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau+v(x,t;t).$$

按(8.2.25),$v(x,\tau;\tau)=0$, $(0\leqslant\tau\leqslant t)$.所以,

$$u_t(x,t)=\int_0^t v_t(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{8.2.28}$$

$$u_t|_{t=0}=\int_0^0 v_t|_{t=0}\mathrm{d}\tau=0.$$

(8.2.14)中的两个零值初始条件均成立.

最后验证非齐次方程.对(8.2.28)应用求导公式(8.2.27),

$$u_{tt}=\int_0^t v_{tt}(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau+v_t(x,t;t).$$

按(8.2.25),$v_t(x,\tau;\tau)=f(x,\tau)$ $(0\leqslant\tau\leqslant t)$.所以,

$$u_{tt}=\int_0^t v_{tt}(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau+f(x,t). \tag{8.2.29}$$

以(8.2.26)和(8.2.29)代入非齐次方程(8.2.12)的左边,则

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=\int_0^t (v_{tt}-a^2v_{xx})\mathrm{d}\tau+f(x,t)=\int_0^t 0\mathrm{d}\tau+f(x,t)$$
$$=f(x,t),$$

非齐次方程(8.2.12)得以满足,其中利用了 v 的齐次方程(8.2.24).

数学验证全部完成,冲量定理法在数学上成立.这里还应指出一点:边界条件(8.2.13)不必限于第一类齐次边界条件,也可以是第二类或第三类齐次边界条件,甚至 $x=0$ 端与 $x=l$ 端的边界条件还可以是不同类的,只要边界条件(8.2.22)的类型与(8.2.13)相同就行.

例 2 将例 1 中的初始条件改为零值,用冲量定理法求解,即

求解定解问题

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=A\cos\frac{\pi x}{l}\sin\omega t;$$

$$u_x|_{x=0}=0, u_x|_{x=l}=0;$$

$$u|_{t=0}=0, u_t|_{t=0}=0.$$

解 应用冲量定理法，先求解

$$v_{tt}-a^2v_{xx}=0;$$

$$v_x|_{x=0}=0, v_x|_{x=l}=0;$$

$$v|_{t=\tau+0}=0, v_t|_{t=\tau+0}=A\cos\frac{\pi x}{l}\sin\omega\tau.$$

参照边界条件，试把解 v 展开为傅里叶余弦级数

$$v(x,t;\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t,\tau)\cos\frac{n\pi x}{l}.$$

把这余弦级数代入泛定方程，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[T_n''+\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T\right]\cos\frac{n\pi x}{l}=0.$$

由此分离出 T_n 的常微分方程

$$T_n''+\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T=0.$$

这个常微分方程的解是

$$T_0(t;\tau)=A_0(\tau)+B_0(\tau)(t-\tau),$$

$$T_n(t;\tau)=A_n(\tau)\cos\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}+B_n(\tau)\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}.\ (n\neq 0)$$

这样，解 v 的傅里叶余弦级数是

$$\begin{aligned}v(x,t;\tau)=&A_0(\tau)+B_0(\tau)(t-\tau),\\&+\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n(\tau)\cos\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}\right.\\&\left.+B_n(\tau)\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}\right]\cos\frac{n\pi x}{l}.\end{aligned}$$

至于系数 $A_n(\tau)$和 $B_n(\tau)$则由初始条件确定．为此，把上式代入初

始条件，

$$A_0(\tau)+\sum_{n=0}^{\infty}A_n(\tau)\cos\frac{n\pi x}{l}=0,$$

$$B_0(\tau)+\sum_{n=1}^{\infty}B_n(\tau)\frac{n\pi a}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}=A\cos\frac{\pi x}{l}\sin\omega\tau.$$

右边的 $A\cos\frac{\pi x}{l}\sin\omega\tau$ 也是傅里叶余弦级数，它只有一个单项即 $n=1$ 的项. 比较两边系数，得

$$A_n(\tau)=0,B_1(\tau)=A\frac{l}{\pi a}\sin\omega\tau,B_n(\tau)=0\quad(n\neq1).$$

到此，已求出 $v(x,t;\tau)$，

$$v(x,t;\tau)=A\frac{l}{\pi a}\sin\omega\tau\sin\frac{\pi a(t-\tau)}{l}\cos\frac{\pi x}{l}.$$

按照(8.2.26)，得出答案

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\int_0^t v(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau\\&=\frac{Al}{\pi a}\cos\frac{\pi x}{l}\int_0^t\sin\omega\tau\sin\frac{\pi a(t-\tau)}{l}\mathrm{d}\tau\\&=\frac{Al}{\pi a}\frac{1}{\omega^2-\pi^2a^2/l^2}\left(\omega\sin\frac{\pi a}{l}t-\frac{\pi a}{l}\sin\omega t\right)\cos\frac{\pi x}{l}.\end{aligned}$$

输运问题，如泛定方程是非齐次的，完全可以仿照冲量定理加以处理. 比如，研究定解问题

$$u_t-a^2u_{xx}=f(x,t);\tag{8.2.30}$$

$$u_x|_{x=0}=0,u_x|_{x=l}=0;\tag{8.2.31}$$

$$u|_{t=0}=0.\tag{8.2.32}$$

非齐次泛定方程(8.2.30)表明，每单位长度上的热源强度为 $c\rho f(x,t)$. 这热源从时刻零一直延续到时刻 t，现在求解的是热源强度 $c\rho f(x,t)$ 的影响下，在时刻 t 的温度分布.

仿照冲量定理对非齐次振动方程定解问题的处理，这里按照(5.3.9)，将持续作用的热源看作许许多多前后相继的"瞬时"热源 $c\rho f(x,\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau$ 的叠加，"瞬时"热源 $c\rho f(x,\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau$ 作用于时间区间$(\tau,\tau+\mathrm{d}\tau)$，提供的热量为 $c\rho f(x,\tau)\mathrm{d}\tau$，记它所产生的

温度分布为 $v(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau$，类似地可导出 $v(x,t;\tau)$ 的定解问题为

$$v_t - a^2 v_{xx} = f(x,\tau)\delta(t-\tau), \tag{8.2.33}$$

$$v_x|_{x=0} = 0, v_x|_{x=l} = 0, \tag{8.2.34}$$

$$v|_{t=0} = 0. \tag{8.2.35}$$

直到 $\tau-0$ 时刻，瞬时热源尚未起作用，从初始条件 $v|_{t=0}=0$ 得 $v|_{t=\tau-0}=0$. τ 时刻，瞬时热源 $c\rho f(x,\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau$ 开始起作用，至 $\tau+\mathrm{d}\tau$ 时刻，作用结束，瞬时热源放出热量，使 $\tau+\mathrm{d}\tau$ 时刻的温度增加到 $v|_{t=\tau+\mathrm{d}\tau}$，于是

$$c\rho(v|_{t=\tau+\mathrm{d}\tau} - v|_{t=\tau-0})\,\mathrm{d}\tau = c\rho f(x,\tau)\mathrm{d}\tau,$$

从而

$$v|_{t=\tau+\mathrm{d}\tau} = f(x,\tau).$$

这是 $\tau+\mathrm{d}\tau$ 时刻的温度分布，如果把 $\tau+\mathrm{d}\tau$ 时刻作为初始时刻，研究瞬时热源在 $\tau+\mathrm{d}\tau$ 时刻以后产生的温度分布 $v(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau$，则 $v(x,t;\tau)$ 的定解问题为

$$v_t - a^2 v_{xx} = 0, \tag{8.2.36}$$

$$v_x|_{x=0} = 0, v_x|_{x=l} = 0, \tag{8.2.34}$$

$$v|_{t=\tau} = f(x,\tau). \tag{8.2.37}$$

因为瞬时热源已经作用过了，故(8.2.36)为齐次方程. 由于 $\mathrm{d}\tau$ 很短，(8.2.37) 中将初始时刻 $\tau+\mathrm{d}\tau$ 记为 τ 时刻. 定解问题(8.2.36)、(8.2.34)、(8.2.37)与定解问题(8.2.33)～(8.2.35)等价，已是齐次泛定方程、齐次边界条件，可用分离变数法或傅里叶级数法求解，不过要注意，原来求解公式中的 t 这里应换为 $t-\tau$.

定解问题(8.2.30)～(8.2.32)是线性的，叠加原理也适用. 考虑所有瞬时热源产生的影响，把这些影响叠加起来，就得到此定解问题的解 $u(x,t)$，于是有

$$u(x,t) = \int_0^t v(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau \tag{8.2.38}$$

同样，可从数学上验证这样得到的 $u(x,t)$ 确实满足定解问题(8.2.30)～(8.2.32)，请读者去完成，这里不赘述了.

例 3 求解定解问题

$$u_t - a^2 u_{xx} = A\sin\omega t,$$
$$u|_{x=0} = 0, u_x|_{x=l} = 0,$$
$$u|_{t=0} = 0.$$

解 首先应用(8.2.38)，

$$u(x,t) = \int_0^t v(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau,$$

而 $v(x,t;\tau)$则需从下述定解问题

$$v_t - a^2 v_{xx} = 0,$$
$$v|_{x=0} = 0, v_x|_{x=l} = 0,$$
$$v|_{t=\tau} = A\sin\omega\tau$$

求解，这可仿照上节例 2，用分离变数法解出

$$v(x,t;\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \mathrm{e}^{-\frac{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2a^2}{l^2}(t-\tau)} \sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x.$$

其中系数

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l A\sin\omega\tau\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi$$
$$= \frac{2A\sin\omega\tau}{l}\cdot\frac{l}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\left[-\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}\xi\right]_0^l$$
$$= \frac{2A\sin\omega\tau}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}.$$

这样，

$$v(x,t;\tau) = \frac{2A\sin\omega\tau}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)}\mathrm{e}^{-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2a^2}{l^2}(t-\tau)}\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x.$$

从而

$$u(x,t) = \int_0^t v(x,t;\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{2A}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)}\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}$$

$$\mathrm{e}^{-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2a^2t}{l^2}}\int_0^t \mathrm{e}^{\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2a^2\tau}{l^2}}\sin\omega\tau\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{2A}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)}\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}\cdot\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^4\pi^4a^4/l^4+\omega^2}$$

$$\left[\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2a^2}{l^2}\sin\omega t-\omega\cos\omega t+\omega\mathrm{e}^{-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2a^2}{l^2}t}\right].$$

习　　题

1. 长为 l 的均匀细杆两端固定，杆上受有纵向外力 $f_0\sin(2\pi x/l)\cos\omega t$，初始位移为$[\sin(\pi x/l)]^2$，初始速度为零，求解杆的纵振动.

2. 求解热传导问题

$$\begin{cases}u_t-a^2u_{xx}=A\sin\omega t,\\ u_x|_{x=0}=0,u|_{x=l}=0,\\ u|_{t=0}=\varphi(x).\end{cases}$$

3. 两端固定的弦，原先静止不动，单位长度所受横向外力为 $\rho f(x,t)=\rho\Phi(x)\sin\omega t$，求解弦的振动，研究共振的可能性，并求共振时的解.

4. 两端固定弦在点 x_0 受谐变力 $\rho f(t)=\rho f_0\sin\omega t$ 作用而振动，求解振动情况.[提示：外加力的线密度可表为 $\rho f(x,t)=\rho f_0\sin\omega t\delta(x-x_0)$.]

5. 求解振动问题

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t),\\ u|_{x=0}=0,u|_{x=l}=0,\\ u|_{t=0}=\varphi(x),u_t|_{t=0}=\psi(x).\end{cases}$$

6. 输运问题

$$\begin{cases}u_t-a^2u_{xx}=-bu_x,\\ u|_{x=0}=0,u|_{x=l}=0,\\ u|_{t=0}=\varphi(x).\end{cases}$$

能否用傅里叶级数法求解？如果不能，要说明原因；如果能，将 $u(x,t)$ 解出来.

7. 均匀细导线，每单位长的电阻为 R，通以恒定的电流 I，导线表面跟周围温度为零度的介质进行热量交换，试解线上温度变化，设初始温度和两端温度都是零度.

§8.3 非齐次边界条件的处理

在§8.1 和§8.2 两节中，不管是齐次还是非齐次振动方程和输运方程，它们的定解问题的解法都有一个前提：边界条件是齐次的.

但是，在实际问题中，常有非齐次边界条件出现，那么，这样的定解问题又如何求解呢？由于定解问题是线性的，处理的原则是利用叠加原理，把非齐次边界条件问题转化为另一未知函数的齐次边界条件问题. 请看例题.

(一) 一般处理方法

例 1 自由振动问题

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=0, \tag{8.3.1}$$

$$u|_{x=0}=\mu(t),u|_{x=l}=\nu(t), \tag{8.3.2}$$

$$u|_{t=0}=\varphi(x),u_t|_{t=0}=\psi(x). \tag{8.3.3}$$

边界条件(8.3.2)是非齐次的.

选取一个函数 $v(x,t)$，使其满足非齐次边界条件(8.3.2)，为了简单起见，不妨取 $v(x,t)$ 为 x 的线性函数，即

$$v(x,t)=A(t)x+B(t). \tag{8.3.4}$$

将(8.3.4)代入(8.3.2)，解得

$$v(x,t)=\frac{[\nu(t)-\mu(t)]}{l}x+\mu(t) \tag{8.3.5}$$

利用叠加原理，令

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t) \tag{8.3.6}$$

将(8.3.5)、(8.3.6)代入定解问题(8.3.1)～(8.3.3)，得 $w(x,t)$

的定解问题

$$w_{tt}-a^2w_{xx}=-v_{tt}+a^2v_{xx}=\frac{x}{l}[\mu''(t)-\nu''(t)]-\mu''(t),$$

(8.3.7)

$$w|_{x=0}=0, w|_{x=l}=0, \tag{8.3.8}$$

$$w|_{t=0}=\varphi(x)-v|_{t=0}=\varphi(x)+\frac{1}{l}[\mu(0)-\nu(0)]x-\mu(0),$$

$$w_t|_{t=0}=\psi(x)-v_t|_{t=0}=\psi(x)+\frac{1}{l}[\mu'(0)-\nu'(0)]x-\mu'(0).$$

(8.3.9)

虽然 $w(x,t)$ 的方程(8.3.7)一般是非齐次的，但是，定解问题(8.3.7)～(8.3.9)具有齐次边界条件，可按§8.2求解.

这里还要特别说一下 $x=0$ 和 $x=l$ 两端都是第二类非齐次边界条件 $u_x|_{x=0}=\mu(t)$，$u_x|_{x=l}=\nu(t)$ 的情况. 如果仍按(8.3.4)取 x 的线性函数作为 v，则代入非齐次边界条件得

$$v_x|_{x=0}=A(t)=\mu(t), v_x|_{x=l}=A(t)=\nu(t).$$

除非 $\mu(t)=\nu(t)$，否则这两式互相矛盾. 这时不妨改试

$$v(x,t)=A(t)x^2+B(t)x. \tag{8.3.10}$$

(二) 特殊处理方法

例2 弦的 $x=0$ 端固定，$x=l$ 端受迫作谐振动 $A\sin\omega t$，弦的初始位移和初始速度都是零，求弦的振动. 这个定解问题是

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=0, \quad (0<x<l) \tag{8.3.11}$$

$$u|_{x=0}=0, \quad u|_{x=l}=A\sin\omega t, \tag{8.3.12}$$

$$u|_{t=0}=0, \quad u_t|_{t=0}=0. \tag{8.3.13}$$

$x=l$ 端为非齐次边界条件.

如果按上述一般处理方法，应取 $v(x,t)=(A\sin\omega t/l)x$，但是，相应的 $w(x,t)$ 的定解问题中泛定方程为 $w_{tt}-a^2w_{xx}=-(v_{tt}-a^2v_{xx})=(A\omega^2x/l)\sin\omega t$，是非齐次方程，求解麻烦. 能否有较为简便的方法呢?

由于求解的是弦在 $x=l$ 端受迫作谐振动 $A\sin\omega t$ 情况下的振

动，它一定有一个特解 $v(x,t)$，满足齐次方程(8.3.11)、非齐次边界条件(8.3.12)，且跟 $x=l$ 端同步振动，即其时间部分的函数亦为 $\sin\omega t$，就是说，特解具有分离变数的形式

$$v(x,t)=X(x)\sin\omega t \qquad (8.3.14)$$

将(8.3.14)代入(8.3.11)、(8.3.12)，得

$$\begin{cases} X''+(\dfrac{\omega}{a})^2X=0 & (8.3.15) \\ X(0)=0, X(l)=A & (8.3.16) \end{cases}$$

将常微分方程(8.3.15)的解 $X(x)=C\cos(\omega x/a)+D\sin(\omega x/a)$ 代入(8.3.16)，由此确定 $X(x)=[A/\sin(\omega l/a)]\sin(\omega x/a)$，从而

$$v(x,t)=\frac{A}{\sin\dfrac{\omega l}{a}}\sin\frac{\omega x}{a}\sin\omega t \qquad (8.3.17)$$

于是令

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t), \qquad (8.3.18)$$

将(8.3.17)、(8.3.18)代入(8.3.11)～(8.3.13)，得 $w(x,t)$ 的定解问题

$$w_{tt}-a^2w_{xx}=-(v_{tt}-a^2v_{xx})=0 \qquad (8.3.19)$$

$$w|_{x=0}=0, \quad w|_{x=l}=0, \qquad (8.3.20)$$

$$w|_{t=0}=0, \quad w_t|_{t=0}=-A\omega\frac{\sin\omega x/a}{\sin\omega l/a}. \qquad (8.3.21)$$

定解问题(8.3.19)～(8.3.21)为齐次方程、齐次边界条件，可用分离变数法求解，其一般解由(8.1.14)给出，因此，

$$w(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+B_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

其中系数 A_n 和 B_n 可按(8.1.16)计算，得

$$A_n=0,$$

$$\begin{aligned} B_n &=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l -A\omega\frac{\sin(\omega\xi/a)}{\sin(\omega l/a)}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\mathrm{d}\xi \\ &=\frac{-2A\omega}{n\pi a\sin(\omega l/a)}\left[-\frac{\sin(\omega/a+n\pi/l)\xi}{2(\omega/a+n\pi/l)}+\frac{\sin(\omega/a-n\pi/l)\xi}{2(\omega/a-n\pi/l)}\right]_0^l \end{aligned}$$

$$=\frac{A\omega}{n\pi a\sin(\omega l/a)}\left[\frac{\sin(\omega l/a+n\pi)}{\omega/a+n\pi/l}-\frac{\sin(\omega l/a-n\pi)}{\omega/a-n\pi/l}\right]$$

$$=(-1)^n\frac{A\omega}{n\pi a}\left[\frac{1}{\omega/a+n\pi/l}-\frac{1}{\omega/a-n\pi/l}\right]$$

$$=(-1)^n\frac{2A\omega}{al}\cdot\frac{1}{\omega^2/a^2-n^2\pi^2/l^2}.$$

这样

$$w(x,t)=\frac{2A\omega}{al}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\omega^2/a^2-n^2\pi^2/l^2}\sin\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l},$$

$$u(x,t)=A\frac{\sin(\omega x/a)}{\sin(\omega l/a)}\sin\omega t$$

$$+\frac{2A\omega}{al}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\omega^2/a^2-n^2\pi^2/l^2}\sin\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

习　　题

1. 求解细杆导热问题. 杆长 l，初始温度均匀为 u_0，两端分别保持温度 u_1 和 u_2.

2. 求解细杆导热问题，初始温度为零，一端 $x=l$ 保持零度，另一端 $x=0$ 的温度为 At（A 是常数，t 代表时间）.

3. 求解均匀杆的纵振动，杆长 l，一端固定，另一端受纵向力

$$F(t)=F_0\sin\omega t$$

作用，初始位移和速度分别是 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$.

4. 长为 l 的柱形管，一端封闭，另一端开放. 管外空气中含有某种气体，其浓度为 u_0，向管内扩散. 求解该气体在管内的浓度 $u(x,t)$.

5. 把弹簧上端 $x=0$ 加以固定，在静止弹簧的下端 $x=l$ 轻轻地挂上质量为 m 的物体，求解弹簧的纵振动. 弹簧本身的重量可忽略不计.

§8.4　泊松方程

泊松方程

$$\Delta u=f(x,y,z)$$

可说是非齐次的拉普拉斯方程. 它与时间无关，显然不适用冲量定

理法.

我们可以采用**特解法**.先不管边界条件,任取这泊松方程的一个特解v,然后令$u=v+w$.这就把问题转化为求解w,而$\Delta w=\Delta u-\Delta v=\Delta u-f=0$,这不再是泊松方程而是拉普拉斯方程.在一定边界条件下求解拉普拉斯方程是§8.1研究过的问题.

例1 在圆域$\rho<\rho_0$上求解泊松方程的边值问题

$$\begin{cases}\Delta u=a+b(x^2-y^2),\\ u|_{\rho=\rho_0}=c.\end{cases}$$

解 先设法找泊松方程的一个特解.显然,$\Delta(ax^2/2)=a$,$\Delta(ay^2/2)=a$,为对称起见,取$a(x^2+y^2)/4$.又,$\Delta(bx^4/12)=bx^2$,$\Delta(by^4/12)=by^2$.这样,找到一个特解

$$v=\frac{a}{4}(x^2+y^2)+\frac{b}{12}(x^4-y^4)=\frac{a}{4}\rho^2+\frac{b}{12}(x^2+y^2)(x^2-y^2)$$
$$=\frac{a}{4}\rho^2+\frac{b}{12}\rho^4\cos 2\varphi.$$

令

$$u=v+w=\frac{a}{4}\rho^2+\frac{b}{12}\rho^4\cos 2\varphi+w,$$

就把问题转化为w的定解问题,

$$\begin{cases}\Delta w=0,\\ w|_{\rho=\rho_0}=c-\dfrac{a}{4}\rho_0^2-\dfrac{b}{12}\rho_0^4\cos 2\varphi.\end{cases}$$

在极坐标系中用分离变数法求解拉普拉斯方程的一般结果见(8.1.68)即

$$w(\rho,\varphi)=C_0+D_0\ln\rho+\sum_{m=1}^{\infty}\rho^m(A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi)$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}\rho^{-m}(C_m\cos m\varphi+D_m\sin m\varphi).$$

w在圆内应当处处有限.但上式的$\ln\rho$和ρ^{-m}在圆心为无限大,所以应当排除,就是说,$D_0=0$,$C_m=0$,$D_m=0$.于是,

$$w(\rho,\varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}\rho^m(A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi).$$

把上式代入边界条件，

$$\sum_{m=0}^{\infty}\rho_0^m(A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi)=c-\frac{a}{4}\rho_0^2-\frac{b}{12}\rho_0^4\cos 2\varphi.$$

比较两边系数，得

$$A_0=c-\frac{a}{4}\rho_0^2,\ A_2=-\frac{b}{12}\rho_0^2,\ A_m=0(m\neq 0,2);B_m=0.$$

这样，所求解是

$$u=v+w=c+\frac{a}{4}(\rho^2-\rho_0^2)+\frac{b}{12}\rho^2(\rho^2-\rho_0^2)\cos 2\varphi.$$

例 2 在矩形域 $0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant b$ 上求解泊松方程的边值问题

$$\Delta_2 u=-2,$$

$$u|_{x=0}=0,u|_{x=a}=0, \tag{8.4.1}$$

$$u|_{y=0}=0,u|_{y=b}=0. \tag{8.4.2}$$

解 先找泊松方程的一个特解 v. 显然，$v=-x^2$ 满足 $\Delta v=-2$. 其实，$v=-x^2+c_1x+c_2$（c_1 和 c_2 是两个积分常数）也满足 $\Delta v=-2$. 我们打算选择适当的 c_1 和 c_2，使 v 满足齐次边界条件 (8.4.1). 容易看出，$c_1=a$，$c_2=0$. 这样，

$$v(x,y)=x(a-x).$$

令

$$u(x,y)=v+w=x(a-x)+w(x,y),$$

把上式代入 u 的定解问题，就把它转化为 w 的定解问题

$$\Delta w=0, \tag{8.4.3}$$

$$w|_{x=0}=0,w|_{x=a}=0, \tag{8.4.4}$$

$$w|_{y=0}=x(x-a),w|_{y=b}=x(x-a). \tag{8.4.5}$$

仿照 §8.1 例 3，满足(8.4.3)和(8.4.4)的解可表为

$$w(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n e^{\frac{n\pi y}{a}}+B_n e^{-\frac{n\pi y}{a}})\sin\frac{n\pi x}{a}. \tag{8.4.6}$$

为确定系数 A_n 和 B_n，以(8.4.6)代入边界条件(8.4.5)，

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty}(A_n+B_n)\sin\frac{n\pi x}{a}=x(x-a),\\ &\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n e^{\frac{n\pi b}{a}}+B_n e^{-\frac{n\pi b}{a}}\right)\sin\frac{n\pi x}{a}=x(x-a). \end{aligned} \tag{8.4.7}$$

将(8.4.7)的右边也展为傅里叶正弦级数：

$$x(x-a)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi x}{a}, \tag{8.4.8}$$

其中

$$C_n=\frac{2}{a}\int_0^a(x^2-ax)\sin\frac{n\pi x}{a}\mathrm{d}x=\frac{4a^2}{n^3\pi^3}[(-1)^n-1].$$

以(8.4.8)代入(8.4.7)的右边，比较左右两边的傅里叶系数，

$$A_n+B_n=C_n,$$

$$A_n e^{\frac{n\pi b}{a}}+B_n e^{-\frac{n\pi b}{a}}=C_n.$$

由此解得

$$\begin{aligned} A_n&=\frac{1-e^{-n\pi b/a}}{e^{n\pi b/a}-e^{-n\pi b/a}}C_n=\frac{e^{-n\pi b/2a}(e^{n\pi b/2a}-e^{-n\pi b/2a})}{e^{n\pi b/a}-e^{-n\pi b/a}}C_n\\ &=\frac{e^{-n\pi b/2a}}{e^{n\pi b/2a}+e^{-n\pi b/2a}}C_n=\frac{e^{-n\pi b/2a}}{\cosh(n\pi b/2a)}C_n,\\ B_n&=\frac{e^{n\pi b/a}-1}{e^{n\pi b/a}-e^{-n\pi b/a}}C_n=\frac{e^{n\pi b/2a}(e^{n\pi b/2a}-e^{-n\pi b/2a})}{e^{n\pi b/a}-e^{-n\pi b/a}}C_n\\ &=\frac{e^{n\pi b/2a}}{e^{n\pi b/2a}+e^{-n\pi b/2a}}C_n=\frac{e^{n\pi b/2a}}{\cosh(n\pi b/2a)}C_n. \end{aligned}$$

于是代回(8.4.6)成为

$$w(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cosh[n\pi(y-b/2)/a]}{\cosh(n\pi b/2a)}C_n\sin\frac{n\pi x}{a}.$$

我们又知道，对于 $n=2k$，$(k=1,2,\cdots)$，$C_n=0$；对于 $n=2k-1$ $(k=1,2,\cdots)$，$C_n=-8a^2/(2k-1)^3\pi^3$. 这样，

$$w(x,y)=-\frac{8a^2}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cosh[(2k-1)\pi(y-b/2)/a]}{(2k-1)^3\cosh[(2k-1)\pi b/2a]}\sin\frac{(2k-1)\pi x}{a}.$$

把 $w(x,y)$ 加上 $x(x-a)$ 就是所求的 $u(x,y)$.

习　题

1. 在圆域 $\rho<a$ 上求解 $\Delta u=-4$，边界条件是 $u|_{\rho=a}=0$.

2. 在圆域 $\rho<a$ 上求解 $\Delta u=-xy$，边界条件是 $u|_{\rho=a}=0$.

3. 在矩形域 $0<x<a,-b/2<y<+b/2$ 上求解 $\Delta u=-2$，且 u 在边界上的值为零.

4. 在矩形域 $0<x<a,-b/2<y<+b/2$ 上求解 $\Delta u=-x^2y$，且 u 在边界上的值为零.

§8.5 小　结

在掌握了分离变数法、傅里叶级数法、冲量定理法和非齐次边界条件的处理方法以后，就能求解最一般的有界问题：泛定方程和边界条件全是非齐次的，同时，初始条件是非零值. 作为本章的小结，下面以一般的一维有界振动问题和二维有界稳定温度分布问题为例，说明含时问题（波动和输运问题）和不含时问题（稳定场问题）不同的求解步骤和最有效的解法.

（一）一般的有界波动和输运问题

以有界弦的一般振动问题为例，其定解问题是

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t), \tag{8.5.1}$$

$$u|_{x=0}=\mu(t),u|_{x=l}=\nu(t), \tag{8.5.2}$$

$$u|_{t=0}=\varphi(x),u_t|_{t=0}=\psi(x). \tag{8.5.3}$$

弦既受外力作用，又有一定的初始位移和初始速度，而且弦的两个端点位置还按已知规律随时间变化，因此，振动方程和边界条件都是非齐次的，初始条件是非零值. 不过，方程、边界条件和初始条件都是线性的，叠加原理适用，前述解法和非齐次边界条件的处理方法均可应用. 为了方便、有效，可采用如下求解步骤：

(1) 边界条件化为齐次

取 $v(x,t)$满足非齐次边界条件(8.5.2)，例如

$$v(x,t)=\frac{1}{l}[\nu(t)-\mu(t)]x+\mu(t).$$

令

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$$

代入定解问题(8.5.1)~(8.5.3),得 $w(x,t)$ 的定解问题

$$w_{tt}-a^2w_{xx}=f(x,t)-v_{tt}\equiv g(x,t),$$

$$w|_{x=0}=0, w|_{x=l}=0,$$

$$w|_{t=0}=\varphi(x)-v|_{t=0}\equiv\Phi(x), w_t|_{t=0}=\psi(x)-v_t|_{t=0}\equiv\Psi(x).$$

其中把函数 $f(x,t)-v_{tt}, \varphi(x)-v|_{t=0}, \psi(x)-v_t|_{t=0}$ 分别记为 $g(x,t), \Phi(x), \Psi(x)$. 边界条件已是齐次,这定解问题可用傅里叶级数法直接求解(见§8.2例1). 但是,这将导致求解时间函数 $T_n(t)$ 的二阶非齐次常系数常微分方程,且初值条件 $T_n(0)$、$T'_n(0)$ 不为零. 不如利用叠加原理,化成两个定解问题,分别用分离变数法和冲量定理法直接求解,见下面(2).

(2) 利用叠加原理化成两个简单的定解问题

令

$$w(x,t)=w^{\mathrm{I}}(x,t)+w^{\mathrm{II}}(x,t),$$

w^{I} 和 w^{II} 分别满足定解问题

$$\begin{cases} w_{tt}^{\mathrm{I}}-a^2w_{xx}^{\mathrm{I}}=0, \\ w^{\mathrm{I}}|_{x=0}=0, w^{\mathrm{I}}|_{x=l}=0, \\ w^{\mathrm{I}}|_{t=0}=\Psi(x), w_t^{\mathrm{I}}|_{t=0}=\Psi(x); \end{cases} \quad \begin{cases} w_{tt}^{\mathrm{II}}-a^2w_{xx}^{\mathrm{II}}=g(x,t), \\ w^{\mathrm{II}}|_{x=0}=0, w^{\mathrm{II}}|_{x=l}=0, \\ w^{\mathrm{II}}|_{t=0}=0, w_t^{\mathrm{II}}|_{t=0}=0. \end{cases}$$

w^{I} 的定解问题为齐次方程、齐次边界条件,可用分离变数法求解;而 w^{II} 的定解问题仅方程是非齐次的,可用冲量定理法求解.

对于一般的一维有界输运问题,例如定解问题

$$u_t-a^2u_{xx}=f(x,t),$$

$$u|_{x=0}=\mu(t), \quad u|_{x=l}=\nu(t),$$

$$u|_{t=0}=\varphi(x).$$

其求解步骤跟上述振动问题完全相同,首先利用叠加原理将边界条件化成齐次.

对于二维、三维的有界波动和输运问题的求解也可仿此进行.

(二) 一般的有界稳定场问题

今以二维矩形域稳定温度分布问题为例,其定解问题是

$$u_{xx}+u_{yy}=f(x,y), \tag{8.5.4}$$

$$u|_{x=0}=\mu(y), \quad u|_{x=a}=\nu(y),$$

$$u|_{y=0}=\varphi(x), \quad u|_{y=b}=\psi(x).$$

稳定分布问题与时间 t 无关,求解步骤跟含时的波动和输运问题不同,首先处理的不是非齐次边界条件,而是非齐次方程. 虽然这里两组边界条件都是非齐次的,但上节的特解法在这里仍然适用. 其求解步骤是:

(1) 用特解法，将非齐次方程问题化成齐次方程问题

取非齐次方程(8.5.4)的一个特解 $v(x,y)$，有 $v_{xx}+v_{yy}=f(x,y)$. 令

$$u(x,y)=v(x,y)+w(x,y),$$

于是 $w(x,y)$满足定解问题

$$w_{xx}+w_{yy}=0 \tag{8.5.5}$$
$$w|_{x=0}=\mu(y)-v(0,y),\quad w|_{x=a}=\nu(y)-v(a,y),$$
$$w|_{y=0}=\varphi(x)-v(x,0),\quad w|_{y=b}=\psi(x)-v(x,b).$$

(8.5-5)已是齐次方程

(2) 用叠加原理，化成两个可直接求解的定解问题

令
$$w(x,y)=w^{\mathrm{I}}(x,y)+w^{\mathrm{II}}(x,y),$$

w^{I}、w^{II} 的定解问题分别是

$$\begin{cases} w^{\mathrm{I}}_{xx}+w^{\mathrm{I}}_{yy}=0 \\ w^{\mathrm{I}}|_{x=0}=0,\quad w^{\mathrm{I}}|_{x=a}=0, \\ w^{\mathrm{I}}|_{y=0}=\varphi(x)-v(x,0),\quad w^{\mathrm{I}}|_{y=b}=\psi(x)-v(x,b), \end{cases}$$

$$\begin{cases} w^{\mathrm{II}}_{xx}+w^{\mathrm{II}}_{yy}=0, \\ w^{\mathrm{II}}|_{x=0}=\mu(y)-v(0,y),\quad w^{\mathrm{II}}|_{x=a}=\nu(y)-v(a,y), \\ w^{\mathrm{II}}|_{y=0}=0,\quad w^{\mathrm{II}}|_{y=b}=0. \end{cases}$$

这两个定解问题都是齐次方程和一组非齐次边界条件，可用分离变数法或傅里叶级数法直接求解.

本章研究的全是定义在有界区域的定解问题，且可用分离变数(傅里叶级数)法求解，容易使人产生误解，似乎任何有界的线性的定解问题都能用分离变数法求解. 其实不是这样，例如，下列并不很复杂的变系数的线性偏微分方程

$$u_{tt}-a^2xu_{xx}=0, \tag{8.5.6}$$

$$u_{tt}-a^2tu_{xx}=0, \tag{8.5.7}$$

$$u_{tt}-a^2(x+t)u_{xx}=0. \tag{8.5.8}$$

(8.5.6)、(8.5.7)是可以分离变数的，而(8.5.8)就不能分离变数. 这其实不难理解，因为方程(8.5.8)根本不存在分离变数形式的解 $u(x,t)=X(x)T(t)$，自然，分离变数法对它不适用.

至于无界区域的定解问题，请见第十二、十三、十四章.

第九章　二阶常微分方程级数解法　本征值问题

上一章的分离变数法是对直角坐标系的各种定解问题和平面极坐标系稳定场问题进行的，出现的本征函数都是三角函数. 但实际问题中的边界是多种多样的，坐标系必须参照问题中的边界形状来选择，不可能总是直角坐标系或平面极坐标系.

圆球形和圆柱形就是两种常见的边界，相应地用球坐标系和柱坐标系比较方便. 本章要考察球坐标系和柱坐标系中的分离变数法所导致的常微分方程以及相应的本征值问题.

§9.1　特殊函数常微分方程

（一）拉普拉斯方程 $\Delta u=0$

（1）球坐标系

球坐标系拉普拉斯算符 Δ 的表达式可在微积分学教本中找到，从而得拉普拉斯方程在球坐标系中的表达式

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0. \tag{9.1.1}$$

首先，试把表示距离的变数 r 跟表示方向的变数 θ 和 φ 分离，以

$$u(r,\theta,\varphi)=R(r)\mathrm{Y}(\theta,\varphi)$$

代入(9.1.1)，得

$$\frac{\mathrm{Y}}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\frac{R}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial\theta}\right)+\frac{R}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\mathrm{Y}}{\partial\varphi^2}=0.$$

用 r^2/RY 遍乘各项并适当移项，即得

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)=\frac{-1}{\sin\theta Y}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{Y}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}.$$

左边是 r 的函数，跟 θ 和 φ 无关；右边是 θ 和 φ 的函数，跟 r 无关. 两边相等显然是不可能的，除非两边实际上是同一个常数. 通常把这个常数记作 $l(l+1)$，

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)=-\frac{1}{Y\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{Y\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}=l(l+1).$$

这就分解为两个方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)-l(l+1)R=0, \qquad (9.1.2)$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+l(l+1)Y=0. \qquad (9.1.3)$$

常微分方程(9.1.2)即 $r^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2}+2r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}-l(l+1)R=0$ 是欧拉型常微分方程，它的解是

$$R(r)=Cr^l+D\frac{1}{r^{l+1}}. \qquad (9.1.4)$$

偏微分方程(9.1.3)叫作**球函数方程**.

进一步分离变数，以

$$Y(\theta,\varphi)=\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

代入球函数方程(9.1.3)，得

$$\frac{\Phi}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\frac{\Theta}{\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}+l(l+1)\Theta\Phi=0.$$

用 $\sin^2\theta/\Theta\Phi$ 遍乘各项并适当移项，即得

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+l(l+1)\sin^2\theta=-\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}.$$

左边是 θ 的函数，跟 φ 无关；右边是 φ 的函数，跟 θ 无关. 两边相等显然是不可能的，除非两边实际上是同一个常数. 把这个常数记作 λ，

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+l(l+1)\sin^2\theta=-\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}=\lambda.$$

这就分解为两个常微分方程：

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0, \tag{9.1.5}$$

$$\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right) + [l(l+1)\sin^2\theta - \lambda]\Theta = 0. \tag{9.1.6}$$

常微分方程(9.1.5)往往还有一个没有写出来的“自然的周期条件”$\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)$(参看§8.1 例 4). 常微分方程(9.1.5)和自然的周期条件构成本征值问题. 本征值是

$$\lambda = m^2 \quad (m=0,1,2,3,\cdots), \tag{9.1.7}$$

本征函数是

$$\Phi(\varphi) = A\cos m\varphi + B\sin m\varphi. \tag{9.1.8}$$

再看常微分方程(9.1.6). 根据(9.1.7), 应把(9.1.6)改写为

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta = 0 \tag{9.1.9}$$

通常用

$$\theta = \arccos x, \quad 即\ x = \cos\theta,$$

把自变数从 θ 换为 x(x 只是代表 $\cos\theta$, 并不是直角坐标), 则

$$\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x},$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right) = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\sin^2\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x}\right)$$
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x}\right].$$

方程(9.1.9)化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x}\right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]\Theta = 0, \tag{9.1.10}$$

亦即

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]\Theta = 0. \tag{9.1.11}$$

这叫作 l 阶**连带勒让德方程**. 其 $m=0$ 的特例, 即

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x} + l(l+1)\Theta = 0. \tag{9.1.12}$$

则叫作 l 阶**勒让德方程**.

关于勒让德方程和连带勒让德方程的求解见 §9.2 和 §10.2. 在那里将要看到,勒让德方程和连带勒让德方程往往隐含着在 $x=\pm1$(即 $\theta=0,\pi$)的"自然边界条件"并构成本征值问题,决定了 l 只能取整数值.

(2) 柱坐标系

柱坐标系拉普拉斯算符 Δ 的表达式同样可在微积分学教本中找到,从而得拉普拉斯方程在柱坐标系中的表达式

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0. \qquad (9.1.13)$$

试以分离变数形式的

$$u(\rho,\varphi,z)=R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$$

代入(9.1.13),得

$$\Phi Z\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{Z\Phi}{\rho}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}+\frac{RZ}{\rho^2}\Phi''+R\Phi Z''=0.$$

用 $\rho^2/R\Phi Z$ 遍乘各项并适当移项,即得

$$\frac{\rho^2}{R}\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{\rho}{R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}+\rho^2\frac{Z''}{Z}=-\frac{\Phi''}{\Phi}.$$

左边是 ρ 和 z 的函数,跟 φ 无关;右边是 φ 的函数,跟 ρ 和 z 无关. 两边相等显然是不可能的,除非两边实际上是同一个常数. 把这个常数记作 λ,

$$\frac{\rho^2}{R}\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{\rho}{R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}+\rho^2\frac{Z''}{Z}=-\frac{\Phi''}{\Phi}=\lambda.$$

这就分解为两个方程:

$$\Phi''+\lambda\Phi=0, \qquad (9.1.14)$$

$$\frac{\rho^2}{R}\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{\rho}{R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}+\rho^2\frac{Z''}{Z}=\lambda. \qquad (9.1.15)$$

常微分方程(9.1.14)和没有写出来的自然的周期条件构成本征值问题. 本征值和本征函数是

$$\lambda=m^2 \quad (m=0,1,2,3,\cdots), \qquad (9.1.16)$$

$$\Phi(\varphi)=A\cos m\varphi+B\sin m\varphi. \tag{9.1.17}$$

至于方程(9.1.15)，以(9.1.16)代入，用 $1/\rho^2$ 遍乘各项，并适当移项，即得

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}-\frac{m^2}{\rho^2}=-\frac{Z''}{Z}.$$

左边是 ρ 的函数，跟 z 无关；右边是 z 的函数，跟 ρ 无关. 两边相等显然是不可能的，除非两边实际上是同一个常数. 把这个常数记作 $-\mu$，

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}-\frac{m^2}{\rho^2}=-\frac{Z''}{Z}=-\mu.$$

这就分解为两个常微分方程：

$$Z''-\mu Z=0, \tag{9.1.18}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}+\left(\mu-\frac{m^2}{\rho^2}\right)R=0. \tag{9.1.19}$$

下面区分 $\mu=0$，$\mu>0$ 和 $\mu<0$ 三种情况.

(1) $\mu=0$. 方程(9.1.19)是欧拉方程，方程(9.1.18)和(9.1.19)的解是

$$Z=C+Dz; \tag{9.1.20}$$

$$R=\begin{cases}E+F\ln\rho, & (m=0)\\ E\rho^m+F/\rho^m. & (m\neq 0)\end{cases} \tag{9.1.21}$$

(2) $\mu>0$. 对于方程(9.1.19)，通常作代换

$$x=\sqrt{\mu}\,\rho,$$

把自变数从 ρ 换为 x(注意 x 只是代表 $\sqrt{\mu}\,\rho$，并非直角坐标)，则

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}=\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\rho}=\sqrt{\mu}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\sqrt{\mu}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sqrt{\mu}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\rho}=\mu\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2},$$

方程化为

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}+\left(1-\frac{m^2}{x^2}\right)R=0, \tag{9.1.22}$$

即
$$x^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}+(x^2-m^2)R=0.$$
这叫作 m **阶贝塞尔方程**.

以后(§11.2)将要看到,贝塞尔方程附加以 $\rho=\rho_0$ 处(即半径为 ρ_0 的圆柱的侧面)的齐次边界条件构成本征值问题,决定 μ 的可能数值(本征值).

这时方程(9.1.18)的解是
$$Z(z)=Ce^{\sqrt{\mu}z}+De^{-\sqrt{\mu}z}\tag{9.1.23}$$

(3)$\mu<0$. 记 $-\mu=\nu^2>0$,则方程(9.1.18)成为 $Z''+\nu^2Z=0$,其解为
$$Z(z)=C\cos\nu z+D\sin\nu z.\tag{9.1.24}$$
读者已经熟知,若对此附加以 $z=z_1$ 和 $z=z_2$ 处(即柱体的上下底面)的齐次边界条件,便构成本征值问题,决定 ν 的可能数值,从而决定 ν^2 的可能数值(本征值),至于方程(9.1.19),以 $\mu=-\nu^2$ 代入,并作代换
$$x=\nu\rho,$$
则方程化为
$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}-\left(1+\frac{m^2}{x^2}\right)R=0,\tag{9.1.25}$$
即
$$x^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}-(x^2+m^2)R=0.$$
这叫作**虚宗量贝塞尔方程**. 事实上,如把贝塞尔方程(9.1.22)的宗量 x 改成虚数 ix,就成了(9.1.25). 虚宗量贝塞尔方程的求解见§9.4.

(二) 波动方程

考察三维波动方程
$$u_{tt}-a^2\Delta u=0.\tag{9.1.26}$$

分离时间变数 t 和空间变数 $\boldsymbol{r}$,以
$$u(\boldsymbol{r},t)=T(t)v(\boldsymbol{r})\tag{9.1.27}$$
代入(9.1.26),得

$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{\Delta v}{v}.$$

左边是时间 t 的函数，右边是 $\boldsymbol{r}$ 的函数，两边不可能相等，除非两边实际上是同一个常数. 把这个常数记作 $-k^2$，

$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{\Delta v}{v}=-k^2.$$

这就分解为两个方程

$$T''+k^2a^2T=0, \tag{9.1.28}$$

$$\Delta v+k^2v=0. \tag{9.1.29}$$

常微分方程(9.1.28)的解是读者熟悉的

$$\begin{cases}T(t)=C\cos kat+D\sin kat \text{ 或 } Ce^{ikat}+De^{-ikat} & (k\neq 0),\\ T(t)=C+Dt & (k=0).\end{cases} \tag{9.1.30}$$

偏微分方程(9.1.29)叫作**亥姆霍兹方程**，或仍叫作“波动方程”. 亥姆霍兹方程下面还要继续讨论.

(三) 输运方程

考察三维输运方程

$$u_t-a^2\Delta u=0 \tag{9.1.31}$$

分离时间变数 t 和空间变数 $\boldsymbol{r}$，以

$$u(\boldsymbol{r},t)=T(t)v(\boldsymbol{r}) \tag{9.1.32}$$

代入(9.1.31)，得

$$\frac{T'}{a^2T}=\frac{\Delta v}{v}.$$

左边是时间 t 的函数，右边是 $\boldsymbol{r}$ 的函数，两边不可能相等，除非两边实际上是同一个常数. 把这个常数记作 $-k^2$，

$$\frac{T'}{a^2T}=\frac{\Delta v}{v}=-k^2.$$

这就分解为两个方程：

$$T'+k^2a^2T=0, \tag{9.1.33}$$

$$\Delta v+k^2v=0. \tag{9.1.34}$$

常微分方程(9.1.33)的解是读者熟悉的

$$T(t)=Ce^{-k^2a^2t}. \tag{9.1.35}$$

偏微分方程(9.1.34)也是**亥姆霍兹方程**，下面就继续讨论亥姆霍兹方程.

(四) 亥姆霍兹方程

(1) 球坐标系

利用球坐标系拉普拉斯算符 Δ 的表达式，可得球坐标系亥姆霍兹方程的表达式

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}+k^2v=0. \tag{9.1.36}$$

首先，把变数 r 跟变数 θ,φ 分离开来. 以

$$v(r,\theta,\varphi)=R(r)\mathrm{Y}(\theta,\varphi)$$

代入(9.1.36)，用 $r^2/R\mathrm{Y}$ 遍乘各项并适当移项，得

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+k^2r^2=\frac{-1}{\sin\theta\mathrm{Y}}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\mathrm{Y}}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{\mathrm{Y}\sin^2\theta}\frac{\partial^2\mathrm{Y}}{\partial\varphi^2}.$$

左边是 r 的函数，右边是 θ 和 φ 的函数，两边相等是不可能的，除非两边实际上是同一个常数. 通常把这个常数记作 $l(l+1)$，

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+k^2r^2=-\frac{1}{\mathrm{Y}\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\mathrm{Y}}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{\mathrm{Y}\sin^2\theta}\frac{\partial^2\mathrm{Y}}{\partial\varphi^2}$$
$$=l(l+1).$$

这就分解为两个方程

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\mathrm{Y}}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\mathrm{Y}}{\partial\varphi^2}+l(l+1)\mathrm{Y}=0, \tag{9.1.37}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+[k^2r^2-l(l+1)]R=0. \tag{9.1.38}$$

方程(9.1.37)就是球函数方程(9.1.3)，把它进一步分离变数将得到(9.1.8)和连带勒让德方程(9.1.11). 前面已提到，方程(9.1.11)和在 $x=\pm1$ 的“自然边界条件”构成本征值问题，决定 l 只能取整数值.

常微分方程(9.1.38)亦即

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2}+2r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}+[k^2r^2-l(l+1)]R=0, \qquad (9.1.38)$$

叫作 l 阶**球贝塞尔方程**. 这是因为对于 $k>0$,可以把自变数 r 和函数 $R(r)$ 分别换作 x 和 $y(x)$,

$$x=kr, \qquad R(r)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}y(x),$$

则方程(9.1.38)成为

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left[x^2-\left(l+\frac{1}{2}\right)^2\right]y=0, \qquad (9.1.39)$$

而(9.1.39)是 $l+1/2$ 阶的贝塞尔方程,其解见§9.3.

对于 $k=0$,方程(9.1.38)退化成欧拉型方程(9.1.2),相应的解为(9.1.4),即 $R(r)=Cr^l+D/r^{l+1}$.

亥姆霍兹方程来自波动方程和输运方程. 上一章已着重指出用分离变数法求解波动方程和输运方程的前提是边界条件为齐次的,如有非齐次边界条件必须先"齐次化". 这样,我们将认定亥姆霍兹方程的边界条件是已齐次化的. 方程(9.1.38)附加球面($r=r_0$)处的齐次边界条件,构成本征值问题,决定 k 的可能数值. 在§9.4 将会看到,对这样的本征值问题,必然有本征值 $k^2\geqslant 0$. 此本征值问题的求解见§11.5.

(2) 柱坐标系

利用柱坐标系拉普拉斯算符 Δ 的表达式,可得柱坐标系亥姆霍兹方程的表达式为

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial v}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+k^2v=0. \qquad (9.1.40)$$

以分离变数形式的

$$v(\rho,\varphi,z)=R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$$

代入(9.1.40),一步一步分离变数,引进两个常数 λ 和 ν^2,不难分解出三个方程

$$\Phi''+\lambda\Phi=0, \qquad (9.1.41)$$

$$Z''+\nu^2Z=0, \qquad (9.1.42)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}+\left(k^2-\nu^2-\frac{\lambda}{\rho^2}\right)R=0. \qquad (9.1.43)$$

方程(9.1.41)和没有写出的自然的周期条件构成本征值问题，这是读者已往熟知的. 本征值和本征函数是

$$\lambda=m^2, \qquad (m=0,1,2,\cdots) \qquad (9.1.44)$$

$$\Phi(\varphi)=A\cos m\varphi+B\sin m\varphi. \qquad (9.1.45)$$

记常数 $\mu=k^2-\nu^2$，即

$$k^2=\mu+\nu^2. \qquad (9.1.46)$$

于是，方程(9.1.43)可改写为

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}+\left(\mu-\frac{m^2}{\rho^2}\right)R=0. \qquad (9.1.47)$$

如上所述，我们总认为亥姆霍兹方程的边界条件是齐次的. 于是，方程(9.1.42)附加有 $z=z_1$ 和 $z=z_2$ 处的齐次边界条件，构成本征值问题，决定 ν 的可能数值. 而方程(9.1.47)附加有圆柱侧面上的齐次边界条件，也构成本征值问题，决定 μ 的可能数值(本征值). 在 §9.4 中将会看到对这里的两个本征值问题，必然有本征值 $\nu^2\geqslant 0$ 和本征值 $\mu\geqslant 0$. 根据(9.1.46)，k^2 为两个本征值 μ 与 ν^2 之和，故 $k^2\geqslant 0$.

方程(9.1.47)在自变数的代换

$$x=\sqrt{\mu}\,\rho$$

下，化为

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}+\left(1-\frac{m^2}{x^2}\right)R=0, \qquad (9.1.48)$$

这是 m 阶贝塞尔方程.

从上可知，不管是球坐标系，还是柱坐标系，亥姆霍兹方程在齐次边界条件下分离变数后，都有常数 $k^2\geqslant 0$，即 k^2 为非负实数，从而 k 为实数. 于是，波动方程和输运方程分离变数后解得的时间函数(9.1.30)和(9.1.35)中，k 也为实数. 由于(9.1.30)中 C、D 为任意常数，(9.1.35)中 k 以 k^2 形式出现，只需取 $k\geqslant 0$ 即够.

一般，$k=\sqrt{\mu+\nu^2}>0$. 只有 $\mu=0$ 且 $\nu^2=0$ 时，才有 $k=0$. 当 $\mu=0$，$R(\rho)$所遵从的方程(9.1.47)退化为欧拉型方程，其解为(9.1.21)；当 $\nu^2=0$，$Z(z)$的方程(9.1.42)退化为 $Z''=0$，其解为(9.1.20).

现将以上分离变数结果列表如下：

方　程	球坐标系	柱坐标系
拉普拉斯方程 $\Delta_3 u=0$	$\Phi(\varphi)=\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{Bmatrix}$ $R(r)=\begin{Bmatrix}r^l\\ 1/r^{l+1}\end{Bmatrix}$ $\Theta(x)$：l 阶连带勒让德方程	$\Phi(\varphi)=\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{Bmatrix}$ $(\mu>0)$　$Z(z)=\begin{Bmatrix}e^{\sqrt{\mu}z}\\ e^{-\sqrt{\mu}z}\end{Bmatrix}$　$R(\rho)$：m 阶贝塞尔方程 $(\mu=-\nu^2<0)$　$Z(z)=\begin{Bmatrix}\cos\nu z\\ \sin\nu z\end{Bmatrix}$　$R(\rho)$：m 阶虚宗量贝塞尔方程 $(\mu=-\nu^2=0)$ $Z(z)=\begin{Bmatrix}1\\ z\end{Bmatrix}$ $R_0(\rho)=\begin{Bmatrix}1\\ \ln\rho\end{Bmatrix}$；　$R_m(\rho)=\begin{Bmatrix}\rho^m\\ \rho^{-m}\end{Bmatrix}$ $(m\neq0)$
波动方程 $u_{tt}-a^2\Delta_3 u=0$	$T_0(t)=\begin{Bmatrix}1\\ t\end{Bmatrix}$；$T_k(t)=\begin{Bmatrix}\cos kat\\ \sin kat\end{Bmatrix}$　$(k\neq0)$ $\Delta v(r)+k^2v(r)=0$	
输运方程 $u_t-a^2\Delta_3 u=0$	$T(t)=e^{-k^2a^2t}$　　$\Delta v(r)+k^2v(r)=0$	
亥姆霍兹方程 $\Delta_3 v+k^2v=0$	$\Phi(\varphi)=\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{Bmatrix}$ $\Theta(\theta)$：l 阶连带勒让德方程 $R(r)$：l 阶球贝塞尔方程$(k\neq0)$ $R_0(r)=\begin{Bmatrix}r^l\\ 1/r^{l+1}\end{Bmatrix}$	$\Phi(\varphi)=\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{Bmatrix}$ $Z(z)=\begin{Bmatrix}\cos\nu z\\ \sin\nu z\end{Bmatrix}$；但 $\nu=0$ 则 $Z(z)=\begin{Bmatrix}1\\ z\end{Bmatrix}$ $R(\rho)$：m 阶贝塞尔方程；但 $\mu=0$ 则 $R_0(\rho)=\begin{Bmatrix}1\\ \ln\rho\end{Bmatrix}$；$R_m(\rho)=\begin{Bmatrix}\rho^m\\ \rho^{-m}\end{Bmatrix}$$(m\neq0)$ $[k^2=\mu+\nu^2]$

习　题

1. 试用平面极坐标系把二维波动方程分离变数.
2. 试用平面极坐标系把二维输运方程分离变数.
3. 氢原子定态问题的量子力学薛定谔方程是

$$-\frac{h^2}{8\pi^2\mu}\Delta u-\frac{Ze^2}{r}u=Eu,$$

其中 h,μ,Z,e,E 都是常数. 试用球坐标系把这个方程分离变数.

§9.2　常点邻域上的级数解法

用球坐标系和柱坐标系对拉普拉斯方程、波动方程、输运方程进行分离变数,就出现连带勒让德方程、勒让德方程、贝塞尔方程、球贝塞尔方程等特殊函数方程. 用其他坐标系对其他数学物理偏微分方程进行分离变数,还会出现各种各样的特殊函数方程. 它们大多是线性二阶常微分方程. 这向我们提出求解带初始条件的线性二阶常微分方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0, \qquad (9.2.1)$$
$$y(x_0)=C_0, \qquad y'(x_0)=C_1$$

的任务,其中 x_0 为任意指定点,C_0,C_1 为常数.

这些线性二阶常微分方程常常不能用通常的方法解出,但可用级数解法解出. 所谓级数解法,就是在某个任选点 x_0 的邻域上,把待求的解表为系数待定的级数,代入方程以逐个确定系数.

级数解法是一个比较普遍的方法,适用范围较广,可借助于解析函数的理论进行讨论. 这里仅介绍有关的结论,不作证明. 读者如需要了解有关证明,可以参看例如斯米尔诺夫著《高等数学教程》第三卷第三分册等书.

求得的解既然是级数,就有是否收敛以及收敛范围的问题. 级数解法的计算较为繁长,要求耐心和细心.

不失一般性,我们讨论复变函数 $w(z)$ 的线性二阶常微分方程

$$\frac{d^2w}{dz^2}+p(z)\frac{dw}{dz}+q(z)w=0, \tag{9.2.2}$$
$$w(z_0)=C_0, \qquad w'(z_0)=C_1.$$

其中 z 为复变数，z_0 为选定的点，C_0、C_1 为复常数.

（一）方程的常点和奇点

如果方程(9.2.2)的系数函数 $p(z)$ 和 $q(z)$ 在选定的点 z_0 的邻域中是解析的，则点 z_0 叫作方程(9.2.2)的**常点**. 如果选定的点 z_0 是 $p(z)$ 或 $q(z)$ 的奇点，则点 z_0 叫作方程(9.2.2)的**奇点**

本节介绍常点邻域上的级数解法.

（二）常点邻域上的级数解

关于线性二阶常微分方程(9.2.2)在常点邻域上的级数解，有下面的定理(本书不证明).

若方程(9.2.2)的系数 $p(z)$ 和 $q(z)$ 为点 z_0 的邻域 $|z-z_0|<R$ 中的解析函数，则方程(9.2.2)在这圆中存在唯一的解析的解 $w(z)$ 满足初值条件 $w(z_0)=C_0, w'(z_0)=C_1$，其中 C_0, C_1 是任意给定的复常数.

既然线性二阶常微分方程(9.2.2)在常点 z_0 的邻域 $|z-z_0|<R$ 上存在唯一的解析解.就把它表成此邻域上泰勒级数的形式

$$w(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k \tag{9.2.3}$$

其中系数 $a_1, a_2, \cdots a_k, \cdots$ 有待确定.

为了确定级数解(9.2.3)中的系数，具体做法是以(9.2.3)代入方程(9.2.2)，合并同幂项，令合并后的各系数分别为零，找出系数 $a_0, a_1, a_2, \cdots a_k, \cdots$ 之间的递推关系，最后用已给的初值 C_0, C_1 来确定各个系数 $a_k(k=0,1,2,\cdots)$，从而求得确定的级数解. 下面以 l 阶勒让德方程为例，具体说明级数解法的步骤.

（三）勒让德方程　自然边界条件

（1）勒让德方程的级数解

在 $x_0=0$ 的邻域上求解 l 阶勒让德方程

$$(1-x^2)y''-2xy'+l(l+1)y=0, \qquad (9.2.4)$$

即 $y''-[2x/(1-x^2)]y'+[l(l+1)/(1-x^2)]y=0$. 方程的系数 $p(x)=-2x/(1-x^2)$, $q(x)=l(l+1)/(1-x^2)$. 在 $x_0=0$, 单值函数 $p(x_0)=0$, $q(x_0)=l(l+1)$, 均为有限值, 它们必然在 $x_0=0$ 为解析的. 因此, $x_0=0$ 是方程的常点. 根据常点邻域上解的定理, 解具有(9.2.3)的泰勒级数形式, 在这里就是

$$y(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_kx^k+\cdots.$$

于是 $y'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\cdots+(k+1)a_{k+1}x^k+\cdots,$

$$y''(x)=2a_2+3\cdot 2a_3x+4\cdot 3a_4x^2+\cdots+(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k+\cdots.$$

将它们代入 l 阶勒让德方程(9.2.4). 方程里的 $(1-x^2)$ 是只含 x^0 和 x^2 项的泰勒级数, $-2x$ 是只含 x^1 项的泰勒级数, $l(l+1)$ 是只含 x^0 项的泰勒级数, 无需再作展开.

合并同幂次的项列表如下.

	常数项	x 项	x^2 项	…	x^k 项	…
$y''=$	$2\cdot 1a_2$	$3\cdot 2a_3$	$4\cdot 3a_4$	…	$(k+2)(k+1)a_{k+2}$	…
$-x^2y''=$			$-2\cdot 1a_2$	…	$-k(k-1)a_k$	…
$-2xy'=$		$-2\cdot 1a_1$	$-2\cdot 2a_2$	…	$-2ka_k$	…
$l(l+1)y=$	$l(l+1)a_0$	$l(l+1)a_1$	$l(l+1)a_2$	…	$l(l+1)a_k$	…

上表各幂次合并后的系数应分别为零, 从而得一系列方程

$2\cdot 1a_2+l(l+1)a_0=0,$

$4\cdot 3a_4+(l^2+l-6)a_2=0,$

……………………………

$3\cdot 2a_3+(l^2+l-2)a_1=0,$

$5\cdot 4a_5+(l^2+l-12)a_3=0,$

……………………………

$$(k+2)(k+1)a_{k+2}+(l^2+l-k^2-k)a_k=0.$$

一般的系数递推公式是

$$a_{k+2}=\frac{k^2+k-l(l+1)}{(k+2)(k+1)}a_k=\frac{(k-l)(k+l+1)}{(k+2)(k+1)}a_k. \qquad (9.2.5)$$

按照递推公式具体进行系数的递推,

$$a_2=\frac{(-l)(l+1)}{2!}a_0,\qquad a_3=\frac{(1-l)(l+2)}{3!}a_1,$$

$$a_4=\frac{(2-l)(l+3)}{4\cdot 3}a_2=\frac{(2-l)(-l)\cdot(l+1)(l+3)}{4!}a_0,\qquad a_5=\frac{(3-l)(l+4)}{5\cdot 4}a_3=\frac{(3-l)(1-l)\cdot(l+2)(l+4)}{5!}a_1,$$

$$\cdots\cdots\qquad\qquad\cdots\cdots$$

$$a_{2k}=\frac{(2k-2-l)(2k-4-l)\cdots(2-l)(-l)\cdot(l+1)(l+3)\cdots(l+2k-1)}{(2k)!}a_0,$$

$$a_{2k+1}=\frac{(2k-1-l)(2k-3-l)\cdots(1-l)\cdot(l+2)(l+4)\cdots(l+2k)}{(2k+1)!}a_1.$$

这样，我们得到 l 阶勒让德方程的解

$$y(x)=a_0y_0(x)+a_1y_1(x),\tag{9.2.6}$$

$$y_0(x)=1+\frac{(-l)(l+1)}{2!}x^2+\frac{(2-l)(-l)(l+1)(l+3)}{4!}x^4+\cdots+\frac{(2k-2-l)(2k-4-l)\cdots(-l)(l+1)(l+3)\cdots(l+2k-1)}{(2k)!}x^{2k}+\cdots,\tag{9.2.7}$$

$$y_1(x)=x+\frac{(1-l)(l+2)}{3!}x^3+\frac{(3-l)(1-l)(l+2)(l+4)}{5!}x^5+\cdots+\frac{(2k-1-l)(2k-3-l)\cdots(1-l)(l+2)(l+4)\cdots(l+2k)}{(2k+1)!}x^{2k+1}+\cdots.\tag{9.2.8}$$

需要确定级数 $y_0(x)$ 和 $y_1(x)$ 的收敛半径. 把幂级数收敛半径的公式(3.2.3)应用于 $y_0(x)$ 和 $y_1(x)$，在这里就是 $R=\lim\limits_{n\to\infty}|a_n/a_{n+2}|$. 利用递推公式(9.2.5)，

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+2)(n+1)}{(n-l)(n+l+1)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left(1-\frac{l}{n}\right)\left(1+\frac{l+1}{n}\right)}\right|=1.$$

这样，级数解 $y_0(x)$ 和 $y_1(x)$ 收敛于 $|x|<1$ 而发散于 $|x|>1$. $y_0(x)$ 仅含 x 的偶次幂，为偶函数. $y_1(x)$ 仅含 x 的奇次幂，为奇函数.

（2）级数解在 $x=\pm1$ 是否收敛

从 § 9.1 可以知道，l 阶勒让德方程中的 $x=\cos\theta$，其绝对值 $|x|=|\cos\theta|\leqslant1$. 因此，尽管级数解 $y_0(x)$ 和 $y_1(x)$ 发散于 $|x|>1$，这根本不成为问题.

不过，$x=\pm1$ 对应于 $\theta=0,\pi$（即球坐标的极轴方向及其反方向），级数解 $y_0(x)$ 和 $y_1(x)$ 在 $x=\pm1$ 是否收敛，倒是要认真考虑的.

本书附录四利用高斯判别法证明，级数解 $y_0(x)$ 和 $y_1(x)$ 各在 $x=\pm1$ 发散. 那么，是否可能存在某个在 $x=\pm1$ 为有限的级数解呢？事实上，§ 9.3 习题 5 就是求 l 阶勒让德方程在 $x=+1$ 为有限的级数解，不过，这个解在 $x=-1$ 是发散的. 下面用反证法证明 l 阶勒让德方程在 $x=\pm1$ 均为有限的级数解不存在.

假定有一个级数解 $y(x)$ 在 $x=+1$ 和 $x=-1$ 是有限的. $y(x)$ 总可表为 $y_0(x)$ 和 $y_1(x)$ 的线性组合.

$$y(x)=D_0y_0(x)+D_1y_1(x). \tag{9.2.9}$$

注意，如果把 x 一律换为 $-x$，l 阶勒让德方程并不改变. 这是说，(9.2.9) 右边的 x 如换为 $-x$.

$$y(-x)=D_0y_0(-x)+D_1y_1(-x), \tag{9.2.10}$$

仍然是 l 阶勒让德方程的解，并且也在 $x=+1$ 和 $x=-1$ 有限. 由于 $y_0(x)$ 是偶函数，$y_1(x)$ 是奇函数，(9.2.10) 可以改写为

$$y(-x)=D_0y_0(x)-D_1y_1(x). \tag{9.2.11}$$

既然 (9.2.9) 和 (9.2.11) 都是 l 阶勒让德方程在 $x=+1$ 和 $x=-1$ 为有限的解，它们的和即 $2D_0y_0(x)$，以及它们的差即 $2D_1y_1(x)$，应当也是 l 阶勒让德方程在 $x=+1$ 和 $x=-1$ 为有限的解. 但是，上面已证明 $y_0(x)$ 和 $y_1(x)$ 在 $x=\pm1$ 发散，由此可见，“有一个级数解 $y(x)$ 在 $x=+1$ 和 $x=-1$ 为有限”的假定不能成立. 结论是 l

阶勒让德方程没有形如 $y(x)=D_0y_0(x)+D_1y_1(x)$而在 $x=\pm1$均有限的无穷级数解.

有不少定解问题要求 u 在一切方向保持有限,相应地就要求勒让德方程的解在一切方向 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 即在 x 的闭区间$[-1,+1]$上保持有限.而无穷级数解包括 $y_0(x)$和 $y_1(x)$均不满足这个要求.

出路何在?无穷级数解在 $x=\pm1$ 存在发散问题,如若能退化为多项式,具有有限多项,在 $x=\pm1$ 必然取有限数值,那么,发散问题就根本不存在了.

(3) 退化为多项式的可能性

仔细观察级数解 $y_0(x)$和 $y_1(x)$,它们确实有退化为多项式的可能.

如参数 l 是某个偶数,$l=2n$(n 是正整数),则 $y_0(x)$只到 x^{2n}项为止,因为从 x^{2n+2}项起,系数都含有因子$(2n-l)$从而都是零.$y_0(x)$不再是无穷级数而是 $2n$ 次多项式,并且只含偶次幂项.至于 $y_1(x)$,因其系数不含因子$(2n-l)$,仍是无穷级数且在 $x=\pm1$ 发散.在一般解(9.2.6)中只要取任意常数 $a_1=0$ 即得一个只含偶次幂的 l 次多项式 $a_0y_0(x)$.以后将选取适当的 a_0 得到一个特解,称作 l 阶**勒让德多项式**.

如参数 l 是某个奇数,$l=2n+1$(n 是零或正整数),则 $y_1(x)$只到 x^{2n+1}项为止,因为从 x^{2n+3}项起,系数都含有因子$(2n+1-l)$从而都是零.$y_1(x)$不再是无穷级数而是 $2n+1$ 次多项式,并且只含奇次幂项.至于 $y_0(x)$,因其系数不含因子$(2n+1-l)$,仍是无穷级数且在 $x=\pm1$ 发散.在一般解(9.2.6)中只要取任意常数 $a_0=0$ 即得一个只含奇次幂的 l 次多项式 $a_1y_1(x)$.以后将选取适当的 a_1 得到一个特解,称作 l 阶**勒让德多项式**.

(4) 自然边界条件

由此看来,对于勒让德方程,"解在区间$[-1,+1]$的两端 $x=\pm1$ 保持有限"竟然是一个严重的限制,在分离变数过程中所引入

的常数 $l(l+1)$ 中的 l 被限制于零和正整数，通常把"解在 $x=\pm 1$ 保持有限"说成是勒让德方程的**自然边界条件**.

勒让德方程与自然边界条件构成**本征值问题**. **本征值**是

$$l(l+1) \quad (l \text{ 为零或正整数}), \tag{9.2.12}$$

本征函数则是 l 阶勒让德多项式.

习　题

1. 在 $x_0=0$ 的邻域上求解常微分方程 $y''+\omega^2 y=0$（ω 是常数）.

2. 在 $x_0=0$ 的邻域上求解 $y''-xy=0$.

3. 在 $x_0=0$ 的邻域上求解埃尔米特方程

$$y''-2xy'+(\lambda-1)y=0.$$

λ 取什么数值可使级数解退化为多项式？这些多项式乘以适当常数使最高幂项成为 $(2x)^n$ 形式，就叫作**埃尔米特多项式**，记作 $H_n(x)$. 写出前几个 $H_n(x)$.

4. 在 $x_0=0$ 的邻域上求解 $(1-x^2)y''-6xy'+6y=0$ 即

$$(1-x^2)y''-2(2+1)xy'+[3(3+1)-2(2+1)]y=0.$$

在勒让德方程的级数解(9.2.7)和(9.2.8)之中以 $l=3$ 代入，并求它的二阶导数，然后跟本题的答案比较一下.

5. 在 $x_0=0$ 的邻域上求解雅可俾方程

$$(1-x^2)y''+[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]y'+\lambda(\alpha+\beta+\lambda+1)y=0.$$

§9.3　正则奇点邻域上的级数解法

（一）奇点邻域上的级数解

求解线性二阶常微分方程

$$w''+p(z)w'+q(z)w=0. \tag{9.3.1}$$

如果选定的点 z_0 是方程(9.3.1)的奇点，则一般说来，解也以 z_0 为奇点，在点 z_0 邻域上的展开式不是泰勒级数而含有负幂项.

关于奇点邻域上的级数解，有下面的定理（本书不证）.

若点 z_0 为方程(9.2.2)的奇点，则在点 z_0 的邻域 $0<|z-z_0|<R$ 上，方程(9.2.2)存在两个线性独立解，其形式为

$$w_1(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-z_0)^{s_1+k}, \qquad (9.3.2)$$

和
$$w_2(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k(z-z_0)^{s_2+k}, \qquad (9.3.3)$$

或
$$w_2(z)=Aw_1(z)\ln(z-z_0)+\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k(z-z_0)^{s_2+k} \qquad (9.3.4)$$

其中 $s_1, s_2, A, a_k, b_k (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 为常数.

以上仅仅是一般性的论断，并未提供具体求出级数解的方法，即如何确定常数 s_1, s_2, A, a_k, b_k. 事实上，这些常数的确定在一般情况下很困难，本书从略.

（二）正则奇点邻域上的级数解

如果在方程(9.3.1)的奇点 z_0 的邻域 $0<|z-z_0|<R$ 上，方程的两个线性独立解全都具有有限个负幂项，则奇点 z_0 称为方程的**正则奇点**. 这里只讨论这种相对容易的情况. 这也是常见的情况.

如系数 $p(z)$ 以 z_0 为不高于一阶的极点，且系数 $q(z)$ 以 z_0 为不高于二阶的极点，即

$$p(z)=\sum_{k=-1}^{\infty} p_k(z-z_0)^k, \quad q(z)=\sum_{k=-2}^{\infty} q_k(z-z_0)^k, \qquad (9.3.5)$$

可以证明奇点 z_0 就是**正则奇点**. 这就是说，在 z_0 的邻域 $0<|z-z_0|<R$ 上，方程(9.3.1)的两个线性独立解的级数表达式只有有限个负幂项：

$$w_1(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^{s_1+k}, \qquad (9.3.6)$$

$$w_2(z)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_0)^{s_2+k}, \qquad (9.3.7)$$

或
$$w_2(z)=Aw_1(z)\ln(z-z_0)+\sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_0)^{s_2+k}, \qquad (9.3.8)$$

其中 s_1 和 s_2 是所谓**判定方程**

$$s(s-1)+sp_{-1}+q_{-2}=0 \qquad (9.3.9)$$

的两个根，而 s_2 为较小的那一个根，至于 A, a_k 和 b_k 均为常数系

数.

(9.3.7)适用于 $s_1-s_2\neq$整数的情况,(9.3.8)则适用于 s_1-s_2 $=$整数的情况.不过,(9.3.8)中的 A 也有可能等于零,而(9.3.8)又归结为(9.3.7).

这些结论不难验证:

把(9.3.5)和

$$w(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^{s+k} \tag{9.3.10}$$

代入方程(9.3.1),合并同幂项,令合并后的各系数分别为零.其中最低幂项合并后的系数是 $s(s-1)+sp_{-1}+q_{-2}$,令它等于零,得到的正是判定方程(9.3.9).这是二次代数方程,它有两个根 s_1 和 s_2,分别作为线性独立解(9.3.6)和(9.3.7)的最低幂次.

对于不符合条件(9.3.5)的情况,(9.3.5)应代之以

$$p(z)=\sum_{k=-m}^{\infty}p_k(z-z_0)^k,\quad q(z)=\sum_{k=-n}^{\infty}q_k(z-z_0)^k.$$

其中 $m>1$ 或 $n>2$.把它们和(9.3.10)代入方程(9.3.1),合并同幂项,令最低幂项合并后的系数为零,却得不到 s 的二次代数方程,只得到 s 的一次代数方程或零次代数方程(请读者自行验算).这是说,只能求出一个 s 或根本求不出 s.换句话说,不存在两个线性独立的各自含有有限个负幂项的级数解.

回到正则奇点的情况.从判定方程(9.3.9)求得两个根 s 之后,以(9.3.5)和(9.3.6)代入方程(9.3.1),合并同幂项,按升幂顺序,依次令各幂项的系数等于零,就得到系数递推公式,从 a_0 依次求出各个 a_k.这就具体求出级数解(9.3.6).同理,以(9.3.5)和(9.3.7)代入方程(9.3.1),如果顺利("顺利"的意思下面再解释),也可从 b_0 依次求出各个 b_k,具体求出线性独立的另一级数解(9.3.7).a_0 和 b_0 则正是二阶常微分方程的解的两个积分常数.

但是,如果 $s_1-s_2=h$,而 h 为零或正整数,递推 b_k 的过程就不那么顺利了."h 为零",显然不会顺利,因为这时 $s_2=s_1$,(9.3.6)与(9.3.7)简直就是一回事,它们并不是线性独立的两个解."$h=$正整数"也会不顺利,因为 b_h 的递推公式(请读者自行验算)是

$$b_h[(s_2+h)(s_2+h-1)+p_{-1}(s_2+h)+q_{-2}]+b_{h-1}[(s_2+h-1)p_0+q_{-1}]$$

$$+b_{h-2}[(s_2+h-2)p_1+q_0]+\cdots+b_0[s_2p_{h-1}+q_{h-2}]=0,$$

即

$$b_h[s_1(s_1-1)+p_{-1}s_1+q_{-2}]+b_{h-1}[(s_1-1)p_0+q_{-1}]+\cdots+b_0[s_2p_{h-1}+q_{h-2}]=0. \tag{9.3.11}$$

按照判定方程，$s_1(s_1-1)+p_{-1}s_1+q_{-2}=0$，递推公式(9.3.11)成为

$$b_h\cdot 0+b_{h-1}[(s_1-1)p_0+q_{-1}]+\cdots+b_0[s_2p_{h-1}+q_{h-2}]=0. \tag{9.3.12}$$

我们要推算的 b_h 从上面的递推公式中消失了，我们怎么能推算出 b_h 呢？系数的递推失败.不过，在某种特殊情况下，递推公式(9.3.11)成为恒等式

$$b_h\cdot 0+b_{h-1}\cdot 0+b_{h-2}\cdot 0+\cdots+b_0\cdot 0=0, \tag{9.3.13}$$

则 b_h 为任意常数，系数的递推仍可顺利进行.

(9.3.7)的系数递推不顺利，这意思是说，方程(9.3.1)的第二个解并不是(9.3.7)的形式.那么，它的形式应该是怎样的呢？这个问题可利用朗斯基行列式的性质来解决.

记方程(9.3.1)的两个线性独立解为 $w_1(z)$和 $w_2(z)$

$$w''_1+p(z)w'_1+q(z)w_1=0, \tag{9.3.14}$$

$$w''_2+p(z)w'_2+q(z)w_2=0, \tag{9.3.15}$$

则行列式

$$\Delta(z)=\begin{vmatrix} w_1(z) & w_2(z) \\ w'_1(z) & w'_2(z) \end{vmatrix}=w_1w'_2-w'_1w_2$$

称为方程(9.3.1)的**朗斯基行列式**.

其实，不必求解微分方程就可以写出它的朗斯基行列式.事实上，以 w_1 遍乘(9.3.15)的每一项，以 w_2 遍乘(9.3.14)的每一项，两者相减即得

$$(w_1w''_2-w''_1w_2)+p(w_1w'_2-w'_1w_2)=0,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}\Delta(z)}{\mathrm{d}z}+p\Delta(z)=0,$$

从而

$$\Delta(z)=\Delta_0\mathrm{e}^{-\int p(z)\mathrm{d}z}, \tag{9.3.16}$$

式中 Δ_0 是常数.

有了朗斯基行列式，就可以从二阶微分方程的一个解 $w_1(z)$求得线性独立的第二个解 $w_2(z)$.事实上，易证

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{w_2}{w_1}\right)=\frac{w_1w'_2-w'_1w_2}{w_1^2}=\frac{\Delta(z)}{w_1^2}$$

从而

$$w_2 = w_1\int \frac{\Delta(z)}{[w_1(z)]^2}\mathrm{d}z. \tag{9.3.17}$$

对于方程(9.3.1)，已知其一个解的形式是(9.3.6)，以此代入(9.3.17)，就可求得线性独立的第二个解的形式，其结果就是(9.3.8). 有兴趣的读者不妨自行验算.

下面以贝塞尔方程为例，说明在方程的正则奇点邻域上如何用级数解法求解线性二阶常微分方程.

（三）贝塞尔方程

（1）ν 阶贝塞尔方程

在点 $x_0=0$ 的邻域上求解 ν 阶贝塞尔方程

$$x^2y'' + xy' + (x^2-\nu^2)y=0.\ (\text{阶 } \nu\neq \text{整数或半奇数}) \tag{9.3.18}$$

方程即 $y''+(1/x)y'+(1-\nu^2/x^2)y=0$. 点 $x_0=0$ 是 $p(x)=1/x$ 的一阶极点，又是 $q(x)=1-\nu^2/x^2$ 的二阶极点. 因此，点 $x_0=0$ 是贝塞尔方程的正则奇点. 判定方程为

$$s(s-1)+s-\nu^2=0,\text{即 } s^2-\nu^2=0.$$

两个根为 $s_1=\nu, s_2=-\nu$，两根之差 $s_1-s_2=2\nu\neq 0$ 或正整数. 因此，线性独立的两个解取(9.3.6)和(9.3.7)的形式.

先不分 s_1 和 s_2，以实变数 x 的解

$$y(x)=a_0x^s+a_1x^{s+1}+a_2x^{s+2}+\cdots+a_kx^{s+k}+\cdots, (a_0\neq 0)$$

代入方程(9.3.18). 合并同幂次的项，列表如下.

	x^s 项	x^{s+1}项	x^{s+2}项	…	x^{s+k}项	…
$x^2y''=$	$s(s-1)a_0$	$(s+1)sa_1$	$(s+2)(s+1)a_2$	…	$(s+k)(s+k-1)a_k$	…
$xy'=$	sa_0	$(s+1)a_1$	$(s+2)a_2$	…	$(s+k)a_k$	…
$x^2y=$			a_0	…	a_{k-2}	…
$-\nu^2y=$	$-\nu^2a_0$	$-\nu^2a_1$	$-\nu^2a_2$	…	$-\nu^2a_k$	…

上表各个幂次合并后的系数应为零. 由此得

$$\begin{cases}[s^2-\nu^2]a_0=0, \\ [(s+1)^2-\nu^2]a_1=0, \\ [(s+2)^2-\nu^2]a_2+a_0=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ [(s+k)^2-\nu^2]a_k+a_{k-2}=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{cases} \tag{9.3.19}$$

根据约定 $a_0\neq0$，(9.3.19)中第一个方程即是判定方程：$s^2-\nu^2=0$，两个根前面已经解出．将这两个根代入(9.3.19)中第二个方程，有$[(\pm\nu+1)^2-\nu^2]a_1=0$，得

$$a_1=0.$$

利用以后各式进行系数的递推，递推公式是

$$[(s+k)^2-\nu^2]a_k+a_{k-2}=0,$$

即

$$\begin{aligned}a_k&=\frac{-1}{(s+k)^2-\nu^2}a_{k-2}\\&=\frac{-1}{(s+k+\nu)(s+k-\nu)}a_{k-2}.\end{aligned}$$

先取 $s_1=+\nu$，递推公式成为 $a_k=-a_{k-2}/k(2\nu+k)$．于是，

$$a_2=\frac{-1}{2(2\nu+2)}a_0=-\frac{1}{1!\,(\nu+1)}\cdot\frac{1}{2^2}a_0,$$

$$a_3=\frac{-1}{3(2\nu+3)}a_1=0,$$

$$\begin{aligned}a_4&=\frac{-1}{4(2\nu+4)}a_2=-\frac{1}{2(\nu+2)}\frac{1}{2^2}a_2\\&=+\frac{1}{2!\,(\nu+1)(\nu+2)}\frac{1}{2^4}a_0,\end{aligned}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{2k}=(-1)^k\frac{1}{k!\,(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+k)}\cdot\frac{1}{2^{2k}}a_0,$$

$$a_{2k+1}=0.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

这样，得到 ν 阶贝塞尔方程的一个特解

$$y_1(x)=a_0x^\nu[1-\frac{1}{1!(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^2$$
$$+\frac{1}{2!(\nu+1)(\nu+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^4-\cdots$$
$$+(-1)^k\frac{1}{k!(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+k)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}+\cdots] \tag{9.3.20}$$

这个级数的收敛半径，按(3.2.3)为

$$R=\lim_{k\to\infty}|a_{k-2}/a_k|=\lim_{k\to\infty}2^2k(2\nu+k)=\infty.$$

这是说，只要 x 有限，级数解(9.3.20)就收敛. 通常取

$$a_0=1/2^\nu\Gamma(\nu+1)$$

(关于实变数 x 的 $\Gamma(x)$ 通常在微积分教本中都有，关于复变数 z 的 Γ 函数，读者可参阅附录十三)，并把这个解叫作 ν 阶**贝塞尔函数**，记作 $\mathrm{J}_\nu(x)$，

$$\mathrm{J}_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}. \tag{9.3.21}$$

再取 $s_2=-\nu$，递推公式成为 $b_k=-b_{k-2}/k(k-2\nu)$. 于是，

$$b_2=\frac{-1}{2(2-2\nu)}b_0=-\frac{1}{1!(-\nu+1)}\frac{1}{2^2}b_0,$$

$$b_3=\frac{-1}{3(3-2\nu)}b_1=0,$$

$$b_4=\frac{-1}{4(4-2\nu)}b_2=+\frac{1}{2(-\nu+2)}\frac{1}{2^2}b_2$$
$$=\frac{1}{2!(-\nu+1)(-\nu+2)}\frac{1}{2^4}b_0,$$

…………………

$$b_{2k}=(-1)^k\frac{1}{k!(-\nu+1)(-\nu+2)\cdots(-\nu+k)}\cdot\frac{1}{2^{2k}}b_0,$$

$$b_{2k+1}=0.$$

………………

这样，得贝塞尔方程的另一个特解

$$y_2(x)=b_0x^{-\nu}[1-\frac{1}{1!(-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$$+\frac{1}{2!\,(-\nu+1)(-\nu+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^4-\cdots$$
$$+(-1)^k\frac{1}{k!\,(-\nu+1)(-\nu+2)\cdots(-\nu+k)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}+\cdots].$$
这个级数的收敛半径
$$R=\lim_{k\to\infty}|b_{k-2}/b_k|=\lim_{k\to\infty}2^2k(-2\nu+k)=\infty.$$
这是说，只要 x 有限，这个级数解就收敛. 通常取
$$b_0=1/2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1),$$
并把这个解叫作$-\nu$ 阶**贝塞尔函数**，记作 $J_{-\nu}(x)$，
$$J_{-\nu}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\,\Gamma(-\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2k}.$$
(9.3.22)

ν 阶贝塞尔方程的通解是
$$y(x)=C_1J_\nu(x)+C_2J_{-\nu}(x),\qquad(9.3.23)$$
C_1,C_2 为任意常数，与 x 无关.

有时取 $C_1=\mathrm{ctg}\nu\pi$，$C_2=-\csc\nu\pi$ 代入(9.3.23)得到一个特解，以此作为 ν 阶贝塞尔方程的第二个线性独立的解. 叫作 ν 阶**诺伊曼函数**，即
$$N_\nu(x)=\frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}.\qquad(9.3.24)$$
因此，ν 阶贝塞尔方程的通解也可取为
$$y(x)=C_1J_\nu(x)+C_2N_\nu(x).\qquad(9.3.25)$$

(2) 半奇数($l+1/2$)阶贝塞尔方程

在点 $x_0=0$ 的邻域上求解($l+1/2$)阶贝塞尔方程
$$x^2y''+xy'+\left[x^2-\left(l+\frac{1}{2}\right)^2\right]y=0.\quad(l=0,1,2,\cdots)$$
(9.3.26)

点 $x_0=0$ 为方程的正则奇点.

首先考虑 $l=0$ 的 1/2 阶贝塞尔方程
$$x^2y''+xy'+\left[x^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]y=0.\qquad(9.3.27)$$

上例已解出判定方程两根为 $s_1=\nu, s_2=-\nu$. 在这里就是 $s_1=1/2, s_2=-1/2$. 对应于大根 $s_1=1/2$ 的特解即贝塞尔函数(9.3.21),其中 $\nu=1/2$. 这就是 1/2 阶贝塞尔函数

$$
\begin{aligned}
\mathrm{J}_{\frac{1}{2}}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k!\ \Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k+\frac{1}{2}-1\right)\cdots\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\ (2k+1)(2k-1)\cdots\cdot 5\cdot 3\cdot 1\ \sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}+2k} \\
&= \sqrt{\frac{2x}{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k(2k-2)\cdots\cdot 4\cdot 2\cdot(2k+1)(2k-1)\cdots\cdot 5\cdot 3\cdot 1}x^{2k} \\
&= \sqrt{\frac{2x}{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k+1)!}x^{2k} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x.
\end{aligned} \tag{9.3.28}
$$

判定方程两根之差 $s_1-s_2=1$ 是整数,第二个特解的形式是(9.3.8),即

$$
y_2(x) = A\mathrm{J}_{\frac{1}{2}}(x)\ln x + \sum_{k=-1/2}^{\infty} b_k x^k.
$$

这里稍微改变了 b 的下标,这是无所谓的. 把上式代入 1/2 阶贝塞尔方程,得

$$
\begin{aligned}
A\left[x^2\mathrm{J}''_{\frac{1}{2}}+x\mathrm{J}'_{\frac{1}{2}}+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)\mathrm{J}_{\frac{1}{2}}\right]\ln x + 2Ax\mathrm{J}_{\frac{1}{2}}' \\
+\sum_{k=-1/2}^{\infty}k(k-1)b_k x^k + \sum_{k=-1/2}^{\infty}kb_k x^k \\
-\sum_{k=-1/2}^{\infty}b_k x^{k+2} - \sum_{k=-1/2}^{\infty}\frac{1}{4}b_k x^k = 0.
\end{aligned}
$$

1/2 阶贝塞尔函数是 1/2 阶贝塞尔方程的解,所以上式的[ ]=0. 加以适当归并,上式成为

$$2AxJ'_{\frac{1}{2}}+\sum_{k=-1/2}^{\infty}\left(k^2-\frac{1}{4}\right)b_kx^k+\sum_{k=-1/2}^{\infty}b_kx^{k+2}=0.$$

把各个幂次的项分别集合如下表.

	$x^{-\frac{1}{2}}$项	$x^{\frac{1}{2}}$项	$x^{\frac{3}{2}}$项	$x^{\frac{5}{2}}$项	…	x^{k+2}项	…
$2AxJ_{\frac{1}{2}}'=$		$A\sqrt{\frac{\pi}{2}}$		$-A\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{5}{3!}$	…	$(-1)^{\frac{k}{2}+\frac{3}{4}}A\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ $\frac{2(k+2)}{(k+5/2)!}$ (限于 k=偶数+1/2)	…
$\sum(k^2-\frac{1}{4})\times b_kx^k=$	$0b_{-\frac{1}{2}}$	$0b_{\frac{1}{2}}$	$\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]b_{\frac{3}{2}}$	$\left[\left(\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]b_{\frac{5}{2}}$	…	$\left[(k+2)^2-\frac{1}{4}\right]b_{k+2}$	…
$\sum b_kx^{k+2}=$			$b_{-\frac{1}{2}}$	$b_{\frac{1}{2}}$	…	b_k	…

从 $x^{-1/2}$项系数为零,知

$$b_{-\frac{1}{2}}\text{任意}.$$

从 $x^{1/2}$项系数为零,知

$$A=0,\quad b_{\frac{1}{2}}\text{任意}.$$

不难验证,从任意常数 $a_{\frac{1}{2}}$ 递推下去,所得各项正好组成 $\sqrt{\pi/2}a_{\frac{1}{2}}J_{\frac{1}{2}}(x)$,这是我们已经求出的第一解,可以弃置不论.这是说,不妨认为 $b_{\frac{1}{2}}=0$.于是递推出

$$b_{\frac{5}{2}},b_{\frac{9}{2}},b_{\frac{13}{2}},\cdots\text{全为零}.$$

从 $x^{3/2},x^{7/2},x^{11/12},\cdots$等项的系数为零,得

$$b_{\frac{3}{2}}=-\frac{1}{2}b_{-\frac{1}{2}},\quad b_{\frac{7}{2}}=-\frac{1}{4\cdot 3}b_{\frac{3}{2}}=\frac{1}{4!}b_{-\frac{1}{2}},$$

$$b_{\frac{11}{2}}=-\frac{1}{6\cdot 5}b_{\frac{7}{2}}=-\frac{1}{6!}b_{-\frac{1}{2}},\cdots\cdots.$$

于是,求得第二个特解

$$y_2(x)=b_{-\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\right)$$

$$=b_{-\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{x}}\cos x.$$

通常取 $b_{-\frac{1}{2}}=\sqrt{2/\pi}$，第二个特解成为

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x. \tag{9.3.29}$$

尽管判定方程两根之差是正整数 1，但常数 $A=0$，第二特解的表达式中并不出现对数函数.

$\frac{1}{2}$阶贝塞尔方程的通解是

$$y(x)=C_1J_{\frac{1}{2}}(x)+C_2J_{-\frac{1}{2}}(x). \tag{9.3.30}$$

接着考虑一般的半奇数$(l+1/2)$阶贝塞尔方程(9.3.26)，判定方程的两个根为 $s_1=l+1/2, s_2=-(l+1/2)$，两根之差 $s_1-s_2=2l+1$，为正整数. 对应大根 $s_1=l+1/2$ 的特解应为 $\nu=l+1/2$ 阶的贝塞尔函数(9.3.21)，即

$$J_{l+\frac{1}{2}}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\ \Gamma(l+1/2+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{l+\frac{1}{2}+2k}. \tag{9.3.31}$$

第二个线性独立的特解的形式是(9.3.8)，即

$$y_2(x)=AJ_{l+\frac{1}{2}}(x)\ln x+\sum_{k=-(l+1/2)}^{\infty}b_kx^k.$$

以此代入方程(9.3.26)，可证同样有 $A=0$，所以第二个特解仍可用(9.3.22)表示，不过应取 $-\nu=-(l+1/2)$，即

$$J_{-(l+\frac{1}{2})}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\ \Gamma\left(-l-\frac{1}{2}+k+1\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-l-\frac{1}{2}+2k} \tag{9.3.32}$$

$(l+1/2)$阶贝塞尔方程的通解是

$$y(x)=C_1J_{l+1/2}(x)+C_2J_{-(l+1/2)}(x). \tag{9.3.33}$$

(3) 整数 m 阶贝塞尔方程

在点 $x_0=0$ 的邻域上求解整数 m 阶贝塞尔方程

$$x^2y''+xy'+(x^2-m^2)y=0.\ (m\ 为自然数). \tag{9.3.34}$$

由前面例子可知，这里判定方程的两个根是 $s_1=m, s_2=-m$，两根之差 $s_1-s_2=2m$ 是 0 或正整数，对应大根 $s_1=m$ 的特解仍为贝塞尔函数(9.3.21)，不过应取 $\nu=m$，即 m 阶贝塞尔函数

$$\mathrm{J}_m(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\,(m+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k} \qquad (9.3.35)$$

其中用了 $\Gamma(x)$ 的公式 $\Gamma(m+k+1)=(m+k)!$.

对应小根 $s_2=-m$ 的特解.这里先尝试仍求(9.3.7)形式，这样得到的特解就是(9.3.22)，其中 $-\nu=-m$，得 $-m$ 阶贝塞尔函数

$$\mathrm{J}_{-m}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\,\Gamma(-m+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2k}.$$

由于 m 是 0 或正整数，只要 $k<m$，则 $-m+k+1$ 是零或负整数，而零或负整数的 Γ 函数为无限大，所以上面这个级数实际上只从 $k=m$ 的项开始，

$$\mathrm{J}_{-m}(x)=\sum_{k=m}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\,\Gamma(-m+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2k}.$$

令 $l=k-m$，则

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_{-m}(x)&=\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^{l+m}\frac{1}{(l+m)!\,\Gamma(l+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2l}\\&=(-1)^m\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\frac{1}{(l+m)!\,l!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2l}\\&=(-1)^m\mathrm{J}_m(x),\end{aligned} \qquad (9.3.36)$$

实际上就是第一个特解，不成为第二个特解！

或者，让我们尝试(9.3.24)所定义的诺伊曼函数 $N_\nu(x)=[\mathrm{J}_\nu(x)\cos\nu\pi-\mathrm{J}_{-\nu}(x)]/\sin\nu\pi$. 可是，当 $\nu\to$ 整数 m，这个表达式成为不定式 0/0，必须运用罗毕达法则求极限

$$\mathrm{N}_m(x)=\lim_{\nu\to m}\mathrm{N}_\nu(x)=\lim_{\nu\to m}\frac{\mathrm{J}_\nu(x)\cos\nu\pi-\mathrm{J}_{\nu}(x)}{\sin\nu\pi} \qquad (9.3.37)$$

这个极限的计算见附录七，其结果是

$$\mathrm{N}_m(x)=\frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{x}{2}+C\right)\mathrm{J}_m(x)$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{m-1}\frac{(m-n-1)!}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2n}$$
$$-\frac{1}{\pi}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{(-1)^{n-m}}{n!\,(n-m)!}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2n}$$
$$-\frac{1}{\pi}\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-m}}{n!\,(n-m)!}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-m}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2n}. \tag{9.3.38}$$

对于 $m=0$ 的情况，对 n 的有限求和项 $\sum\limits_{n=0}^{m-1}$ 不存在.

这样，整数阶贝塞尔方程的通解不是 $C_1\mathrm{J}_m(x)+C_2\mathrm{J}_{-m}(x)$，而是

$$C_1\mathrm{J}_m(x)+\mathrm{N}_m(x). \tag{9.3.39}$$

用级数解法也能求得诺伊曼函数(9.3.38). 为此，应从(9.3.8)形式的级数出发. 在这里就是

$$y_2(x)=A\mathrm{J}_m(x)\ln x+\sum_{k=0}^{\infty}b_k x^{-m+k}.$$

把上式代入贝塞尔方程，得

$$A[x^2\mathrm{J}_m''+x\mathrm{J}_m'+(x^2-m^2)\mathrm{J}_m]\ln x+2Ax\mathrm{J}m'+\sum_{k=0}^{\infty}(-m+k)(-m+k-1)$$
$$b_k x^{-m+k}+\sum_{k=0}^{\infty}(-m+k)b_k x^{-m+k}+(x^2-m^2)\sum_{k=0}^{\infty}b_k x^{-m+k}=0.$$

即

$$A[x^2\mathrm{J}_m''+x\mathrm{J}_m'+(x^2-m^2)\mathrm{J}_m]\ln x+2Ax\mathrm{J}m'+$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}[(-m+k)^2-m^2]b_k x^{-m+k}+\sum_{k=2}^{\infty}b_{k-2}x^{-m+k}=0. \tag{9.3.40}$$

m 阶贝塞尔函数是 m 阶贝塞尔方程的解，所以上式的第一个[ ]=0. 另外，$x\mathrm{J}_m'(x)=x\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(m+2n)}{n!\,(m+n)!\,2}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2n-1}$ 的最低幂项是 x^m 项. 先把(9.3.40)里幂次低于 m 的项(即 $k<2m$ 的项)分别集合如下表，$x\mathrm{J}_m'$ 项这时暂不必考虑.

	x^{-m}项	x^{-m+1}项	x^{-m+2}项	…	x^{-m+k}项	…
$\sum\limits_{k=0}^{\infty}\cdots$	$0b_0$	$[(m-1)^2-m^2]b_1$	$[(m-2)^2-m^2]b_2$	…	$[(m-k)^2-m^2]b_k$	…
$\sum\limits_{k=2}^{\infty}\cdots$			b_0	…	b_{k-2}	…

令上表各个幂次合并后的系数分别为零，得

$$
\begin{array}{l|l}
0b_0=0, & [(m-1)^2-m^2]b_1=0, \\
[(m-2)^2-m^2]b_2+b_0=0, & [(m-3)^2-m^2]b_3+b_1=0,
\end{array}
$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$[(m-k)^2-m^2]b_k+b_{k-2}=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

由此得

b_0 任意，

$$
\begin{array}{l|l}
b_2=\dfrac{1}{1!\,(m-1)}\dfrac{1}{2^2}b_0, & b_1=0, \\
 & b_3=0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
b_{2n}=\dfrac{1}{n!\,(m-n)(m-n+1)\cdots(m-1)2^{2n}}b_0 & \\
\quad=\dfrac{1}{2^m(m-1)!}\dfrac{(m-n-1)!}{n!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-m+2n}b_0, & b_{2n+1}=0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
b_{2m-2}=\dfrac{1}{2^{2m-2}[(m-1)!]^2}b_0. & b_{2m-1}=0.
\end{array}
$$

其次，观察(9.3.40)里的 x^m（即 $k=2m$）项，令这种项合并后的系数为零，得

$$A\,\frac{1}{(m-1)!\ 2^{m-1}}+0b_{2m}+b_{2m-2}=0.$$

由此得

$$b_{2m}\text{任意}，A=-(m-1)!\ 2^{m-}\cdot b_{2m-2}=\frac{-2}{2^m(m-1)!}b_0.$$

不难验证，从任意常数 b_{2m} 递推下去，所得各项正好组成 $b_{2m}J_m(x)$，这是我们已经求出的第一解，可以弃置不论. 这是说，不妨认为 $b_{2m}=0$. 最后，把(9.3.40)里幂次高于 m 的项（即 $k>2m$ 和 $n>0$ 的项）分别集合如下表。

	x^{m+1}项	x^{m+2}项	x^{m+3}项	x^{m+4}项	…
$2AxJ_m'$	无	$2A\,\dfrac{(-1)(m+2)}{(m+1)!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{m+2}$	无	$2A\,\dfrac{(-1)^2(m+4)}{2!\,(m+2)!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{m+4}$	…
$\sum\limits_{k=0}^{\infty}\cdots$	$[(m+1)^2-m^2]b_{2m+1}$	$[(m+2)^2-m^2]b_{2m+2}$	$[(m+3)^2-m^2]b_{2m+3}$	$[(m+4)^2-m^2]b_{2m+4}$	…
$\sum\limits_{k=2}^{\infty}\cdots$	b_{2m-1}	b_{2m}（认为是零）	b_{2m+1}	b_{2m+2}	…

令上表各个幂次合并后的系数分别为零，得

$$
\begin{cases}
[(m+1)^2-m^2]b_{2m+1}+b_{2m-1}=0, \\
2A\dfrac{(-1)(m+2)}{(m+1)!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{m+2}+[(m+2)^2-m^2]b_{2m+2}=0, \\
[(m+3)^2-m^2]b_{2m+3}+b_{2m+1}=0, \\
2A\dfrac{(-1)^2(m+4)}{2!\,(m+2)!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{m+4}+[(m+4)^2-m^2]b_{2m+4}+b_{2m+2}=0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{cases}
$$

由此得

$$
b_{2m+1}=-\frac{1}{1(2m+1)}b_{2m-1}=0,
$$

$$
\begin{aligned}
b_{2m+2}&=-\frac{1}{2(2m+2)}2A\frac{(-1)(m+2)}{(m+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{m+2} \\
&=\frac{1}{(m-1)!\,2^m}\cdot\frac{(-1)}{(m+1)!\,1!}\left(\frac{1}{2}\right)^{m+2}\left(\frac{m+2}{m+1}\right)b_0 \\
&=\frac{1}{(m-1)!\,2^m}\frac{(-1)^1}{(m+1)!\,1!}\left(\frac{1}{2}\right)^{m+2}\left(1+\frac{1}{m+1}\right)b_0,
\end{aligned}
$$

$$
b_{2m+3}=-\frac{1}{3(2m+3)}b_{2m+1}=0,
$$

$$
\begin{aligned}
b_{2m+4}&=-\frac{1}{4(2m+4)}\left[b_{2m+2}+2A\frac{(-1)^2(m+4)}{2!\,(m+2)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{m+4}\right] \\
&=\frac{1}{(m-1)!\,2^m}\cdot\left[\frac{(-1)^2}{(m+1)!\,1!}\left(\frac{1}{2}\right)^{m+2}\left(1+\frac{1}{m+1}\right)\right. \\
&\qquad\left.\cdot\frac{1}{4\cdot 2(m+2)}+\frac{(-1)^2}{2!\,(m+2)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{m+4}\frac{4(m+4)}{4\cdot 2(m+2)}\right]b_0 \\
&=\frac{1}{(m-1)!\,2^m}\frac{(-1)^2}{2!\,(m+2)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{m+4}\left[\left(1+\frac{1}{m+1}\right)\right. \\
&\qquad\left.+\frac{m+4}{2(m+2)}\right]b_0 \\
&=\frac{1}{(m-1)!\,2^m}\frac{(-1)^2}{2!\,(m+2)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{m+4}\left[\left(1+\frac{1}{m+1}\right)\right. \\
&\qquad\left.+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{m+2}\right)\right]b_0 \\
&=\frac{1}{(m-1)!\,2^m}\frac{(-1)^2}{2!\,(m+2)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{m+4}\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)\right. \\
&\qquad\left.+\left(\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}\right)\right]b_0.
\end{aligned}
$$

依此类推，

$$
b_{2m+2n}=\frac{1}{(m-1)!\,2^m}\frac{(-1)^n}{n!\,(m+n)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{m+2n}
$$

$$\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{m+n}\right)\right]b_0,$$

$b_{2m+2n+1}=0.$

到这里，终于求得第二个特解

$$y_2(x)=\frac{b_0}{(m-1)!\,2^m}\left\{(-2\ln x)\mathrm{J}_m(x)+\sum_{n=0}^{m-1}\frac{(m-n-1)!}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2n}\right.$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(m+n)!}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\right.$$
$$\left.\left.+\left(\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{m+n}\right)\right]\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2n}\right\}.$$

在数学理论中，通常取 $b_0=-(m-1)!\ 2^m/\pi$，并把这个特解与 $\left[\frac{2}{\pi}(C-\ln 2)-\frac{1}{\pi}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right)\right]\mathrm{J}_m(x)$的和叫作 m 阶**诺伊曼函数**，记作 $\mathrm{N}_m(x)$，[记号 C 代表欧拉常数，

$$C=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}-\ln k\right)=0.577216\cdots]$$

$$\mathrm{N}_m(x)=\frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{x}{2}+C\right)\mathrm{J}_m(x)-\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{m-1}\frac{(m-n-1)!}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2n}$$
$$-\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(m+n)!}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+\cdots+\frac{1}{m+n}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2n}$$
$$-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(m+n)!}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2n}.\qquad(9.3.41)$$

在最后两个求和式中，令 $l=m+n$，作指标代换. 代换后，形式上又将 l 仍记为 n，即得 $\mathrm{N}_m(x)$的表达式(9.3.38).

(4) $x=0$ 处的自然边界条件

整数阶贝塞尔函数 $\mathrm{J}_0(x)\sim\mathrm{J}_3(x)$ 和整数阶诺伊曼函数 $\mathrm{N}_0(x)$、$\mathrm{N}_1(x)$的曲线图象分别画在图 11-1 和图 11-3 中，由表达式(9.3.21)，(9.3.22)，(9.3.24)，(9.3.38)可以看出，当 $x\to0$，

$$\begin{cases}\mathrm{J}_0(x)\to1,\mathrm{J}_\nu(x)\to0,\mathrm{J}_{-\nu}(x)\to\infty.\\ \mathrm{N}_\nu(x)\to\pm\infty,\mathrm{N}_m(x)\to-\infty.\qquad(\nu>0)\end{cases}\qquad(9.3.42)$$

因此，如果所研究的区域包含 $x=0$ 在内，往往就要排除 $\mathrm{N}_0(x)$、$\mathrm{N}_m(x)$、$\mathrm{J}_{-\nu}(x)$、$\mathrm{N}_\nu(x)$、而只剩下 $\mathrm{J}_0(x)$、$\mathrm{J}_m(x)$和 $\mathrm{J}_\nu(x)$. 这样，我们说，贝塞尔方程，不管其阶数是整数与否，在 $x=0$ 具有自

然的边界条件.

（四）虚宗量贝塞尔方程

（1）ν 阶虚宗量贝塞尔方程

在柱坐标系对拉普拉斯方程分离变数，曾出现虚宗量贝塞尔方程(9.1.25)，现在我们先来求解一般的 ν 阶虚宗量贝塞尔方程

$$x^2\frac{d^2R}{dx^2}+x\frac{dR}{dx}-(x^2+\nu^2)R=0. \qquad (\nu\neq 整数、半奇数) \tag{9.3.43}$$

作变数变换，令 $\xi=ix$，有 $\frac{dR}{dx}=i\frac{dR}{d\xi}$，方程(9.3.43)变成

$$\xi^2\frac{d^2R}{d\xi^2}+\xi\frac{dR}{d\xi}+(\xi^2-\nu^2)R=0, \tag{9.3.44}$$

这是 ν 阶贝塞尔方程，在点 $\xi_0=ix_0=0$ 邻域上的二线性独立解前面已经解出，分别为

$$J_\nu(\xi)=J_\nu(ix)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\ \Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{ix}{2}\right)^{\nu+2k}$$

$$=i^\nu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k},$$

和

$$J_{-\nu}(\xi)=J_{-\nu}(ix)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(-\nu+k+1)}\left(\frac{ix}{2}\right)^{-\nu+2k}$$

$$=i^{-\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,\Gamma(-\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2k}$$

或

$$N_\nu(\xi)=N_\nu(ix)=\frac{J_\nu(ix)\cos\pi\nu-J_{-\nu}(ix)}{\sin\pi\nu}.$$

以上三式都含虚数单位 i，使用不便. 通常说的虚宗量贝塞尔函数指下列实函数：

$$I_\nu(x)=i^{-\nu}J_\nu(ix)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}, \tag{9.3.45}$$

$$I_{-\nu}(x)=i^{\nu}J_{-\nu}(ix)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,\Gamma(-\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2k},\tag{9.3.46}$$

(9.3.45)、(9.3.46)均为正项级数，除 $x=0$ 外恒不为零. 于是，ν 阶虚宗量贝塞尔方程的一般解为

$$C_1 I_{\nu}(x)+C_2 I_{-\nu}(x)\tag{9.3.47}$$

C_1、C_2 为任意常数.

(2) 整数 m 阶虚宗量贝塞尔方程

$$x^2\frac{d^2R}{dx^2}+x\frac{dR}{dx}-(x^2+m^2)R=0.\ (m=\text{整数})\tag{9.3.48}$$

跟上面一样，作变数变换，令 $\xi=ix$，(9.3.48)变成 m 阶贝塞尔方程

$$\xi^2\frac{d^2R}{d\xi^2}+\xi\frac{dR}{d\xi}+(\xi^2-m^2)R=0.\tag{9.3.49}$$

判定方程的两个根为 $s_1=m, s_2=-m$，两根之差 $s_1-s_2=2m$，为零或正整数. 第一个解为

$$I_m(x)=i^{-m}J_m(ix)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,(m+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k},\tag{9.3.50}$$

称为 m 阶虚宗量贝塞尔函数.

由于 $J_{-m}(ix)=(-1)^m J_m(ix)$，因此，$-m$ 阶虚宗量贝塞尔函数 $I_{-m}(x)=i^m J_{-m}(ix)=i^m(-1)^m J_m(ix)=i^m(-1)^m i^m I_m(x)=I_m(x)$，就是 m 阶虚宗量贝塞尔函数，故第二个线性独立的解必须另外找，它含有对数函数，这将在 § 11.4 中讲述.

$I_m(x)$ 跟 $I_\nu(x)$ 一样，为正项级数，除 $x=0$ 外恒不为零，其曲线图象见图 11-7. 于 $x\to 0$，$I_0(x)\to 1$，$I_m(x)\to 0$.

习　题

1. 在 $x_0=0$ 的邻域上求解 $x^2y''+xy'-m^2y=0$（m^2 是常数）. [这个方程即(8.1.67)]

2. 在 $x_0=0$ 的邻域上求解 $x^2y''+2xy'-l(l+1)y=0$.[这个方程即(9.1.2)]

3. 在 $x_0=0$ 的邻域上求拉盖尔方程 $xy''+(1-x)y'+\lambda y=0$ 的有限解. λ 取什么数值可使级数退化为多项式? 这些多项式乘以适当常数使最高幂项成为 $(-x)^n$ 形式就叫作**拉盖尔多项式**,记作 $L_n(x)$. 写出前几个 $L_n(x)$.

4. 在 $x_0=0$ 的邻域上求 $y''-2\lambda y'+\left[\frac{2Z}{x}-\frac{l(l+1)}{x^2}\right]y=0$ 的有限解. λ 取什么数值可使级数退化为多项式?

5. 在 $x_0=1$ 的邻域上,求勒让德方程 $(1-x^2)y''-2xy'+l(l+1)y=0$ 的有限解.

6. 在 $x_0=0$ 的邻域上求解 $xy''-xy'+y=0$.

7. 在 $x_0=0$ 的邻域上求解 $xy''+y=0$.

8. 在 $x_0=0$ 的邻域上求解高斯方程(超几何级数微分方程)

$$x(x-1)y''+[(1+\alpha+\beta)x-\gamma]y'+\alpha\beta y=0.$$

9. 在 $x_0=0$ 的邻域上求解汇合超几何级数微分方程

$$xy''+(\gamma-x)y'-\alpha y=0.$$

§9.4 施图姆-刘维尔本征值问题

从第八章和本章前三节看到,由数学物理偏微分方程的分离变数法引出的常微分方程,往往附有边界条件,这些边界条件有的是明白提出来的,有的却是没有明白提出来的所谓自然的条件. 满足这些边界条件的非零解往往不存在,除非方程的参数取某些特定值. 这些特定值叫作**本征值**,相应的非零解叫作**本征函数**. 求本征值和本征函数的问题叫作**本征值问题**.

常见的本征值问题都归结为施图姆-刘维尔本征值问题,本节就讨论施图姆-刘维尔本征值问题.

(一) 施图姆-刘维尔本征值问题

形式为

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{dy}{dx}\right]-q(x)y+\lambda\rho(x)y=0 \qquad (a\leqslant x\leqslant b) \tag{9.4.1}$$

的二阶常微分方程叫作**施图姆-刘维尔型方程**.

一般的二阶常微分方程 $y''+a(x)y'+b(x)y+\lambda c(x)y=0$,乘上适当的函数 $e^{\int a(x)dx}$,就化成施图姆-刘维尔型方程

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int a(x)dx}\frac{dy}{dx}\right]+\left[b(x)e^{\int a(x)dx}\right]y+\lambda\left[c(x)e^{\int a(x)dx}\right]y=0.$$

施图姆-刘维尔型方程(9.4.1)附以齐次的第一类、第二类或第三类边界条件,或自然的边界条件,就构成**施图姆-刘维尔本征值问题**.例如

①$a=0,b=l;k(x)=$常数,$q(x)=0,\rho(x)=$常数.本征值问题为

$$\begin{cases}y''+\lambda y=0,\\ y(0)=0,y(l)=0.\end{cases}\tag{9.4.2}$$

本征值和本征函数是读者熟悉的,$\lambda=n^2\pi^2/l^2,y=C\sin(n\pi x/l)$.

②$a=-1,b=+1;k(x)=1-x^2,q(x)=0,\rho(x)=1$.或 $a=0,b=\pi;k(\theta)=\sin\theta,q(\theta)=0,\rho(\theta)=\sin\theta$.这是勒让德方程本征值问题

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dx}\left[(1-x^2)\dfrac{dy}{dx}\right]+\lambda y=0,\\ y(-1)\text{有限},y(+1)\text{有限}.\end{cases}\text{或}\begin{cases}\dfrac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\dfrac{d\Theta}{d\theta}\right)+\lambda\sin\theta\Theta=0,\\ \Theta(0)\text{有限},\Theta(\pi)\text{有限}.\end{cases}\tag{9.4.3}$$

③$a=-1,b=+1;k(x)=1-x^2,q(x)=\dfrac{m^2}{1-x^2},\rho(x)=1$ 或 $a=0,b=\pi;k(\theta)=\sin\theta,q(\theta)=\dfrac{m^2}{\sin\theta},\rho(\theta)=\sin\theta$.这是连带勒让德方程本征值问题

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dx}\left[(1-x^2)\dfrac{dy}{dx}\right]-\dfrac{m^2}{1-x^2}y+\lambda y=0,\\ y(-1)\text{有限},y(+1)\text{有限}.\end{cases}\quad\text{或}\tag{9.4.4}$$

$$\begin{cases}\dfrac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\dfrac{d\Theta}{d\theta}\right)-\dfrac{m^2}{\sin\theta}\Theta+\lambda\sin\theta\Theta=0,\\ \Theta(0)\text{有限},\Theta(\pi)\text{有限}.\end{cases}$$

④$a=0,b=\xi_0,k(\xi)=\xi,q(\xi)=m^2/\xi,\rho(\xi)=\xi$.这是贝塞尔方程本征值问题

$$\begin{cases}\frac{d}{d\xi}\left[\xi\frac{dy}{d\xi}\right]-\frac{m^2}{\xi}y+\lambda\xi y=0,\\ y(0)\text{有限},y(\xi_0)=0.\end{cases}\tag{9.4.5}$$

这里的ξ其实是柱坐标系或平面极坐标系的ρ，为了避免与施图姆-刘维尔型方程中的$\rho(x)$相混淆暂且改用记号ξ. 上面写出的这个方程就是(9.1.19)和(9.1.47)，而$\lambda=\mu$，还要作代换$x=\sqrt{\lambda}\xi$才成为标准形式的贝塞尔方程.

⑤$a=-\infty,b=+\infty;k(x)=e^{-x^2},q(x)=0,\rho(x)=e^{-x^2}$. 这是埃尔米特方程$y''-2xy'+\lambda y=0$的本征值问题

$$\begin{cases}\frac{d}{dx}\left[e^{-x^2}\frac{dy}{dx}\right]+\lambda e^{-x^2}y=0,\\ \text{于 }x\to\pm\infty,y\text{ 的增长不快于 }e^{\frac{1}{2}x^2}.\end{cases}\tag{9.4.6}$$

(这个本征值问题来自量子力学中的谐振子问题，其解见附录十).

⑥$a=0,b=+\infty;k(x)=xe^{-x},q(x)=0,\rho(x)=e^{-x}$. 这是拉盖尔方程$xy''+(1-x)y'+\lambda y=0$的本征值问题

$$\begin{cases}\frac{d}{dx}\left[xe^{-x}\frac{dy}{dx}\right]+\lambda e^{-x}y=0,\\ y(0)\text{有限，于 }x\to\infty,y\text{ 的增长不快于 }e^{x/2}.\end{cases}\tag{9.4.7}$$

(这个本征值问题来自量子力学中的氢原子问题，其解见附录十一.)在以上各例中，$k(x)$，$q(x)$和$\rho(x)$在开区间(a,b)上都取正值.

从以上各例，还可看出：如端点a或b是$k(x)$的一级零点，在那个端点就存在着自然的边界条件. 例如，勒让德方程的$k(x)=1-x^2$，$k(\pm1)=1-(\pm1)^2=0$，在端点$x=\pm1$确实存在自然边界条件(见§9.2). 又如贝塞尔方程的$k(x)=x$，$k(0)=0$，在端点$x=0$确实存在着自然边界条件(见§9.3). 再如拉盖尔方程的$k(x)=xe^{-x}$，$k(0)=0$，在端点$x=0$确实有自然边界条件(见§9.3习题3和附录十一).

自然边界条件的存在是不难证明的. 施图姆-刘维尔型方程即

$k(x)y''+k'(x)y'-q(x)y+\lambda\rho(x)y=0$，亦即

$$y''+\frac{k'(x)}{k(x)}y'+\frac{-q(x)+\lambda\rho(x)}{k(x)}y=0$$

如端点 $x=a$ 是 $k(x)$ 的一级零点，则它也就是 y' 的系数 $k'(x)/k(x)$ 的一阶极点，只要 $x=a$ 是 $[-q(x)+\lambda\rho(x)]$ 不高于一阶的极点（以上各例均满足此条件），则它就是 y 的系数函数 $[-q(x)+\lambda\rho(x)]/k(x)$ 的不高于两阶的极点，从而是方程的正则奇点. 先计算 p_{-1}，

$$p_{-1}=[p(x)(x-a)]|_{x=a}=\left[k'(x)\frac{x-a}{k(x)}\right]\Big|_{x=a}.$$

运用罗毕达法则，

$$p_{-1}=\left[k'(x)\frac{1}{k'(x)}\right]\Big|_{x=a}=1.$$

于是，判定方程 $s(s-1)+sp_{-1}+q_{-2}=0$ 成为

$$s^2+q_{-2}=0,$$

它的两个根是

$$s_1=+\sqrt{-q_{-2}},\quad s_2=-\sqrt{-q_{-2}}.$$

对于物理上有意义的问题，根 s_1 和 s_2 应为实数，所以 s_1 和 s_2 一正一负，或者同为零. 如 s_1 和 s_2 一正一负，对应于负根 s_2 的解含有 $(x-a)$ 的负幂项因而在 $x=a$ 成为无限大. 如 $s_1=s_2=0$，则有一个解含有 $\ln(x-a)$ 项因而在 $x=a$ 成为无限大. 在 $x=a$ 成为无限大的解应该排除，这正是自然边界条件.

（二）施图姆-刘维尔本征值问题的共同性质

以上各例的 $k(x)$、$q(x)$ 和 $\rho(x)$ 都只取非负的值（$\geqslant 0$）. 在这样的条件下，施图姆-刘维尔本征值问题具有如下的共同性质. 我们将只给出性质(2)和性质(3)的证明.

(1) 如 $k(x)$、$k'(x)$、$q(x)$ 连续或者最多以 $x=a$ 和 $x=b$ 为一阶极点，则存在无限多个本征值

$$\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\lambda_3\leqslant\lambda_4\leqslant\cdots,\tag{9.4.8}$$

相应地有无限多个本征函数

$$y_1(x), y_2(x), y_3(x), y_4(x), \cdots. \tag{9.4.9}$$

这些本征函数的排列次序正好使节点个数依次增多(节点个数的性质在量子力学中可用以很方便地判断哪个波函数代表基态).

(2) 所有本征值 $\lambda_n \geqslant 0$.

证 本征函数 $y_n(x)$ 和本征值 λ_n 满足

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[k(x)\frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)y_n=\lambda_n\rho(x)y_n.$$

用 y_n 遍乘各项,并逐项从 a 到 b 积分,得

$$\begin{aligned}\lambda_n\int_a^b\rho y_n^2\mathrm{d}x &= -\int_a^b y_n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[k\frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x}\right]\mathrm{d}x+\int_a^b q y_n^2\mathrm{d}x\\ &= -\left[ky_n\frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x}\right]_a^b+\int_a^b k\left(\frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x+\int_a^b q y_n^2\mathrm{d}x\\ &= (ky_ny_n')_{x=a}-(ky_ny_n')_{x=b}+\int_a^b ky_n'^2\mathrm{d}x\\ &\quad+\int_a^b qy_n^2\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{9.4.10}$$

右边两个积分的被积函数只取 $\geqslant 0$ 的值,所以这两个积分 $\geqslant 0$. 再看(9.4.10)右边第一项 $(ky_ny_n')_{x=a}$. 如果在端点 $x=a$ 的边界条件是第一类齐次条件 $y_n(a)=0$,或第二类齐次条件 $y_n'(a)=0$,或自然边界条件 $k(a)=0$,这一项 $(ky_ny_n')_{x=a}$ 显然为零. 如果在端点 $x=a$ 的边界条件是第三类齐次条件 $(y_n-hy_n')_{x=a}=0$,则

$$(ky_ny_n')_{x=a}=[k(y_n-hy_n')y_n'+hky_n'^2]_{x=a}=h(ky_n'^2)_{x=a}\geqslant 0.$$

再看(9.4.10)右边第二项 $-(ky_ny_n')_{x=b}$. 如果在端点 $x=b$ 的边界条件是第一类齐次条件 $y_n(b)=0$,或第二类齐次条件 $y_n'(b)=0$,或自然边界条件 $k(b)=0$,这一项 $(ky_ny_n')_{x=b}$ 显然为零. 如果在端点 $x=b$ 的边界条件是第三类齐次条件 $(y_n+hy_n')_{x=b}=0$,则

$$-(ky_ny_n')_{x=b}=-[k(y_n+hy_n')y_n'-hky_n'^2]_{x=b}=h(ky_n'^2)_{x=b}\geqslant 0.$$

既然(9.4.10)右边各项都 $\geqslant 0$,左边必然也 $\geqslant 0$,即

$$\lambda_n\int_a^b\rho y_n^2\mathrm{d}x\geqslant 0.$$

上式里的定积分明显是正的，因而

$$\lambda_n \geqslant 0. \tag{9.4.11}$$

(3) 相应于不同本征值 λ_m 和 λ_n 的本征函数 $y_m(x)$和 $y_n(x)$在区间$[a,b]$上**带权重** $\rho(x)$**正交**，即

$$\int_a^b y_m(x)y_n(x)\rho(x)\mathrm{d}x = 0. \tag{9.4.12}$$

证 本征函数 y_m 和 y_n 分别满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[ky_m{}'] - qy_m + \lambda_m \rho y_m = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[ky_n{}'] - qy_n + \lambda_n \rho y_n = 0.$$

前一式遍乘以 y_n，后一式遍乘以 y_m，然后相减，

$$y_n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[ky_m{}'] - y_m \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[ky_n{}'] + (\lambda_m - \lambda_n)\rho y_m y_n = 0.$$

逐项从 a 到 b 积分，得

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b \left[y_n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(ky_m{}') - y_m \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(ky_n{}')\right]\mathrm{d}x + (\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b \rho y_m y_n \mathrm{d}x \\ &= \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[ky_n y_m{}' - ky_m y_n{}']\mathrm{d}x + (\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b \rho y_m y_n \mathrm{d}x \\ &= (ky_n y_m{}' - ky_m y_n{}')_{x=b} - (ky_n y_m{}' - ky_m y_n{}')_{x=a} \\ &\quad + (\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b \rho y_m y_n \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{9.4.13}$$

现在看右边第一项$(ky_n y_m{}' - ky_m y_n{}')_{x=b}$. 如果在端点 $x=b$ 的边界条件是第一类齐次条件 $y_m(b)=0$ 和 $y_n(b)=0$，或第二类齐次条件 $y_m{}'(b)=0$ 和 $y_n{}'(b)=0$，或自然边界条件 $k(b)=0$，这一项$(ky_n y_m{}' - ky_m y_n{}')_{x=b}$显然为零. 如果在端点 $x=b$ 的边界条件是第三类齐次条件$(y_m + hy_m{}')_{x=b}=0$ 和$(y_n + hy_n{}')_{x=b}=0$，则

$$\begin{aligned} [ky_n y_m{}' - ky_m y_n{}']_{x=b} = \frac{1}{h}[&ky_n(y_m + hy_m{}') \\ &- ky_m(y_n + hy_n{}')]_{x=b} = 0. \end{aligned}$$

总之，(9.4.13)右边第一项为零. 同理，如果在端点 $x=a$ 的

边界条件是第一类、第二类或第三类齐次条件，或者自然边界条件，则(9.4.13)右边第二项为零. 这样，(9.4.13)成为

$$(\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b \rho y_m y_n \mathrm{d}x = 0.$$

既然 $\lambda_m - \lambda_n \neq 0$，上式即(9.4.12).

如权重 $\rho(x) \equiv 1$，(9.4.12)简单地称为**正交**.

(4) 本征函数族 $y_1(x), y_2(x), y_3(x), \cdots$ 是**完备的**. 这是说，函数 $f(x)$ 如具有连续一阶导数和分段连续二阶导数，且满足本征函数族所满足的边界条件，就可以展开为绝对且一致收敛的级数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n y_n(x). \tag{9.4.14}$$

这个性质的证明超出本书范围.

(三) 广义傅里叶级数

(9.4.14)右边的级数叫作**广义傅里叶级数**，系数 $f_n (n=1,2,\cdots)$ 叫作 $f(x)$ 的**广义傅里叶系数**. 函数族 $y_n(x) (n=1,2,\cdots)$ 叫作这级数展开的**基**.

现在推导广义傅里叶系数的计算公式.

由于广义傅里叶级数(9.4.14)是绝对且一致收敛的，可以逐项积分. 用 $y_m(x)\rho(x)$ 遍乘(9.4.14)各项，并逐项积分，

$$\int_a^b f(\xi) y_m(\xi) \rho(\xi) \mathrm{d}\xi = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \int_a^b y_n(\xi) y_m(\xi) \rho(\xi) \mathrm{d}\xi.$$

由于正交关系(9.4.12)，上式右边除 $n=m$ 的一项之外全为零，

$$\int_a^b f(\xi) y_m(\xi) \rho(\xi) \mathrm{d}\xi = f_m \int_a^b [y_m(\xi)]^2 \rho(\xi) \mathrm{d}\xi.$$

记

$$N_m^2 = \int_a^b [y_m(\xi)]^2 \rho(\xi) \mathrm{d}\xi, \tag{9.4.15}$$

把积分(9.4.15)的平方根 N_m 叫作 $y_m(x)$ 的**模**. 于是

$$f_m = \frac{1}{N_m^2}\int_a^b f(\xi) y_m(\xi) \rho(\xi) \mathrm{d}\xi. \tag{9.4.16}$$

这就是广义傅里叶系数的计算公式. 它在数学物理方程的分离变数法中是很重要的.

如果本征函数的模 $N_m=1(m=1,2,\cdots)$，就叫作归一化的本征函数. 对于正交归一化的本征函数族，(9.4.16)简化为

$$f_m = \int_a^b f(\xi) y_m(\xi) \rho(\xi) \mathrm{d}\xi. \qquad (9.4.17)$$

其实，对于非归一化的本征函数 $y_n(x)$，只要改用 $y_n(x)/N_n$ 作为新的本征函数，就是归一化的了.

常把(9.4.12)和(9.4.15)合并成一个式子

$$\int_a^b y_m(x) y_n(x) \rho(x) \mathrm{d}x = N_m^2 \delta_{mn} \qquad (9.4.18)$$

其中

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & (n=m) \\ 0, & (n \neq m) \end{cases} \qquad (9.4.19)$$

是克罗内克符号. 对于正交归一化的本征函数族，(9.4.18)简化为

$$\int_a^b y_m(x) y_n(x) \rho(x) \mathrm{d}x = \delta_{mn}. \qquad (9.4.20)$$

为了应用公式(9.4.16)或(9.4.17)，必须先判定本征函数族是(带权重)正交的，还必须能计算本征函数的模. 在第十、第十一两章中研究球函数和柱函数时，将很重视正交关系和模的计算这两个问题.

前面提到施图姆-刘维尔本征函数族是完备的. 这里介绍完备性方程.

跟§5-1 三角函数族的完备性方程(5.1.6)相类似，对本征函数族 $y_1(x), y_2(x), \cdots$，也有完备性方程. 这里 $f(x)$的近似表达式

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n y_n(x) \qquad (9.4.21)$$

平均平方误差

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon^2(x)} &= \frac{1}{b-a}\int_a^b \varepsilon^2(x)\rho(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x) - f_N(x)]^2 \rho(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{b-a}\left[\int_a^b f^2(x)\rho(x)\mathrm{d}x - \sum_{n=1}^{N} f_n^2 \int_a^b y_n^2(x)\rho(x)\mathrm{d}x\right] \end{aligned} \qquad (9.4.22)$$

当 $N\to\infty$ 时，相应的完备性方程为

$$\int_a^b f^2(x)\rho(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 \int_a^b y_n^2(x)\rho(x)\mathrm{d}x. \tag{9.4.23}$$

(9.4.23)对于任意的分段连续且平方可积的函数 $f(x)$ 成立. 满足完备性方程的本征函数族称为完备的函数族.

对于完备的本征函数族 $y_1(x), y_2(x), \cdots$，完备性方程(9.4.23)成立. 从而，当 $N\to\infty$ 时，$\overline{\varepsilon^2(x)}\to 0$，即 $f_N(x)\to f(x)$，则 $f_N(x)$ 平均收敛于分段连续函数 $f(x)$. 平均收敛还不是普通意义下的收敛. 如果 $f(x)$ 进一步满足性质(4)中的条件，以本征函数族 $y_1(x), y_2(x), \cdots$ 为基，把 $f(x)$ 展开，所得的级数(9.4.14)绝对且一致收敛.

（四）复数的本征函数族

以上的讨论假定了本征函数是实变数的实值函数. 但本征函数也可以是实变数的复值函数，例如本征值问题

$$\begin{cases} \Phi'' + \lambda\Phi = 0, \\ \text{自然周期条件} \end{cases}$$

的本征函数族通常说是实函数族

$$1, \cos\varphi, \cos 2\varphi, \cos 3\varphi, \cdots, \sin\varphi, \sin 2\varphi, \sin 3\varphi, \cdots \tag{9.4.24}$$

但这完全可以代之以复函数族

$$\cdots, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\varphi}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\varphi}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}, 1, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\varphi}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}3\varphi}, \cdots. \tag{9.4.25}$$

对于复数的本征函数族，为了保证模是实数，通常把模的定义修订为

$$N_m^2 = \int_a^b y_m(x)[y_m(x)]^* \rho(x)\mathrm{d}x, \tag{9.4.26}$$

其中 $[y_m(x)]^*$ 为 $y_m(x)$ 的复数共轭. 正交关系也相应地修订为

$$\int_a^b y_m(x)[y_n(x)]^* \rho(x)\mathrm{d}x = 0. \tag{9.4.27}$$

(9.4.26)和(9.4.27)合起来写，成为

$$\int_a^b y_m(x)[y_n(x)]^* \rho(x)\mathrm{d}x = N_m^2 \delta_{mn}. \tag{9.4.28}$$

广义傅里叶系数的公式(9.4.23)则修订为

$$f_m=\frac{1}{N_m^2}\int_a^b f(\xi)[y_m(\xi)]^*\rho(\xi)\mathrm{d}\xi. \qquad (9.4.29)$$

*（五）希尔伯特空间

为了帮助理解，这里拿矢量来作类比. 设想有某种无限维的所谓**希尔伯特空间**，函数 $f(x)$ 好比希尔伯特空间中的“矢量”$\boldsymbol{f}$. 基本函数族(9.4.9)好比沿着各个坐标轴的“矢量”$\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_2,\boldsymbol{i}_3,\cdots$，它们构成希尔伯特空间中的“基底矢量”，或简称“基”. 两个函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的乘积在定义域 $[a,b]$ 上带权重的积分 $\int_a^b f_1(x)f_2(x)\rho(x)\mathrm{d}x$ 好比两个矢量的“标积”$\boldsymbol{f}_1\cdot\boldsymbol{f}_2$. 基本函数带权重的正交关系(9.4.12)好比是说希尔伯特空间中的任意两个“基底矢量”的“标积”为零，就是说“互相垂直”. 把函数 $f(x)$ 展开为广义傅里叶级数，好比是把“矢量”表为“基底矢量”的线性组合，

$$\boldsymbol{f}=c_1\boldsymbol{i}_1+c_2\boldsymbol{i}_2+c_3\boldsymbol{i}_3+\cdots,$$

广义傅里叶系数好比是这个线性组合中的系数，即“矢量”$f(x)$ 的“分量”，或“矢量”$f(x)$ 在希尔伯特空间“基底矢量”$y_n(x)$ 上的“投影”. 广义傅里叶系数的计算公式(9.4.15)和(9.4.16)好比是矢量的“分量”计算公式

$$C_n=\frac{\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{i}_n}{\boldsymbol{i}_n\cdot\boldsymbol{i}_n}. \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

“基底矢量”(9.4.9)即 $\boldsymbol{i}_n(n=1,2,3,\cdots)$ 并不一定是“单位矢量”(它们的“长度”即模不一定等于一)，因而“分量”计算公式中出现分母 $\boldsymbol{i}_n\cdot\boldsymbol{i}_n$. 要是用正交归一化的基本函数族 $\{y_n(x)/N_n\}$，由于它们的模为一，就是说，采用“单位矢量”作为“基”，那么，“分量”的计算公式就无需分母 $\boldsymbol{i}_n\cdot\boldsymbol{i}_n$ 了. 这时广义傅里叶系数的计算公式为(9.4.17).

照这样类比下去，贝塞尔不等式好比是说，如果“基底矢量”的个数低于空间的维数，即基底矢量组是不完备的(例如说，在三维空间中只取了两个基底矢量)，则“矢量”的“长度”的平方大于各个“分量”的“大小”的平方和. 完备性方程则好比是说，如果“基底矢量”的个数等于空间的维数，即基底矢量组

是完备的，则“矢量”的“长度”的平方等于“分量”的“大小”的平方和，或者说，希尔伯特空间中“矢量”的“长度”的平方和等于该“矢量”在该空间无限多个“基底矢量”上的投影的平方和.

如果基本函数族$\{y_n(x)\}(n=1,2,3,\cdots)$是含虚数单位$i$的复值函数，其正交关系和模的平方及广义傅里叶系数计算公式(9.4.26)～(9.4.29)跟上面一样，同样可用矢量来作类比.

§9.1 并没有把球坐标系和柱坐标系中的分离变数法进行到底. 现在勒让德方程和贝塞尔方程已经解出，下面两章将继续研究球坐标系和柱坐标系中的分离变数法.

限于篇幅，在特殊函数之中，本书只讨论球函数和柱函数. 附录十和十一简略介绍埃尔米特多项式和拉盖尔多项式.

习　题

1. 把下列二阶线性常微分方程化成施图姆-刘维尔型方程的形式

①**高斯方程**（**超几何级数微分方程**）$x(x-1)y''+[(1+\alpha+\beta)x-\gamma]y'+\alpha\beta y=0$；

②**汇合超几何级数微分方程** $xy''+(\gamma-x)y'-\alpha y=0$；

2. 长为l的柔软均质重绳，上端固定在以匀速ω转动的竖直轴上，由于重力作用，绳的平衡位置应是竖直线. 此绳相对于竖直线的横振动方程为u_{tt}
$g\frac{\partial}{\partial x}[(l-x)\frac{\partial u}{\partial x}]-\omega^2 u=0$（取$x$轴向下，原点在固定端）. 试写出该绳的边界条件.

3. 求解下列本征值问题，证明各题中不同的本征函数互相正交，并求出模的平方.

① $\begin{cases}X''+\lambda X=0\\X(a)=0,X(b)=0;\end{cases}$　　② $\begin{cases}X''+\lambda X=0,\\X'(0)=0,X(l)+hX'(l)=0.\end{cases}$

*4. 定解问题

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=0, & (a^2=Y/\rho)\\u|_{x=0}=0, & (YSu_x+mu_{tt})|_{x=l}=0,\\u|_{t=0}=-\dfrac{mg}{YS}x, & u_t|_{t=0}=0.\end{cases}$$

用分离变数法求解过程中，出现本征值问题

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = 0, X'(l) - \dfrac{\lambda m}{\rho s} X(l) = 0. \end{cases}$$

本征函数 $X(x) = C\sin\sqrt{\lambda}\, x$，本征值 λ 是超越方程 $\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\, l - \dfrac{\lambda m}{\rho s}\sin\sqrt{\lambda}\, l = 0$的根.

不难验证：对于 $\lambda_m \neq \lambda_n$，$\int_0^l \sin\sqrt{\lambda_m}\, x \quad \sin\sqrt{\lambda_n}\, x \mathrm{d}x \neq 0$.

为什么对应于不同本征值的本征函数不正交？

第十章 球 函 数

§9.1 用球坐标系，对拉普拉斯方程和亥姆霍兹方程进行分离变数，得到球函数方程(9.1.3)；§9.1 又对亥姆霍兹方程进行分离变数，也得到球函数方程(9.1.37). 具体写出，球函数方程即

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+l(l+1)Y=0.$$

球函数方程的解 $Y(\theta,\varphi)$ 称为**球函数**.

在§9.1 中，还继续对球函数方程进行分离变数，得到分离变数形式的球函数

$$Y(\theta,\varphi)=(A\cos m\varphi+B\sin m\varphi)\Theta(\theta),$$

其中 $\Theta(\theta)$ 需从连带勒让德方程

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2}-2x\frac{d\Theta}{dx}+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]\Theta=0$$

解出，式中的 x 是

$$x=\cos\theta.$$

本章§10.1 研究 $m=0$ 的特例，后两节则研究一般的球函数.

§10.1 轴对称球函数

本节研究 $m=0$ 的特例. 在这种情况下，满足周期条件的解是 $\Phi(\varphi)=$常数，与 φ 无关，从而球函数以球坐标的极轴为对称轴. 而 $\Theta(\theta)$ 遵从的连带勒让德方程则简化为勒让德方程

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2}-2x\frac{d\Theta}{dx}+l(l+1)\Theta=0. \qquad (10.1.1)$$

（一）勒让德多项式

（1）勒让德多项式的表达式

勒让德方程(10.1.1)已在§9.2解出．作为二阶常微分方程，它有两个线性独立解(9.2.7)和(9.2.8)，通解是这两个线性独立解的线性组合(9.2.6)．

但是，勒让德方程在 $x=\pm1$（即 $\theta=0,\pi$，亦即球坐标系的极轴方向及其反方向）往往有自然边界条件"解在 $x=\pm1$ 保持有限"，从而构成本征值问题．本征值如(9.2.12)所示为 $l(l+1)$，$(l=0,1,2,\cdots)$．本征函数为由(9.2.7)和(9.2.8)之一退化得到的多项式，将它们分别乘以适当的常数，称为 l 阶勒让德多项式，记作 $P_l(x)$．由于 $m=0$ 时，$\Phi(\varphi)=$常数，它是轴对称的．轴对称球函数 $Y(\theta,\varphi)$简化为 $P_l(x)$．

现在具体写出勒让德多项式．通常约定，用适当的常数乘本征函数，使最高次幂项 x^l 的系数

$$a_l=\frac{(2l)!}{2^l(l!)^2}. \tag{10.1.2}$$

反用系数递推公式(9.2.5)，把它改写成

$$a_k=\frac{(k+2)(k+1)}{(k-l)(k+l+1)}a_{k+2}$$

就可把其它系数一一推算出来．例如

$$\begin{aligned}
a_{l-2}&=\frac{l(l-1)}{(-2)(2l-1)}a_l=-\frac{l(l-1)(2l)!}{2(2l-1)2^l l!\ l!}\\
&=-\frac{1}{2(2l-1)}\frac{(2l)!}{2^l l\cdot(l-1)!\ (l-2)!}\\
&=(-1)^1\frac{(2l-2)!}{2^l(l-1)!\ (l-2)!},\\
a_{l-4}&=\frac{(l-2)(l-3)}{(-4)(2l-3)}a_{l-2}\\
&=(-1)^2\frac{(l-2)(l-3)}{2\cdot2!\ (2l-3)}\frac{(2l-2)}{2^l(l-1)!\ (l-2)!}\\
&=(-1)^2\frac{1}{2\cdot2!\ (2l-3)}\frac{(2l-2)!}{2^l(l-1)(l-2)!\ (l-4)!}
\end{aligned}$$

$$=(-1)^2\frac{(2l-4)!}{2!\ 2^l(l-2)!\ (l-4)!},$$

$$a_{l-6}=\frac{(l-4)(l-5)}{(-6)(2l-5)}a_{l-4}$$

$$=(-1)^3\frac{(l-4)(l-5)}{2\cdot 3(2l-5)}\frac{(2l-4)!}{2!\ l^l(l-2)!\ (l-4)!}$$

$$=(-1)^3\frac{1}{2\cdot 3!\ (2l-5)}\frac{(2l-4)!}{2^l(l-2)(l-3)!\ (l-6)!}$$

$$=(-1)^3\frac{(2l-6)!}{3!\ 2^l(l-3)!\ (l-6)!},$$

……………………………………

$$a_{l-2n}=(-1)^n\frac{(2l-2n)!}{n!\ 2^l(l-n)!\ (l-2n)!}. \tag{10.1.3}$$

将指标 n 仍记为 k，求得 l 阶勒让德多项式的具体表达式为

$$\mathrm{P}_l(x)=\sum_{k=0}^{[l/2]}(-1)^k\frac{(2l-2k)!}{2^lk!\ (l-k)!\ (l-2k)!}x^{l-2k}, \tag{10.1.4}$$

记号$[l/2]$表示不超过 $l/2$ 的最大整数，即

$$[l/2]=\begin{cases}l/2, & (l\text{ 为偶数})\\ (l-1)/2. & (l\text{ 为奇数})\end{cases}$$

前几个勒让德多项式是

$$\mathrm{P}_0(x)=1$$

$$\mathrm{P}_1(x)=x=\cos\theta$$

$$\mathrm{P}_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)=\frac{1}{4}(3\cos 2\theta+1)$$

$$\mathrm{P}_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)=\frac{1}{8}(5\cos 3\theta+3\cos\theta)$$

$$\mathrm{P}_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)=\frac{1}{64}(35\cos 4\theta+20\cos 2\theta+9)$$

$$\mathrm{P}_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$$

$$=\frac{1}{128}(63\cos 5\theta+35\cos 3\theta+30\cos\theta)$$

$$\mathrm{P}_6(x)=\frac{1}{16}(231x^5-315x^4+105x^2-5)$$

$$=\frac{1}{512}(231\cos 6\theta+126\cos 4\theta+105\cos 2\theta+50)$$

勒让德多项式的图象见图 10-1.

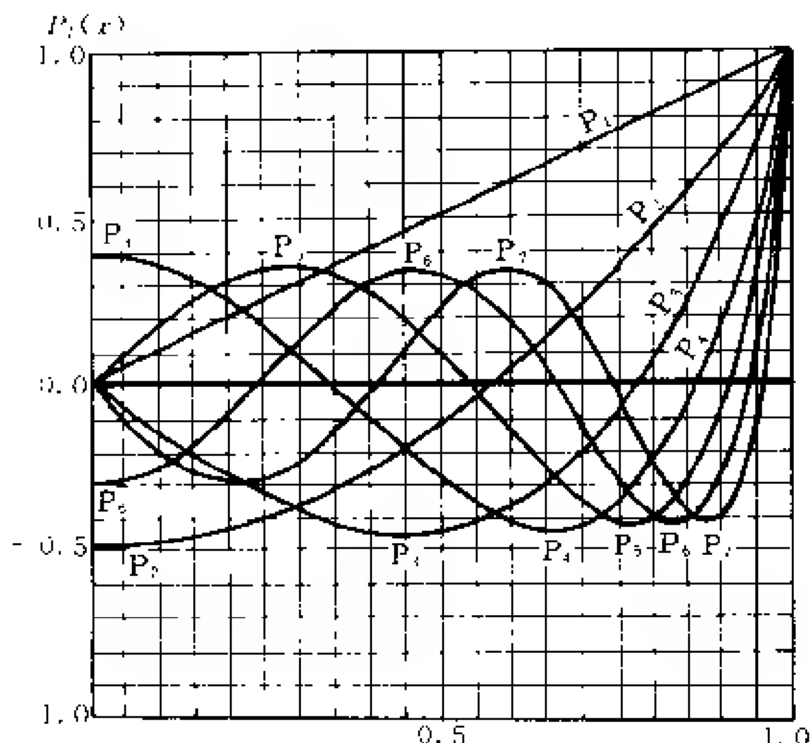


图 10-1

现在计算 $P_l(0)$,这应当等于多项式 $P_l(x)$的常数项. 如 $l=$奇数 $2n+1$,则 $P_{2n+1}(x)$只含奇次幂项,不含常数项,所以

$$P_{2n+1}(0)=0. \tag{10.1.5}$$

如 $l=$偶数 $2n$,则 $P_{2n}(x)$含有常数项,即(10.1.4)中 $k=l/2=n$ 的那一项,所以

$$P_{2n}(0)=(-1)^n\frac{(2n)!}{2^n n!\ 2^n n!}=(-1)^n\frac{(2n)!}{[(2n)!!]^2}$$
$$=(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \tag{10.1.6}$$

式中记号$(2n)!!=(2n)(2n-2)(2n-4)\cdots 6.4.2$,而$(2n-1)!!=(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 5.3.1$. 因此,$(2n)!=(2n)!!\cdot(2n-1)!!$.

(2) 勒让德多项式的微分表示

勒让德多项式有**微分表示**

$$\mathrm{P}_l(x)=\frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l. \tag{10.1.7}$$

这叫作**罗德里格斯公式**.

证 用二项式定理把$(x^2-1)^l$展开,

$$\frac{1}{2^l l!}(x^2-1)^l=\frac{1}{2^l l!}\sum_{k=0}^{l}\frac{l!}{(l-k)!\ k!}(x^2)^{l-k}(-1)^k$$

$$=\sum_{k=0}^{l}(-1)^k\frac{1}{2^l k!\ (l-k)!}x^{2l-2k}.$$

把上式求导l次.凡是幂次$2l-2k$低于l的项在l次求导过程中成为零,所以只需保留幂次$2l-2k\geqslant l$的项,即$k\leqslant l/2$的项.这样,

$$\frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l$$

$$=\sum_{k=0}^{[l/2]}(-1)^k\frac{(2l-2k)(2l-2k-1)\cdots(l-2k+1)}{2^l k!\ (l-k)!}x^{l-2k}$$

$$=\sum_{k=0}^{[l/2]}(-1)^k\frac{(2l-2k)!}{2^l k!\ (l-k)!\ (l-2k)!}x^{l-2k}=P_l(x).$$

(3) 勒让德多项式的积分表示

按照科希公式(2.4.3),微分表示(10.1.7)可表为路积分

$$\mathrm{P}_l(x)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{1}{2^l}\oint_C\frac{(z^2-1)^l}{(z-x)^{l+1}}\mathrm{d}z, \tag{10.1.8}$$

C为z平面上围绕$z=x$点的任一闭合回路.这叫作**施列夫利积分**.

(10.1.8)还可以进一步表为定积分.为此,取C为圆周,圆心在$z=x$,半径为$\sqrt{|x^2-1|}$.在C上,$z-x=\sqrt{x^2-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$,$\mathrm{d}z=\mathrm{i}\sqrt{x^2-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}\mathrm{d}\psi$,(10.1.8)成为

$$\mathrm{P}_l(x)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{1}{2^l}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{[(x+\sqrt{x^2-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi})^2-1]^l}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^{l+1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi})^{l+1}}$$

$$\cdot\left[\mathrm{i}\sqrt{x^2-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}\right]\mathrm{d}\psi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{x^2+2x\sqrt{x^2-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}+(x^2-1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\psi}-1}{2\sqrt{x^2-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}}\right]^l\mathrm{d}\psi$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left[x + \sqrt{x^2-1}\,\frac{1}{2}(e^{-i\psi}+e^{i\psi})\right]^l d\psi.$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left[x + i\sqrt{1-x^2}\cos\psi\right]^l d\psi \qquad (10.1.9)$$

这叫作**拉普拉斯积分**. 如从 x 回到原来的变数 $\theta, x=\cos\theta$, 则

$$P_l(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\cos\theta + i\sin\theta\cos\psi]^l d\psi.$$

从(10.1.9)很容易看出

$$P_l(1)=1, P_l(-1)=(-1)^l. \qquad (10.1.10)$$

$$|P_l(x)| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^\pi |\cos\theta + i\sin\theta\cos\psi|^l d\psi$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\cos^2\theta + \sin^2\theta\cos^2\psi]^{l/2} d\psi$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\cos^2\theta + \sin^2\theta]^{l/2} d\psi$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\psi = 1.$$

因此,

$$|P_l(x)| \leqslant 1, \quad (-1\leqslant x\leqslant 1) \qquad (10.1.11)$$

(二) 第二类勒让德函数

当 l 是零或正整数时,勒让德方程的一个解为勒让德多项式 $P_l(x)$. 至于另一个线性独立解,于 l=偶数时,为 $y_1(x)$ 即无穷级数(9.2.8);于 l=奇数时,则是 $y_0(x)$ 即无穷级数(9.2.7). 但是习惯上,常常利用朗斯基行列式导出的第二个线性独立解的求解公式(9.3.17)和(9.3.16),从第一个解 $P_l(x)$ 得出具有统一形式的第二个线性独立的解

$$Q_l(x) = P_l(x)\int \frac{e^{\int\frac{2x}{1-x^2}dx}}{[P_l(x)]^2}dx = P_l(x)\int \frac{1}{(1-x^2)[P_l(x)]^2}dx \qquad (10.1.12)$$

称为**第二类勒让德函数**. 从(10.1.12)可得

$$Q_0(x) = \int\frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)dx = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},$$

$$Q_1(x) = x\int\frac{dx}{(1-x^2)x^2} = x\int\left(\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$= x\left[\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{x}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{P}_1(x)\ln\frac{1+x}{1-x} \qquad 1.$$

适当地选取系数，并把 $Q_l(x)$ 的积分形式改换成求和形式可得下面的公式（证明从略），

$$Q_l(x)=\frac{1}{2}\mathrm{P}_l(x)\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2^l}\sum_{k=0}^{\left[\frac{l-1}{2}\right]}x^{l-1-2k}$$

$$\cdot\sum_{n=0}^{k}\frac{(-1)^{n+1}}{2k-2n+1}\cdot\frac{(2l-2n)!}{n!\ (l-n)!\ (l-2n)!}\quad(-1<x<1)(l\geqslant 1).$$

(10.1.13)

式中第一部分含对数函数，第二部分为最高次幂为 $l-1$ 次的偶次幂（$l=$ 奇数）或奇次幂（$l=$ 偶数）多项式，适当选取系数使最高次幂项的系数为 $-(2l)!\ /2^l(l!)^2$.

利用表达式（10.1.13），可以方便地写出 $l\geqslant 2$ 的 $Q_l(x)$ 的具体形式：

$$Q_2(x)=\frac{1}{2}\mathrm{P}_2(x)\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{3}{2}x,$$

$$Q_3(x)=\frac{1}{2}\mathrm{P}_3(x)\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{5}{2}x^2+\frac{2}{3},$$

$$Q_4(x)=\frac{1}{2}\mathrm{P}_4(x)\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{35}{8}x^3+\frac{55}{24}x,$$

………………………

勒让德方程的一般解为

$$y(x)=C_1\mathrm{P}_l(x)+C_2Q_l(x) \qquad (10.1.14)$$

C_1，C_2 为任意常数. 由于所有的 $Q_l(x)$ 都含有对数函数，均在 $x=\pm 1$ 处发散，如果要选取在区间端点 $x=\pm 1$ 处满足自然边界条件的解，就不能要 $Q_l(x)$，必须取常数 $C_2=0$，解 $y(x)=C_1\mathrm{P}_l(x)$.

（三）勒让德多项式的正交关系

作为施图姆-刘维尔本征值问题的正交关系（9.4.12）的特例，不同阶的勒让德多项式在区间（-1，$+1$）上**正交**，

$$\int_{-1}^{+1}\mathrm{P}_k(x)\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x=0\quad(k\neq l). \qquad (10.1.15)$$

如果从 x 回到原来的变数 θ，则（10.1.15）应是

$$\int_0^\pi \mathrm{P}_k(\cos\theta)\mathrm{P}_l(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta = 0 \quad (k \neq l). \quad (10.1.16)$$

（四）勒让德多项式的模

现在计算勒让德多项式 $\mathrm{P}_l(x)$的模 N_l，

$$N_l^2 = \int_{-1}^{+1}[\mathrm{P}_l(x)]^2\mathrm{d}x.$$

把上式的 $P_l(x)$用微分表示(10.1.7)表出，以便于分部积分，

$$\begin{aligned}N_l^2 &= \frac{1}{2^{2l}(l!)^2}\int_{-1}^{+1}\frac{\mathrm{d}^l(x^2-1)^l}{\mathrm{d}x^l}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}^{l-1}(x^2-1)^l}{\mathrm{d}x^{l-1}}\right]\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2^{2l}(l!)^2}\left[\frac{\mathrm{d}^l(x^2-1)^l}{\mathrm{d}x^l}\frac{\mathrm{d}^{l-1}(x^2-1)^l}{\mathrm{d}x^{l-1}}\right]_{-1}^{+1} \\ &\quad - \frac{1}{2^{2l}(l!)^2}\int_{-1}^{+1}\frac{\mathrm{d}^{l-1}(x^2-1)^l}{\mathrm{d}x^{l-1}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}^l(x^2-1)^l}{\mathrm{d}x^l}\right]\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

这里$(x^2-1)^l=(x-1)^l(x+1)^l$ 以 $x=\pm1$ 为 l 级零点，所以它的 $l-1$阶导数$\dfrac{\mathrm{d}^{l-1}(x^2-1)^l}{\mathrm{d}x^{l-1}}$以 $x=\pm1$ 为一级零点，从而上式已积出部分为零，

$$N_l^2 = \frac{(-1)^1}{2^{2l}(l!)^2}\int_{-1}^{+1}\frac{\mathrm{d}^{l-1}(x^2-1)^l}{\mathrm{d}x^l}\frac{\mathrm{d}^{l+1}(x^2-1)^l}{\mathrm{d}x^{l+1}}\mathrm{d}x.$$

一次又一次地分部积分计 l 次，即得

$$N_l^2 = \frac{(-1)^l}{2^{2l}(l!)^2}\int_{-1}^{+1}(x^2-1)^l\frac{\mathrm{d}^{2l}(x^2-1)^l}{\mathrm{d}x^{2l}}\mathrm{d}x.$$

这里$(x^2-1)^l$ 是 $2l$ 次多项式，它的 $2l$ 阶导数也就是最高幂项 x^{2l} 的 $2l$ 阶导数即$(2l)!$. 于是，

$$N_l^2 = (-1)^l\frac{(2l)!}{2^{2l}(l!)^2}\int_{-1}^{+1}(x-1)^l(x+1)^l\mathrm{d}x.$$

分部积分一次

$$\begin{aligned}N_l^2 &= (-1)^l\frac{(2l)!}{2^{2l}(l!)^2}\cdot\frac{1}{l+1}\Big[(x-1)^l(x+1)^{l+1}\Big|_{-1}^{1} \\ &\quad - l\int_{-1}^{1}(x-1)^{l-1}(x+1)^{l+1}\mathrm{d}x\Big] \\ &= (-1)^l\frac{(2l)!}{2^{2l}(l!)^2}\cdot(-1)\frac{l}{l+1}\int_{-1}^{1}(x-1)^{l-1}(x+1)^{l+1}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

已积出部分以 $x=\pm1$ 为零点，从而为零. 至此，分部积分的结果是使$(x-1)$的幂次降低一次，$(x+1)$的幂次升高一次，且积分乘上一个相应的常数因子. 继续分部积分，计 l 次，即得

$$N_l^2=(-1)^l\frac{(2l)!}{2^{2l}(l!)^2}\cdot(-1)^l\cdot\frac{l}{l+1}\cdot\frac{l-1}{l+2}\cdots$$
$$\cdot\frac{1}{2l}\int_{-1}^{1}(x-1)^0(x+1)^{2l}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2^{2l}}\cdot\frac{1}{2l+1}(x+1)^{2l+1}\Big|_{-1}^{1}=\frac{2}{2l+1}.$$

这样，勒让德多项式的模

$$N_l=\sqrt{\frac{2}{2l+1}}.\ (l=0,1,2,\cdots)\tag{10.1.17}$$

（五）广义傅里叶级数

根据 § 9.4 施图姆-刘维尔本征值问题的性质(4)，作为一个例子，勒让德多项式 $\mathrm{P}_l(x)(l=0,1,2,\cdots)$是完备的，可作为广义傅里叶级数展开的基，把定义在 x 的区间$[-1,1]$上的函数 $f(x)$，或定义在 θ 的区间$[0,\pi]$上的函数 $f(\theta)$展开为**广义傅里叶级数**.

$$\begin{cases}f(x)=\sum\limits_{l=0}^{\infty}f_l\mathrm{P}_l(x),\\ \text{系数 } f_l=\dfrac{2l+1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{+1}f(x)\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x,\end{cases}\tag{10.1.18}$$

即

$$\begin{cases}f(\theta)=\sum\limits_{l=0}^{\infty}f_l\mathrm{P}_l(\cos\theta),\\ \text{系数 } f_l=\dfrac{2l+1}{2}\displaystyle\int_{0}^{\pi}f(\theta)\mathrm{P}_l(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta.\end{cases}\tag{10.1.19}$$

注意(10.1.19)的积分应带权重 $\sin\theta$，参看 § 9.4(一)之②.

例 1 以勒让德多项式为基，在$[-1,1]$上把 $f(x)=2x^3+3x+4$ 展开为广义傅里叶级数.

解 本例不必应用一般公式(10.1.18)，事实上，$f(x)$是三次多项式，应该可以表为 $\mathrm{P}_0(x)$，$\mathrm{P}_1(x)$，$\mathrm{P}_2(x)$及 $\mathrm{P}_3(x)$的线性组合：

$$\begin{aligned}2x^3+3x+4 &= f_0 P_0(x)+f_1 P_1(x)+f_2 P_2(x)+f_3 P_3(x)\\ &= f_0\cdot 1+f_1\cdot x+f_2\cdot \frac{1}{2}(3x^2-1)\\ &\quad +f_3\cdot\frac{1}{2}(5x^3-3x)\\ &= (f_0-\frac{1}{2}f_2)+(f_1-\frac{3}{2}f_3)x+\frac{3}{2}f_2x^2+\frac{5}{2}f_3x^3\end{aligned}$$

比较左右两端，即得

$$f_0-\frac{1}{2}f_2=4, f_1-\frac{3}{2}f_3=3,$$

$$\frac{3}{2}f_2=0, \frac{5}{2}f_3=2.$$

由此解得

$$f_0=4,\quad f_1=\frac{21}{5},\quad f_2=0,\quad f_3=\frac{4}{5}.$$

因此，

$$2x^3+3x+4=4P_0(x)+\frac{21}{5}P_1(x)+\frac{4}{5}P_3(x).$$

例 2 以勒让德多项式为基，在$[-1,1]$上把 $f(x)=|x|$展开为广义傅里叶级数.

解 本例的

$$f(x)=\begin{cases}x, & (0\leqslant x\leqslant 1)\\ -x, & (-1\leqslant x\leqslant 0)\end{cases}$$

在区间$[-1,0]$和$[0,1]$上，$f(x)$的表达式不同，不能采用例 1 的解法，只有应用一般公式(10.1.18).

$$f(x)=\sum_{l=0}^{\infty}f_l P_l(x), \tag{10.1.20}$$

$$f_l=\frac{2l+1}{2}\left[\int_{-1}^{0}(-\eta)P_l(\eta)d\eta+\int_0^1\xi P_l(\xi)d\xi\right]. \tag{10.1.21}$$

定积分的值与积分变数采用什么记号无关，在(10.1.21)中两个定积分采用了不同的积分变数，在前一个积分中，令$-\eta=\xi$，则

$$f_l = \frac{2l+1}{2}\left[\int_1^0 \xi P_l(-\xi)d(-\xi) + \int_0^1 \xi P_l(\xi)d\xi\right]$$
$$= \frac{2l+1}{2}\int_0^1 \xi[P_l(-\xi) + P_l(\xi)]d\xi.$$

对于奇数的 $l=2n-1$，$P_l(x)$只含奇次幂项，为奇函数，即 $P_l(-\xi)=-P_l(\xi)$；对于偶数的 $l=2n$，$P_l(x)$只含偶次幂项，为偶函数，即 $P_l(-\xi)=P_l(\xi)$，因此

$$f_{2n+1}=0. \tag{10.1.22}$$

$$f_{2n} = \frac{2l+1}{2}\int_0^1 \xi \cdot 2P_{2n}(\xi)d\xi = (4n+1)\int_0^1 \xi P_{2n}(\xi)d\xi.$$

将微分表示(10.1.7)代入，进行分部积分，有

$$f_{2n} = \frac{4n+1}{2^{2n}(2n)!}\int_0^1 \xi \frac{d^{2n}(\xi^2-1)^{2n}}{d\xi^{2n}}d\xi$$
$$= \frac{4n+1}{2^{2n}(2n)!}\left\{\left[\xi \frac{d^{2n-1}(\xi^2-1)^{2n}}{d\xi^{2n-1}}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{d^{2n-1}(\xi^2-1)^{2n}}{d\xi^{2n-1}}d\xi\right\}.$$

已积出部分以 $\xi=\pm1$ 为一级零点，且以 $\xi=0$ 为零点，故其数值为零.

$$f_{2n} = -\frac{4n+1}{2^{2n}(2n)!}\left[\frac{d^{2n-2}(\xi^2-1)^{2n}}{d\xi^{2n-2}}\right]_0^1. \tag{10.1.23}$$

由于(10.1.23)以 $\xi=\pm1$ 为二级零点，把上限 $\xi=1$ 代入为零. 剩下来的问题是下限 $\xi=0$ 的代入，为此只需注意 $d^{2n-2}(\xi^2-1)^{2n}/d\xi^{2n-2}$的常数项，即$(\xi^2-1)^{2n}$中的$(2n-2)$次幂项. 运用二项式定理，

$$(\xi^2-1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n}\frac{(2n)!}{(2n-k)!k!}(\xi^2)^{2n-k}(-1)^k$$

取 $k=n+1$ 的项，则

$$f_{2n} = \frac{4n+1}{2^{2n}(2n)!}\cdot\frac{d^{2n-2}}{d\xi^{2n-2}}\left[\frac{(2n)!}{(n-1)!\,(n+1)!}\xi^{2n-2}(-1)^{n+1}\right]$$
$$= (-1)^{n+1}\frac{(4n+1)(2n-2)!}{[2^{n-1}(n-1)!][2^{n+1}(n+1)!]}$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{(4n+1)(2n-2)!}{(2n-2)!!\ (2n+2)!!}$$

$$-(-1)^{n+1}\frac{(4n+1)(2n-3)!!}{(2n+2)!!}\cdot\frac{(2n-1)}{(2n-1)}$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{(4n+1)}{(2n-1)}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}.\ (n=1,2,\cdots)\quad(10.1.24)$$

最后的表达式虽然不是最简式，但形式易记. 不过它不适合于 $n=0$，而 f_0 可直接算出：

$$f_0=(4\cdot 0+1)\int_0^1\xi P_0(\xi)\mathrm{d}\xi=\int_0^1\xi\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2}.$$

最后得

$$|x|=\frac{1}{2}P_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(4n+1)(2n-1)!!}{(2n-1)(2n+2)!!}\mathrm{P}_{2n}(x).$$

$$(10.1.25)$$

（六）拉普拉斯方程的轴对称定解问题

拉普拉斯方程的定解问题，如果具有对称轴，自然就取这对称轴为球坐标的极轴，因为这样一来，问题与 φ 无关，只需用 $m=0$ 的轴对称球函数.

例 3 在球 $r=r_0$ 的内部求解 $\Delta u=0$ 使满足边界条件 $u|_{r=r_0}=\cos^2\theta$.

解 边界条件与 φ 无关，以球坐标的极轴为对称轴. 所求的解也应以球坐标的极轴为对称轴，因而

$$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l+\frac{B_l}{r^{l+1}}\right)\mathrm{P}_l(\cos\theta).$$

考虑到 u 在球心处应有自然边界条件：$u|_{r=0}=$有限值，上式中 $1/r^{l+1}$ 项必须舍弃，即取 $B_l=0$.

$$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}A_l r^l\mathrm{P}_l(\cos\theta).\qquad(10.1.26)$$

(10.1.26)是轴对称情况下，拉普拉斯方程在球内区域有限的一般解. 为了确定系数 A_l，把上式代入边界条件

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l r_0^l \mathrm{P}_l(\cos\theta) = \cos^2\theta = x^2. \qquad (10.1.27)$$

由于 $\mathrm{P}_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$，有

$$x^2=\frac{1}{3}[1+2\mathrm{P}_2(x)]=\frac{1}{3}\mathrm{P}_0(x)+\frac{2}{3}\mathrm{P}_2(x).$$

这就是 x^2 按勒让德多项式 $\mathrm{P}_l(x)$展开的式子. 以此代入(10.1.27)的右边，并与左边比较系数，即得

$$A_0=\frac{1}{3}, A_2=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{r_0^2}, A_l=0 \quad (l\neq 0,2).$$

这样

$$u(r,\theta)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{r_0^2}\cdot r^2\mathrm{P}_2(\cos\theta). \qquad (10.1.28)$$

例 4 半径为 r_0 的半球，其球面上温度保持为 $u_0\cos\theta$，底面绝热，试求这个半球里的稳定温度分布.

解 取球心为球坐标系的极点，垂直于底面的半径方向为球坐标系的极轴方向. 这样，极轴是对称轴，问题与 φ 无关. 定解问题是

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (10.1.29) \\ u|_{r=r_0} = u_0\cos\theta, (0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}) \text{ 即 } u|_{r=r_0} = u_0 x, (0<x\leqslant 1) & (10.1.30) \\ \frac{\partial u}{\partial\theta}|_{\theta=\pi/2} = 0, \qquad \text{即 } u_x|_{x=0} = 0. & (10.1.31) \end{cases}$$

定解问题仅在半球区域($0\leqslant\theta<\pi/2$；$0<x\leqslant1$)有意义，而勒让德多项式 $P_l(\cos\theta)$却在整个球形区域($0\leqslant\theta\leqslant\pi$；$-1\leqslant x\leqslant1$)上才是完备的，为了能运用勒让德多项式作展开，需要把定解问题延拓到整个球形区域，补充定义另外半个球面($\pi/2<\theta\leqslant\pi$；$-1\leqslant x<0$)上的边界条件. 为了满足半球底面($x=0$)上第二类齐次边界条件(10.1.31)，必须用偶延拓，即把边界条件补充定义成 x 的偶函数.

$$u|_{r=r_0}=\begin{cases}u_0\cos\theta, & (0\leqslant\theta\leqslant\pi/2)\\ -u_0\cos\theta. & (\pi/2\leqslant\theta\leqslant\pi)\end{cases}$$

$$=\left.\begin{cases}u_0 x, & (0\leqslant x\leqslant 1)\\ -u_0 x. & (-1\leqslant x\leqslant 0)\end{cases}\right\}\equiv f(x). \tag{10.1.32}$$

我们用边界条件(10.1.32)代替(10.1.30)和(10.1.31).现在,定解问题在整个球内区域有意义.由例3,知道轴对称情况下拉普拉斯方程在球内区域有限的一般解为

$$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}A_l r^l \mathrm{P}_l(\cos\theta). \tag{10.1.33}$$

以此代入(10.1.32),

$$\sum_{l=0}^{\infty}A_l r_0^l \mathrm{P}_l(x)=f(x)=u_0|x|. \tag{10.1.34}$$

以 $\mathrm{P}_l(x)(l=0,1,2,\cdots)$为基,将 $f(x)$展开为广义傅里叶级数

$$f(x)=\sum_{l=0}^{\infty}f_l\mathrm{P}_l(x), \tag{10.1.35}$$

其中系数

$$f_l=\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}f(\xi)\mathrm{P}_l(\xi)\mathrm{d}\xi=\frac{2l+1}{2}u_0\int_{-1}^{1}|\xi|\mathrm{P}_l(\xi)\mathrm{d}\xi. \tag{10.1.36}$$

例2已将区间[−1,+1]上的函数$|x|$展开成$\mathrm{P}_l(x)$的广义傅里叶级数(10.1.25).将这一结果代入(10.1.36),得

$$\begin{cases}f_{2n+1}=0, & (n=0,1,2,\cdots)\\ f_{2n}=(-1)^{n+1}\dfrac{(4n+1)(2n-1)!!}{(2n-1)(2n+2)!!}u_0, & (n=1,2,\cdots)\\ f_0=\dfrac{1}{2}u_0.\end{cases} \tag{10.1.37}$$

将(10.1.37)代入(10.1.35),与(10.1.34)的左边相比较,有

$$A_0=f_0=\frac{1}{2}u_0, A_{2n+1}=0, (n=0,1,2,\cdots)$$

$$A_{2n}r_0^{2n}=f_{2n}=(-1)^{n+1}\frac{(4n+1)(2n-1)!!}{(2n-1)(2n+2)!!}u_0. (n=1,2,\cdots)$$

因此，

$$A_{2n}=(-1)^{n+1}\frac{(4n+1)(2n-1)!!}{(2n-1)(2n+2)!!}\cdot\frac{u_0}{r_0^{2n}}. \qquad (10.1.38)$$

最后解得

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2}u_0+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(4n+1)(2n-1)!!}{(2n-1)(2n+2)!!}\cdot\frac{u_0}{r_0^{2n}}\cdot r^{2n}P_{2n}(\cos\theta). \qquad (0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2})$$

$$(10.1.39)$$

(10.1.39)在半球区域$(0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2})$上就是定解问题(10.1.29)～(10.1.31)的解.

例 5 在本来是匀强的静电场中放置均匀介质球. 本来的电场强度是 $\boldsymbol{E}_0$，球的半径是 r_0，介电常数是 ϵ. 试求解介质球内外的电场强度.

解 取球心为球坐标系的极点，通过球心而平行于 $\boldsymbol{E}_0$ 的直线显然是对称轴，取这对称轴作为球坐标系的极轴.

由于介质球的极化，球面出现束缚电荷，以致电场强度 $\boldsymbol{E}$ 在球面不连续，$\Delta u=\nabla\cdot\nabla u=-\nabla\cdot\boldsymbol{E}$ 在球面上没有意义，从而拉普拉斯方程在球面上没有意义. 我们只好先分别考虑球内的电势 $u_{内}$ 和球外的电势 $u_{外}$，然后通过衔接条件使两者在球面上衔接起来.

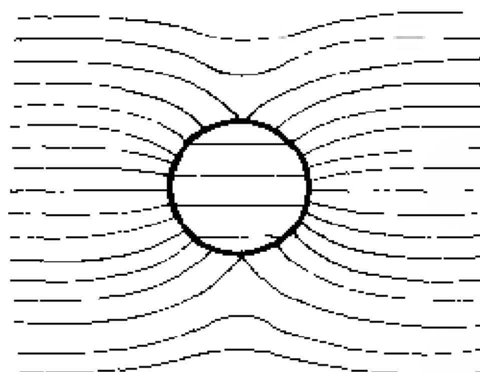


图 10-2

1. 球内电势 $u_{内}$.

球内电势 $u_{内}$ 满足

$$\Delta u_{内}=0. \quad (r<r_0) \qquad (10.1.40)$$

在轴对称情况下，(10.1.40)的一般解是

$$u_{内}=\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l+B_l\frac{1}{r^{l+1}}\right)\mathrm{P}_l(\cos\theta).$$

考虑到 $u_{内}$ 在球心 $r=0$ 应为有限，舍弃 $1/r^{l-1}$项，令 $B_l=0$，

$$u_{内}=\sum_{l=0}^{\infty}A_l r^l \mathrm{P}_l(\cos\theta). \qquad (10.1.41)$$

系数 A_l 暂时还确定不了.

2. 球外电势 $u_{外}$.

球外电势 $u_{外}$ 满足

$$\Delta u_{外}=0. \quad (r>r_0) \qquad (10.1.42)$$

$$u_{外}|_{r\to\infty}\sim -E_0 r\cos\theta. \qquad (10.1.43)$$

无限远处的边界条件(10.1.43)是仿照§8.1 例 4 的(8.1.60)写出的.

在轴对称情况下，(10.1.42)的一般解是

$$u_{外}=\sum_{l=0}^{\infty}\left(C_l r^l+D_l\frac{1}{r^{l+1}}\right)\mathrm{P}_l(\cos\theta). \qquad (10.1.44)$$

把(10.1.44)代入(10.1.43). 对于很大的 r，C_0 项和 D_l/r^{l+1}项远远小于 r^l 项. 考虑到这一点，代入的结果是

$$\sum_{l=1}^{\infty}C_l r^l \mathrm{P}_l(\cos\theta)\sim -E_0 r\cos\theta=-E_0 r\mathrm{P}_1(\cos\theta).$$

两边都是以勒让德多项式为基的广义傅里叶级数，不过，右边只有 $l=1$ 的一项. 两边比较，得

$$C_1=-E_0, C_l=0. (l\neq 0,1)$$

这样，(10.1.44)成为

$$u_{外}=C_0-E_0 r\mathrm{P}_1(\cos\theta)+\sum_{l=0}^{\infty}D_l\frac{1}{r^{l+1}}\mathrm{P}_l(\cos\theta). \qquad (10.1.45)$$

系数 D_l 暂时还确定不了.

3. $u_{内}$ 与 $u_{外}$ 的衔接.

$u_{内}$ 与 $u_{外}$ 并非两个互不相关的问题中的电势，而是同一个问题中不同区域上的电势. 它们应当在球面上互相衔接. 这里说的“衔接”指的是：电势在球面上连续，

$$u_{内}|_{r=r_0}=u_{外}|_{r=r_0}; \qquad (10.1.46)$$

还有，电位移 $\boldsymbol{D}=\varepsilon\varepsilon_0\boldsymbol{E}=-\varepsilon\varepsilon_0\nabla u$ 的法向分量即 $-\varepsilon\varepsilon_0\partial u/\partial r$ 在球面上连续(这里假定了介质球本来是不带电的)，

$$\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial u_{内}}{\partial r}\Big|_{r=r_0}=\varepsilon_0\frac{\partial u_{外}}{\partial r}\Big|_{r=r_0}. \qquad (10.1.47)$$

把(10.1.41)和(10.1.45)代入衔接条件(10.1.46)和(10.1.47)，

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}A_l r_0^l \mathrm{P}_l(\cos\theta)=C_0-E_0r_0\mathrm{P}_1(\cos\theta)+\sum_{l=0}^{\infty}\frac{D_l}{r_0^{l+1}}\mathrm{P}_l(\cos\theta),\\ \displaystyle\varepsilon\sum_{l=0}^{\infty}lA_l r_0^{l-1}\mathrm{P}_l(\cos\theta)=-E_0\mathrm{P}_1(\cos\theta)-\sum_{l=0}^{\infty}(l+1)\frac{D_l}{r_0^{l+2}}\mathrm{P}_l(\cos\theta).\end{cases}$$

比较两边的系数，得

$$\begin{cases}A_0=C_0+D_0\dfrac{1}{r_0},\\ 0=D_0\dfrac{1}{r_0^2};\end{cases}\qquad \begin{cases}A_1r_0=-E_0r_0+D_1\dfrac{1}{r_0^2},\\ \varepsilon A_1=-E_0-2D_1\dfrac{1}{r_0^3};\end{cases}$$

$$\begin{cases}A_lr_0^l=D_l\dfrac{1}{r_0^{l+1}},\\ \varepsilon lA_lr_0^{l-1}=-(l+1)D_l\dfrac{1}{r_0^{l+2}}.\end{cases}\quad(l\neq0,1)$$

由此解得

$$\begin{cases}D_0=0,\\ C_0=A_0;\end{cases}\begin{cases}A_1=-\dfrac{3}{\varepsilon+2}E_0,\\ D_1=\dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}r_0^3E_0;\end{cases}\begin{cases}A_l=0,\\ D_l=0.\end{cases}(l\neq0,1)$$

最终解为

$$\begin{cases}u_{内}=A_0-\dfrac{3}{\varepsilon+2}E_0r\cos\theta, & (10.1.48)\\ u_{外}=A_0-E_0r\cos\theta+\dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}r_0^3E_0\dfrac{1}{r^2}\cos\theta. & (10.1.49)\end{cases}$$

解(10.1.48)、(10.1.49)中出现任意常数 A_0，这是由于我们没有规定电势的零点.

球内电势(10.1.48)又可表为

$$u_{内}=A_0-\frac{3}{\varepsilon+2}E_0z.$$

由此可见，球内场强 $\boldsymbol{E}_{内}=-\nabla u_{内}$ 沿 z 方向即 $\boldsymbol{E}_0$ 方向，其大小

$$E_{内}=-\frac{\partial u_{内}}{\partial z}=\frac{3}{\varepsilon+2}E_0.$$

这是说，$E_{内}$ 仍为匀强电场，只是按一定比率削弱了. 球内极化强度

$$\mathrm{P}_{内}=\varepsilon_0(\varepsilon-1)E_{内}=\varepsilon_0\frac{3(\varepsilon-1)}{\varepsilon+2}E_0$$

也是常数. 这说明球的极化是均匀的.

（七）母函数

设在单位球北极置 $4\pi\varepsilon_0$ 单位的正电荷（图 10-3），则在球内任一点 M（其球坐标记作 r,θ,φ）的静电势为

$$\frac{1}{d}=\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}}. \tag{10.1.50}$$

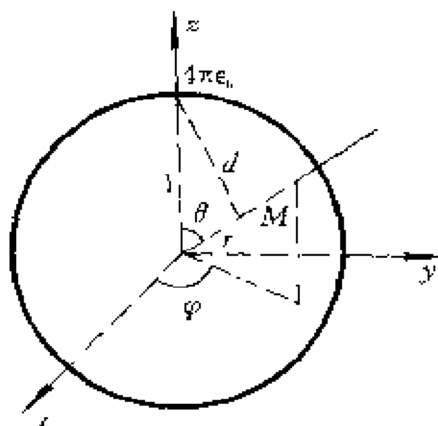


图 10-3

静电势 $1/d$ 遵从拉普拉斯方程，且以球坐标系的极轴为对称轴，因此，$1/d$ 应该具有轴对称情况下拉普拉斯方程一般解的形式，即

$$\frac{1}{d}=\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_lr^l+B_l\frac{1}{r^{l+1}}\right)\mathrm{P}_l(\cos\theta). \tag{10.1.51}$$

先研究单位球内的静电势. 在球心 $(r=0)$，电势应是有限的，$1/r^{l+1}$项不满足此条件，故取 $B_l=0$，

$$\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}}=\sum_{l=0}^{\infty}A_lr^l\mathrm{P}_l(\cos\theta). \tag{10.1.52}$$

为确定系数 A_l，本当按照(10.1.18)或(10.1.19)计算. 但这里采用一个较简便的变通办法. 在(10.1.52)两边置 $\theta=0$，

$$\frac{1}{1-r}=\sum_{l=0}^{\infty}A_lr^l\mathrm{P}_l(1)=\sum_{l=0}^{\infty}A_lr^l. \tag{10.1.53}$$

上式左边在 $r=0$ 的邻域上展为泰勒级数

$$\frac{1}{1-r}=1+r+r^2+r^3+\cdots+r^l+\cdots \qquad (10.1.54)$$

比较(10.1.53)和(10.1.54)即知

$$A_l=1.\ (l=0,1,2,\cdots)$$

于是(10.1.52)成为

$$\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}}=\sum_{l=0}^{\infty}r^l\mathrm{P}_l(\cos\theta). \quad (r<1) \qquad (10.1.55)$$

请读者自己研究单位球外的静电势. 其结果为

$$\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{r^{l+1}}\mathrm{P}_l(\cos\theta)\ (r>1) \qquad (10.1.56)$$

$1/\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}$ 因此叫作勒让德多项式的**母函数**(或**生成函数**).

以半径为 R 的球代替单位球,则

$$\frac{1}{\sqrt{R^2-2rR\cos\theta+r^2}}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{R^{l+1}}r^l\mathrm{P}_l(\cos\theta), & (r<R)\\ \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}R^l\frac{1}{r^{l+1}}\mathrm{P}_l(\cos\theta). & (r>R)\end{cases}$$

(10.1.57)

例 6 在点电荷 $4\pi\varepsilon_0 q$ 的电场中放置接地导体球,球的半径为 a,球心与点电荷相距 $r_1(r_1>a)$. 求解这个静电场.

解 取球心为球坐标系的极点,极轴通过点电荷,则极轴是对称轴,问题与 φ 无关.

假如没有导体球,则静电势本来应当是

$$\frac{q}{\sqrt{r_1^2-2r_1r\cos\theta+r^2}},$$

由于导体球的存在,静电势将修正为

$$u(r,\theta)=\frac{q}{\sqrt{r_1^2-2r_1r\cos\theta+r^2}}+v(r,\theta),$$

$v(r,\theta)$是待求的（在物理上，它是导体球上的静电感应电荷引起的），

$$\begin{cases}\Delta u=0,\\ u|_{r=a}=0, \lim\limits_{r\to\infty}u=0.\end{cases}$$

即 $$\begin{cases}\Delta v=0 & (10.1.58)\\ v|_{r=a}=-\dfrac{q}{\sqrt{r_1^2-2r_1a\cos\theta+a^2}}, \quad \lim\limits_{r\to\infty} v=0. & (10.1.59)\end{cases}$$

在轴对称情况下，方程(10.1.58)的一般解是

$$v(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l+B_l\frac{1}{r^{l+1}}\right)\mathrm{P}_l(\cos\theta).$$

考虑到(10.1.59)的无限远边界条件，应舍弃 r^l 项，

$$v(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}B_l\frac{1}{r^{l+1}}\mathrm{P}_l(\cos\theta). \tag{10.1.60}$$

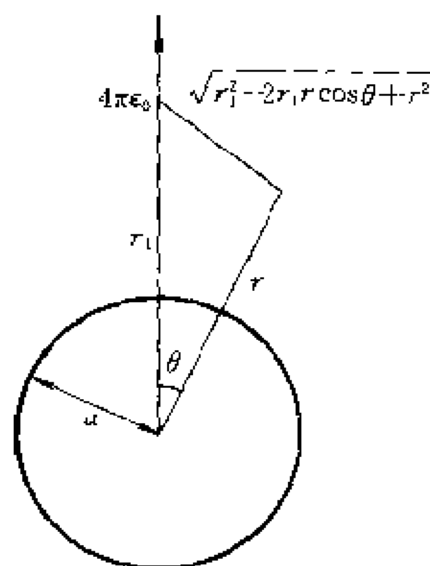


图 10-4

以(10.1.60)代入(10.1.59)的球面边界条件，

$$\sum_{l=0}^{\infty}B_l\frac{1}{a^{l+1}}\mathrm{P}_l(\cos\theta)=-\frac{q}{\sqrt{r_1^2-2r_1a\cos\theta+a^2}}.$$

引用母函数(10.1.57)，

$$\sum_{l=0}^{\infty}B_l\frac{1}{a^{l+1}}\mathrm{P}_l(\cos\theta)=-q\sum_{l=0}^{\infty}\frac{a^l}{r_1^{l+1}}\mathrm{P}_l(\cos\theta).$$

比较两边的广义傅里叶系数，得

$$B_l=-q\frac{a^{2l+1}}{r_1^{l+1}}.$$

最终解是

$$u(r,\theta)=\frac{q}{\sqrt{r_1^2-2r_1r\cos\theta+r^2}}+\sum_{l=0}^{\infty}(-q)\frac{a^{2l+1}}{r_1^{l+1}}\cdot\frac{1}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta).$$

(10.1.61)

其中第二部分，亦即 $v(r,\theta)$ 又可改写为 $-q\left(\frac{a}{r_1}\right)\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{a^2}{r_1}\right)^l\cdot\frac{1}{r^{l+1}}$ $P_l(\cos\theta)$，按照(10.1.57)，这就是

$$v(r,\theta)=\frac{-q(a/r_1)}{\sqrt{\left(\frac{a^2}{r_1}\right)^2-2\left(\frac{a^2}{r_1}\right)r\cos\theta+r^2}}.$$

事实上，这是某个点电荷的静电场中的静电势，这点电荷的电量为 $-4\pi\varepsilon_0q(a/r_1)$，位置在球心与本来那个点电荷的联线上，到球心的距离为 $r_0=a^2/r_1(<a$，可见在球内).

这样，**就导体球外的静电场而论**，好像不存在导体球，而存在上述假想的点电荷. 这假想的点电荷就叫作原来那个点电荷的**电像**.

（八）递推公式

利用母函数还可以导出勒让德多项式的递推公式. 先把(10.1.55)写成

$$\frac{1}{\sqrt{1-2rx+r^2}}=\sum_{l=0}^{\infty}r^lP_l(x). \qquad (10.1.62)$$

对 r 求导，

$$\frac{x-r}{(1-2rx+r^2)^{3/2}}=\sum_{l=0}^{\infty}lr^{l-1}P_l(x).$$

两边同乘以 $(1-2rx+r^2)$，得

$$\frac{x-r}{\sqrt{1-2rx+r^2}}=(1-2rx+r^2)\sum_{l=0}^{\infty}lr^{l-1}P_l(x).$$

以(10.1.62)代入上式左边，

$$(x-r)\sum_{l=0}^{\infty}r^lP_l(x)=(1-2rx+r^2)\sum_{l=0}^{\infty}lr^{l-1}P_l(x).$$

比较两边的 r^k 的系数，得

$$xP_k(x)-P_{k-1}(x)=(k+1)P_{k+1}(x)$$
$$-2xkP_k(x)+(k-1)P_{k-1}(x),$$

即

$$(k+1)P_{k+1}(x)-(2k+1)xP_k(x)+kP_{k-1}(x)=0. \quad (k\geqslant 1) \tag{10.1.63}$$

利用这个式子可从 $P_{k-1}(x)$ 和 $P_k(x)$ 推出 $P_{k+1}(x)$，所以此式称为勒让德多项式的**递推公式**.

勒让德多项式的递推公式有多种，现在来推导另外几个常见的递推公式.

将(10.1.62)两边对 x 求导，

$$\frac{r}{(1-2rx+r^2)^{3/2}}=\sum_{l=0}^{\infty}r^lP'_l(x).$$

两边同乘以 $(1-2rx+r^2)$，得

$$\frac{r}{\sqrt{1-2rx+r^2}}=(1-2rx+r^2)\sum r^lP'_l(x).$$

以(10.1.62)代入上式左边，

$$r\sum_{l=0}^{\infty}r^lP_l(x)=(1-2rx+r^2)\sum_{l=0}^{\infty}r^lP'_l(x).$$

比较两边 r^{k+1} 项的系数，得递推公式

$$P_k(x)=P'_{k-1}(x)-2xP'_k(x)+P'_{k-1}(x). \ (k\geqslant 1) \tag{10.1.64}$$

(10.1.63)对 x 求导，

$$(k+1)P'_{k+1}(x)-(2k+1)P_k(x)-$$
$$(2k+1)xP'_k(x)+kP'_{k-1}(x)=0. \ (k\geqslant 1) \tag{10.1.65}$$

(10.1.64)乘 $(2k+1)$，(10.1.65)乘 2，二者相减消去 $xP'_k(x)$ 项，得递推公式

$$(2k+1)P_k(x)=P'_{k+1}(x)-P'_{k-1}(x) \ (k\geqslant 1) \tag{10.1.66}$$

类似地，还可得到下列公式：

$$P'_{k+1}(x)=(k+1)P_k(x)+xP'_k(x), \tag{10.1.67}$$

$$kP_k(x)=xP'_k(x)-P'_{k-1}(x), \ (k\geqslant 1) \tag{10.1.68}$$

$$(x^2-1)P'_k(x)=kxP_k(x)-kP_{k-1}(x). \ (k\geqslant 1) \tag{10.1.69}$$

(10.1.63)、(10.1.64)、(10.1.66)、(10.1.67)、(10.1.68)和(10.1.69)就是勒让德多项式的常见的递推公式.

上述递推公式有些可用来计算某些与勒让德多项式有关的定积分.

例 7 计算定积分 $\int_{-1}^{1} xP_k(x)P_l(x)dx$.（$k$、$l$ 为自然数）

解 利用递推公式(10.1.63)，将 $xP_k(x)$ 化成 $P_{k+1}(x)$ 和 $P_{k-1}(x)$，

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} xP_k(x)P_l(x)dx &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2k+1}[(k+1)P_{k+1}(x) \\ &\quad + kP_{k-1}(x)]P_l(x)dx \\ &= \frac{k+1}{2k+1}\int_{-1}^{1} P_{k+1}(x)P_l(x)dx \\ &\quad + \frac{k}{2k+1}\int_{-1}^{1} P_{k-1}(x)P_l(x)dx \\ &= \frac{k+1}{2k+1}\cdot\frac{2}{2l+1}\delta_{k+1,l} \\ &\quad + \frac{k}{2k+1}\cdot\frac{2}{2l+1}\delta_{k-1,l} \\ &= \begin{cases}\dfrac{2k}{(2k+1)(2k-1)}, l = k-1 \\ \dfrac{2(k+1)}{(2k+3)(2k+1)}, l = k+1 \\ 0. \qquad l \neq k-1, k+1.\end{cases}\end{aligned} \tag{10.1.70}$$

例 8 计算定积分 $I_l = (2l+1)\int_0^1 xP_l(x)dx \quad (l = 0, 1, 2, \cdots)$

解 这是例 2 中计算过的定积分，这里利用递推公式重新计算.

利用递推公式(10.1.63)，有

$$I_l = (2l+1)\int_0^1 xP_l(x)dx = (l+1)\int_0^1 P_{l+1}(x)dx + l\int_0^1 P_{l-1}(x)dx.$$

再利用递推公式(10.1.66)，得

$$\begin{aligned}I_l &= \frac{l+1}{2l+3}\int_0^1 [P'_{l+2}(x) - P'_l(x)]dx + \frac{l}{2l-1}\int_0^1 [P'_l(x) - P'_{l-2}(x)]dx \\ &= \frac{l+1}{2l+3}[P_{l+2}(x) - P_l(x)]_0^1 + \frac{l}{2l-1}[P_l(x) - P_{l-2}(x)]_0^1\end{aligned}$$

考虑到(10.1.10)，用积分上限 $x=1$ 代入的结果为零，故

$$I_l=\frac{l+1}{2l+3}[P_l(0)-P_{l+2}(0)]+\frac{l}{2l-1}[P_{l-2}(0)-P_l(0)].$$

利用(10.1.5)和(10.1.6)，得

$$I_{2n+1}=0,\qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$\begin{aligned}
I_{2n}=&\frac{2n+1}{4n+3}\left[(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}-(-1)^{n+1}\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\right]\\
&+\frac{2n}{4n-1}\left[(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}-(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]\\
=&\frac{(2n+1)}{(4n+3)}(-1)^n\frac{(2n-1)!!\,[(2n+2)+(2n+1)]}{(2n+2)!!}\\
&-\frac{(2n)}{(4n-1)}(-1)^n\frac{(2n-3)!!\,[2n+2n-1]}{(2n)!!}\\
=&-(-1)^{n+1}\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}+(-1)^{n+1}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\\
=&(-1)^{n+1}\frac{(2n-3)!!}{(2n+2)!!}[2n(2n+2)-(2n-1)(2n+1)]\\
=&(-1)^{n+1}(4n+1)\frac{(2n-3)!!}{(2n+2)!!}\\
=&(-1)^{n+1}\frac{(4n+1)}{(2n-1)}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}.\ (n=1,2,\cdots)
\end{aligned}\tag{10.1.71}$$

对 $n=0$，有

$$I_0=\int_0^1 xP_0(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.\tag{10.1.72}$$

所得结果跟例 2 完全一样.

习　题

1. 以勒让德多项式为基，在区间[-1,1]上把下列函数展开为广义傅里叶级数.

(1) $f(x)=x^4+2x^3$；　(2) $f(x)=\begin{cases}x^2, & (0\leqslant x\leqslant 1)\\ 0; & (-1\leqslant x\leqslant 0)\end{cases}$

(3) $f(x)=x^n$.（n 为正整数）

2. 用一层不导电的物质把半径为 r_0 的导体球壳分隔为两个半球壳，使半球各充电到电势为 v_1 和 v_2. 试计算电场中的电势分布.

3. 一空心圆球区域，内半径为 r_1，外半径为 r_2，内球面上有恒定电势 u_0，外球面上电势保持为 $u_1\cos^2\theta$，u_0，u_1 均为常数，试求内外球面之间空心圆球

区域中的电势分布.

4. 半径为 r_0 的半球的球面保持一定温度 u_0，半球底面(1)保持 0°，(2)绝热，试求这个半球里的稳定温度分布.

5. 在本来是匀强的静电场 E_0 中放置导体球，球的半径为 r_0. 试求解球外的静电场. [提示：参考 § 8.1 例 4]

6. 均匀介质球，半径为 r_0，介电常数为 ϵ. 把介质球放在点电荷 $4\pi\epsilon_0 q$ 的电场中，球心跟点电荷相距 $d(>r_0)$，求解这个静电场中的电势.

7. 半径为 r_0，表面熏黑的均匀球，在温度为 0°的空气中，受着阳光的照射，阳光的热流强度为 q_0. 求解小球里的稳定温度分布.

8. 求解 § 7.1 习题 7 的轻绳的振动，初位移 $\varphi(x)$，初速 $\psi(x)$.

9. 细导线首尾相接而构成圆环，环的半径为 r_0. 环上带电 $4\pi\epsilon_0 q$ 单位. 求圆环周围电场中的静电势. [在初等电学课程中已经知道，圆环轴上距环心 r 处的电势为 $q/\sqrt{r_0^2+r^2}$. 这可用来作为电势在 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 方向的值.]

10. 证明递推公式(10.1.67)、(10.1.68)、(10.1.69).

11. 利用勒让德多项式的递推公式，计算定积分

$$I=\int_0^1 \mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x.$$

§ 10.2 连带勒让德函数

为了得到一般情况下的球函数，首先要求解连带勒让德方程

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x}+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]\Theta=0 \quad (x=\cos\theta)$$

(10.2.1)

(一) 连带勒让德函数

(1) 连带勒让德函数的表达式

$x_0=0$ 是连带勒让德方程(10.2.1)的常点，可以用 § 9.2 的方法在 $x_0=0$ 的邻域上求连带勒让德方程的级数解. 但是直接运用级数解法所得系数递推公式比较复杂. 每个递推公式涉及三个系数，从而难于写出系数的一般表示式.

因此，通常作变换

$$\Theta=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}y(x), \tag{10.2.2}$$

把待求函数从 Θ 变换为 $y(x)$. 在这变换下，

$$\frac{d\Theta}{dx}=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}y'-m(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}xy,$$

$$\frac{d^2\Theta}{dx^2}=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}y''-2m(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}xy'-m(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}y$$
$$+m(m-2)(1-x^2)^{\frac{m}{2}-2}x^2y.$$

把以上三个式子代入连带勒让德方程(10.2.1)，就把它化为 $y(x)$ 的微分方程

$$(1-x^2)y''-2(m+1)xy'+[l(l+1)-m(m+1)]y=0. \tag{10.2.3}$$

$x_0=0$ 是这个微分方程的常点，直接运用级数解法所得系数递推公式也不复杂. 可是，我们还是不准备直接运用级数解法，因为有更为简便的方法.

事实上，微分方程(10.2.3)就是勒让德方程逐项求导 m 次后得到的方程(§9.2 习题 4 就是一个例子，在那里 $l=3, m=2$). 验证如下：应用关于乘积求导的**莱布尼茨求导规则**

$$(uv)^{[m]}=uv^{[m]}+\frac{m}{1!}u'v^{[m-1]}+\frac{m(m-1)}{2!}u''v^{[m-2]}+\cdots$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{k!}u^{[k]}v^{[m-k]}+\cdots$$
$$+u^{[m]}v, \tag{10.2.4}$$

把勒让德方程

$$(1-x^2)P''-2xP'+l(l+1)P=0$$

求导 m 次，其结果是

$$\left\{(1-x^2)P^{[m]''}-m2xP^{[m]'}-\frac{m(m-1)}{2}2P^{[m]}\right\}$$
$$-2\{xP^{[m]'}+mP^{[m]}\}+l(l+1)P^{[m]}=0,$$

即

$$(1-x^2)P^{[m]''}-2(m+1)xP^{[m]'}+[l(l+1)-m(m+1)]P^{[m]}$$

$=0.$

这正是(10.2.3). 因此(10.2.3)的解 $y(x)$ 应当是勒让德方程的解 $P(x)$ 的 m 阶导数,

$$y(x)=\mathrm{P}^{[m]}(x). \tag{10.2.5}$$

我们已经知道,勒让德方程和自然的边界条件(在 $x=\pm1$ 为有限)构成本征值问题,本征值是 $l(l+1)$,而 l 为整数,本征函数则是勒让德多项式 $\mathrm{P}_l(x)$. 那么,方程(10.2.3)也就与自然边界条件构成本征值问题,本征值同上,本征函数则是 $\mathrm{P}_l(x)$ 的 m 阶导数,即

$$y(x)=\mathrm{P}_l^{[m]}(x). \tag{10.2.6}$$

以此代回(10.2.2),得 $\Theta=(1-x^2)^{m/2}\mathrm{P}_l^{[m]}(x)$,这叫作**连带勒让德函数**,通常记作 $\mathrm{P}_l^m(x)$,

$$\mathrm{P}_l^m(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\mathrm{P}_l^{[m]}(x). \tag{10.2.7}$$

注意区分 $\mathrm{P}_l^m(x)$ 和 $\mathrm{P}_l^{[m]}(x)$,后者只是 $\mathrm{P}_l(x)$ 的 m 阶导数.

总之,连带勒让德方程和自然边界条件也构成**本征值问题**,**本征值**是

$$l(l+1) \qquad (l=0,1,2\cdots), \tag{10.2.8}$$

本征函数则是连带勒让德函数(10.2.7).

既然 $\mathrm{P}_l(x)$ 是 l 次多项式,它最多只能求导 l 次,超过 l 次就得到零. 因此,本征值 $l(l+1)$ 中的整数 l 必须 $\geqslant m$. 对 l 的一个确定值,连带勒让德函数(10.2.7)中的 m 只能取值

$$m=0,1,2,\cdots,l. \tag{10.2.9}$$

当 $m=0$ 时,$\mathrm{P}_l^0(x)=\mathrm{P}_l(x)$,连带勒让德函数(10.2.7)简化为勒让德多项式 $\mathrm{P}_l(x)$. 下面列出 $m\neq0$ 而 $l=1,2$ 的连带勒让德函数的具体形式

$$\mathrm{P}_1^1(x)=(1-x^2)^{1/2}=\sin\theta, \tag{10.2.10}$$

$$\mathrm{P}_2^1(x)=(1-x^2)^{1/2}(3x)=\frac{3}{2}\sin2\theta, \tag{10.2.11}$$

$$\mathrm{P}_2^2(x)=3(1-x^2)=3\sin^2\theta=\frac{3}{2}(1-\cos2\theta). \tag{10.2.12}$$

更多的连带勒让德函数的具体形式参看附录五.

(2) 连带勒让德函数的微分表示

由勒让德多项式的微分表示(10.1.7)立刻得到连带勒让德函数的微分表示

$$P_l^m(x)=\frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^l l!}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l. \qquad (10.2.13)$$

这也叫作**罗德里格斯公式**. 由于$(1-x^2)^{m/2}$,$(x^2-1)^l$ 为偶函数. 从(10.2.13)不难看出,当 $l-m=2n(n=0,1,2,\cdots)$时,$P_l^m(x)$为偶函数;当 $l-m=2n+1(n=0,1,2\cdots)$时,$P_l^m(x)$为奇函数.

从(9.1.7)延续下来,我们一直把 m 当作正整数. 其实,在连带勒让德方程(10.2.1)中只出现 m^2 而并不出现 m. 把正整数 m 换成负整数$(-m)$,连带勒让德方程保持不变. 因而,我们可以揣想

$$P_l^{-m}(x)=\frac{(1-x^2)^{-\frac{m}{2}}}{2^l l!}\frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}}(x^2-1)^l \qquad (10.2.14)$$

也是连带勒让德方程的解且满足自然边界条件. 作为二阶常微分方程,连带勒让德方程可以有两个线性独立解. 但满足自然边界条件的解只能有一个. 因此,$P_l^{-m}(x)$应当就是 $P_l^m(x)$,最多差一个常数因子. 为了求出这个常数因子,拿(10.2.13)跟(10.2.14)相除,

$$\text{常数}=\frac{P_l^m(x)}{P_l^{-m}(x)}=\frac{(1-x^2)^m d^{l+m}(x^2-1)^l/dx^{l+m}}{d^{l-m}(x^2-1)^l/dx^{l-m}}.$$

上式右边是有理分式,分子与分母的同幂项之比就应当等于左边那个常数. 现在看分子与分母最高幂项之比,它

$$=(-1)^m x^{2m}\frac{(2l)!}{(l-m)!}x^{l-m} : \frac{(2l)!}{(l+m)!}x^{l+m}=(-1)^m\frac{(l+m)!}{(l-m)!}.$$

这样,我们得到

$$\begin{cases} P_l^m(x)=(-1)^m\dfrac{(l+m)!}{(l-m)!}P_l^{-m}(x), \\ P_l^{-m}(x)=(-1)^m\dfrac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(x). \end{cases} \qquad (10.2.15)$$

(3) 连带勒让德函数的积分表示

按照柯西公式(2.4.1),微分表示式(10.2.13)可表为路积分

$$\mathrm{P}_l^m(x)=\frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^l}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{(l+m)!}{l!}\oint_C\frac{(z^2-1)^l}{(z-x)^{l+m+1}}\mathrm{d}z, \quad (10.2.16)$$

C 为 z 平面上围绕 $z=x$ 的任一闭合回路. 这也叫作**施列夫利积分**.

(10.2.16)还可以进一步表为定积分. 为此,取 C 为圆周,圆心在 $z=x$,半径为 $\sqrt{|x^2-1|}$. 在 C 上,$z-x=\sqrt{x^2-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$. 而$(1-x^2)^{1/2}=\mathrm{i}\sqrt{x^2-1}=\mathrm{i}(z-x)/\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$,$\mathrm{d}z=\mathrm{i}\sqrt{x^2-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}\mathrm{d}\psi$,(10.2.16)成为

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_l^m(x) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{(l+m)!}{2^l l!}\oint_C\left(\mathrm{i}\frac{z-x}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}}\right)^m\frac{(z^2-1)^l}{(z-x)^{l+m+1}}\mathrm{d}z \\
&= \frac{\mathrm{i}^m}{2\pi\mathrm{i}}\frac{(l+m)!}{2^l l!}\oint_C \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\psi}\frac{(z^2-1)^l}{(z-x)^{l+1}}\mathrm{d}z \\
&= \frac{\mathrm{i}^m}{2\pi\mathrm{i}}\frac{(l+m)!}{2^l l!}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\psi} \\
&\quad \frac{[(x+\sqrt{x^2-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi})^2-1]^l}{[\sqrt{x^2-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}]^{l+1}}\mathrm{i}\sqrt{x^2-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}\mathrm{d}\psi \\
&= \frac{\mathrm{i}^m}{2\pi}\frac{(l+m)!}{l!}\times\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\psi} \\
&\quad \left[\frac{x^2+2x\sqrt{x^2-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}+(x^2-1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\psi}-1}{2\sqrt{x^2-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}}\right]^l\mathrm{d}\psi \\
&= \frac{\mathrm{i}^m}{2\pi}\frac{(l+m)!}{l!}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\psi} \\
&\quad \left[x+\sqrt{x^2-1}\,\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\psi}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi})\right]^l\mathrm{d}\psi.
\end{aligned}$$

从 x 回到原来的变数 θ,$x=\cos\theta$,则

$$\mathrm{P}_l^m(x)=\frac{\mathrm{i}^m}{2\pi}\frac{(l+m)!}{l!}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\psi}[\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta\cos\psi]^l\mathrm{d}\psi. \quad (10.2.17)$$

这也叫作**拉普拉斯积分**.

(二) 连带勒让德函数的正交关系

作为施图姆-刘维尔本征值问题的正交关系(9.4.12)的特例,

同一 m 而不同阶 l 的连带勒让德函数在区间 $(-1,+1)$ 上正交，

$$\int_{-1}^{+1} \mathrm{P}_k^m(x)\mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{d}x = 0 \quad (k \neq l). \tag{10.2.18}$$

如果从 x 回到原来的变数 θ，则(10.2.18)应是

$$\int_0^\pi \mathrm{P}_k^m(\cos\theta)\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta = 0 \quad (k \neq l). \tag{10.2.19}$$

（三）连带勒让德函数的模

现在计算连带勒让德函数 $\mathrm{P}_l^m(x)$ 的模 N_l^m. 利用(10.2.15)，

$$\begin{aligned}
(N_l^m)^2 &= \int_{-1}^{+1} [\mathrm{P}_l^m(x)]^2\mathrm{d}x \\
&= (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l-m)!}\int_{-1}^{+1} \mathrm{P}_l^{-m}(x)\mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{d}x \\
&= (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l-m)!}\frac{1}{2^{2l}(l!)^2}\int_{-1}^{+1} \frac{\mathrm{d}^{l-m}}{\mathrm{d}x^{l-m}}(x^2-1)^l \\
&\quad \times \frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}x^{l+m}}(x^2-1)^l\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

仿照上节计算勒让德多项式的模的方法，进行分部积分，而积出的部分代入上限和下限后为零，

$$\begin{aligned}
(N_l^m)^2 &= (-1)^{m+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{1}{2^{2l}(l!)^2} \\
&\quad \times \int_{-1}^{+1} \frac{\mathrm{d}^{l-m+1}}{\mathrm{d}x^{l-m+1}}(x^2-1)^l \frac{\mathrm{d}^{l+m-1}}{\mathrm{d}x^{l+m-1}}(x^2-1)^l\mathrm{d}x \\
&= (-1)^{m+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}\int_{-1}^{+1} \mathrm{P}_l^{-[m-1]}(x)\mathrm{P}_l^{[m-1]}(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

一次又一次地分部积分计 m 次，并利用(10.1.17)，即得

$$\begin{aligned}
(N_l^m)^2 &= (-1)^{2m} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}\int_{-1}^{+1} \mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{(l+m)!}{(l-m)!}(N_l)^2 = \frac{(l+m)!2}{(l-m)!2l+1}.
\end{aligned}$$

终于求得模 N_l^m，

$$N_l^m = \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}}. \tag{10.2.20}$$

（四）广义傅里叶级数

根据§9.4施图姆-刘维尔本征值问题的性质(4),作为一个例子,m 相同的连带勒让德函数 $P_l^m(x)(l=0,1,2\cdots)$是完备的,可作为广义傅里叶级数展开的基,把定义在 x 的区间$[-1,1]$上的函数 $f(x)$,或定义在 θ 的区间$[0,\pi]$上的函数 $f(\theta)$展开为广义傅里叶级数

$$\begin{cases} f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l P_l^m(x), \\ \text{系数 } f_l = \frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \int_{-1}^{+1} f(x) P_l^m(x) dx. \end{cases} \tag{10.2.21}$$

即

$$\begin{cases} f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l P_l^m(\cos\theta), \\ \text{系数 } f_l = \frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \int_{0}^{\pi} f(\theta) P_l^m(\cos\theta) \sin\theta d\theta. \end{cases} \tag{10.2.22}$$

注意(10.2.22)中积分有权重 $\sin\theta$.

例1 以 $P_l^2(x)(l=0,1,2,\cdots)$为基,在 x 的区间$[-1,1]$上把函数 $f(x)=\sin^2\theta=1-x^2$ 展开为广义傅里叶级数.

解 由于这里 $m=2$,$P_0^2(x)\equiv 0$,$P_1^2(x)\equiv 0$,因此按(10.2.21)把 $f(x)=1-x^2$ 展开成

$$f(x)=(1-x^2)=\sum_{l=2}^{\infty} f_l P_l^2(x) \tag{10.2.23}$$

系数 f_l 可按(10.2.21)计算,

$$f_l = \frac{2l+1}{2} \cdot \frac{(l-2)!}{(l+2)!} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^2 \frac{1}{2^l l!} \frac{d^{l+2}(x^2-1)^l}{dx^{l+2}} dx.$$

分部积分一次,

$$f_l = \frac{(2l+1)}{2^{l+1} l!} \cdot \frac{(l-2)!}{(l+2)!} \left\{ \left[(1-x^2)^2 \frac{d^{l+1}(x^2-1)^l}{dx^{l+1}} \right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} 4(x^3-x) \frac{d^{l+1}(x^2-1)^l}{dx^{l+1}} dx \right\},$$

上式已积出部分为零,继续分部积分两次,

$$f_l = \frac{(2l+1)}{2^{l-1} l!} \cdot \frac{(l-2)!}{(l+2)!}$$

$$\left\{\left[-(x^3-x)\frac{\mathrm{d}^l(x^2-1)^l}{\mathrm{d}x^l}+(3x^2-1)\frac{\mathrm{d}^{l-1}(x^2-1)^l}{\mathrm{d}x^{l-1}}\right]_{-1}^{1}\right.$$

$$\left.-6\int_{-1}^{1}x\frac{\mathrm{d}^{l-1}(x^2-1)^l}{\mathrm{d}x^{l-1}}\mathrm{d}x\right\}.$$

由于 $x=\pm1$ 均是已积出部分的零点，故上式已积出部分为零，

$$f_l=\frac{(2l+1)}{2^{l-1}l!}\cdot\frac{(l-2)!}{(l+2)!}(-6)\int_{-1}^{1}x\frac{\mathrm{d}^{l-1}(x^2-1)^l}{\mathrm{d}x^{l-1}}\mathrm{d}x.\tag{10.2.24}$$

对 $l=2$，(10.2.24)给出

$$\begin{aligned}f_2&=\frac{5}{2\cdot2}\cdot\frac{1}{4!}(-6)\int_{-1}^{1}x\frac{\mathrm{d}(x^2-1)^2}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\\&=-\frac{5}{16}\int_{-1}^{1}x\frac{\mathrm{d}(x^4-2x^2+1)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\\&=-\frac{5}{4}\int_{-1}^{1}(x^4-x^2)\mathrm{d}x\\&=-\frac{5}{4}\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1}=\frac{1}{3}.\end{aligned}\tag{10.2.25}$$

对于 $l>2$，把(10.2.24)再分部积分一次，

$$f_l=\frac{(2l+1)}{2^{l-1}l!}\cdot\frac{(l-2)!}{(l+2)!}\cdot(-6)\left\{\left[x\frac{\mathrm{d}^{l-2}(x^2-1)^l}{\mathrm{d}x^{l-2}}\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^{l-2}(x^2-1)^l}{\mathrm{d}x^{l-2}}\mathrm{d}x\right\}$$

上式已积出部分同样为零，所以

$$f_l=\frac{(2l+1)}{2^{l-1}l!}\cdot\frac{(l-2)!}{(l+2)!}\cdot6\cdot\left[\frac{\mathrm{d}^{l-3}(x^2-1)^l}{\mathrm{d}x^{l-3}}\right]_{-1}^{1}=0\tag{10.2.26}$$

最后得仅含 $\mathrm{P}_2^2(x)$ 的展开式

$$f(x)=\sin^2\theta=1-x^2=\frac{1}{3}\mathrm{P}_2^2(x)=\frac{1}{3}\mathrm{P}_2^2(\cos\theta).\tag{10.2.27}$$

其实，只要查看前面列出的连带勒让德函数 $\mathrm{P}_2^2(x)$ 的表达式(10.2.12)，马上就能得到(10.2.27)，不必像上面那样进行具体计算. 今后对一些简单的函数 $f(x)$，都可以这样进行广义傅里叶级

数展开.

例 2 以 $P_l^2(x)(l=0,1,2,\cdots)$为基，在 x 的区间$[-1,1]$上把函数 $f(x)=\begin{cases}u_0 & 0<x\leqslant 1\\ 0 & -1\leqslant x<0\end{cases}$（见图 10-5），展开为广义傅里叶级数

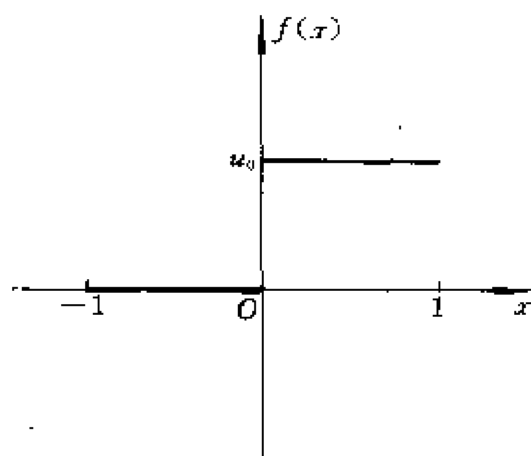


图 10-5

解 由于这里 $m=2$，$P_0^2(x)\equiv 0$，$P_1^2(x)\equiv 0$，因此按(10.2.21)把 $f(x)$展开成

$$f(x)=\sum_{l=2}^{\infty}f_l P_l^2(x) \tag{10.2.28}$$

系数 f_l 可按(10.2.21)计算，

$$f_l=\frac{2l+1}{2}\cdot\frac{(l-2)!}{(l+2)!}\int_0^1 u_0\frac{1}{2^l l!}(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^{l+2}(x^2-1)^l}{\mathrm{d}x^{l+2}}\mathrm{d}x$$

经过两次分部积分，可将上式计算出来，

$$f_l=\frac{2l+1}{2}\cdot\frac{(l-2)!}{(l+2)!}u_0\left[\frac{(1-x^2)}{2^l l!}\cdot\frac{\mathrm{d}^{l+1}(x^2-1)^l}{\mathrm{d}x^{l+1}}+\frac{2x}{2^l l!}\cdot\frac{\mathrm{d}^l(x^2-1)^l}{\mathrm{d}x^l}-\frac{2}{2^l l!}\cdot\frac{\mathrm{d}^{l-1}(x^2-1)^l}{\mathrm{d}x^{l-1}}\right]_0^1$$

上式括号中第一项和第三项均以 $x=1$ 为零点，第二项以 $x=0$ 为零点，在 $x=1$ 处，第二项为 $2P_l(1)=2$，因此，

$$f_l=\frac{(2l+1)(l-2)!u_0}{2(l+2)!}\left\{2+\frac{1}{2^l l!}\left[2\frac{\mathrm{d}^{l-1}(x^2-1)^l}{\mathrm{d}x^{l-1}}-\frac{\mathrm{d}^{l+1}(x^2-1)^l}{\mathrm{d}x^{l+1}}\right]_{x=0}\right\}$$

当 $l=2n$ 时，$l\pm1=2n\pm1$，$\dfrac{d^{l\pm1}(x^2-1)^l}{dx^{l\pm1}}=\dfrac{d^{2n\pm1}(x^2-1)^{2n}}{dx^{2n\pm1}}$中每一项均含 x，故在 $x=0$ 处取值为零，因而

$$f_{2n}=\frac{(4n+1)(2n-2)!}{(2n+2)!}u_0. \qquad (n=1,2,\cdots) \quad (10.2.29)$$

当 $l=2n+1$ 时，$l+1=2n+2$，$l-1=2n$，利用二项式定理，

$$(x^2-1)^l=(x^2-1)^{2n+1}$$
$$=\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{(2n+1)!}{(2n+1-k)!\ k!}(x^2)^{2n+1-k}\cdot(-1)^k$$

$$(10.2.30)$$

因而，
$$\left[\frac{d^{l-1}(x^2-1)^l}{dx^{l-1}}\right]_{x=0}=\left[\frac{d^{2n}(x^2-1)^{2n+1}}{dx^{2n}}\right]_{x=0}$$

$=(10.2.30)$中 x^{2n}项的系数 $\cdot\ (2n)!=\dfrac{(2n+1)!}{n!\ (n+1)!}(-1)^{n+1}(2n)!$，

$$\left[\frac{d^{l+1}(x^2-1)^l}{dx^{l+1}}\right]_{x=0}=\left[\frac{d^{2n+2}(x^2-1)^{2n+1}}{dx^{2n+2}}\right]_{x=0}$$

$=(10.2.30)$中 x^{2n+2}项的系数 $\cdot\ (2n+2)!$

$=\dfrac{(2n+1)!}{(n+1)!\ n!}(-1)^n(2n+2)!$.

因此

$$f_{2n+1}=\frac{(4n+3)(2n-1)!}{2(2n+3)!}$$
$$\left\{2+\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}}\cdot\frac{(2n)!}{n!\ (n+1)!}[2+(2n+2)(2n+1)]\right\}u_0$$
$$=\frac{(4n+3)(2n-1)!}{(2n+3)!}\left\{1+\frac{(-1)^{n+1}(2n)!\ (2n^2+3n+2)}{(2n)!!\ (2n+2)!!}\right\}u_0$$
$$=(4n+3)\cdot\frac{(2n-1)!}{(2n+3)!}$$
$$\left\{1+(-1)^{n+1}(2n^2+3n+2)\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\right\}u_0 \quad (n=1,2,\cdots)$$

$$(10.2.31)$$

最后得

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(4n+1)\frac{(2n-2)!}{(2n+2)!}u_0P_{2n}^2(x)$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(4n+3)\frac{(2n-1)!}{(2n+3)!}$$

$$\left[1+(-1)^{n+1}(2n^2+3n+2)\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\right]u_0 P_{2n+1}^2(x)$$

(10.2.32)

由于函数 $f(x)$ 为非奇非偶函数，故广义傅里叶级数(10.2.32)中既含偶函数 $P_{2n}^2(x)(n=1,2,\cdots)$，又含奇函数 $P_{2n+1}^2(x)(n=1,2,\cdots)$.

(五) 连带勒让德函数的递推公式

利用勒让德多项式的递推公式和连带勒让德函数的定义(10.2.7)，可以导出连带勒让德函数的递推公式.

上节已导出勒让德多项式的递推公式(10.1.63)和(10.1.66)，即

$$(k+1)P_{k+1}(x)-(2k+1)xP_k(x)+kP_{k-1}(x)=0,\quad (k\geqslant 1)\qquad (10.1.63)$$

$$(2k+1)P_k(x)=P'_{k+1}(x)-P'_{k-1}(x).\quad (k\geqslant 1)\qquad (10.1.66)$$

(10.1.63)、(10.1.66)分别对 x 求导 m 次、$(m-1)$ 次，按莱布尼茨求导规则得

$$(k+1)P_{k+1}^{[m]}(x)-(2k+1)xP_k^{[m]}(x)-m(2k+1)P_k^{[m-1]}(x)+kP_{k-1}^{[m]}(x)=0,\qquad (10.2.33)$$

$$(2k+1)P_k^{[m-1]}(x)=P_{k+1}^{[m]}(x)-P_{k-1}^{[m]}(x).\qquad (10.2.34)$$

将(10.2.34)代入(10.2.33)，消去 $P_k^{[m-1]}(x)$，有

$$(k-m+1)P_{k+1}^{[m]}(x)-(2k+1)xP_k^{[m]}(x)+(k+m)P_{k-1}^{[m]}(x)=0,$$

两边乘 $(1-x^2)^{m/2}$，利用(10.2.7)，得

$$(2k+1)xP_k^m(x)=(k+m)P_{k-1}^m(x)+(k-m+1)P_{k+1}^m(x).\quad (k\geqslant 1)$$

(10.2.35)

这就是连带勒让德函数的一个递推公式

(10.1.66)对 x 求导 m 次

$$(2k+1)P_k^{[m]}(x)=P_{k+1}^{[m+1]}(x)-P_{k-1}^{[m+1]}(x)$$

两边乘 $(1-x^2)^{(m+1)/2}$，得

$$(2k+1)(1-x^2)^{1/2}P_k^m(x)=P_{k+1}^{m+1}(x)-P_{k-1}^{m+1}(x).\quad (k\geqslant 1)\qquad (10.2.36)$$

(10.2.36)是连带勒让德函数的另一个递推公式.

利用勒让德多项式的递推公式(10.1.69)，即

$$(x^2-1)P_k^1(x)=kxP_k(x)-kP_{k-1}(x),\quad (k\geqslant 1) \tag{10.1.69}$$

结合(10.1.63)、(10.1.66)还可导出连带勒让德函数的其它的递推公式，如

$$(2k+1)(1-x^2)^{1/2}P_k^m(x)=(k+m)(k+m-1)P_{k-1}^{m-1}(x)$$
$$-(k-m+2)(k-m+1)P_{k+1}^{m-1}(x),(k\geqslant 1) \tag{10.2.37}$$

和
$$(2k+1)(1-x^2)\frac{dP_k^m(x)}{dx}$$
$$-(k+1)(k+m)P_{k-1}^m(x)$$
$$-k(k-m+1)P_{k-1}^m(x),\quad (k\geqslant 1) \tag{10.2.38}$$

(10.2.35)、(10.2.36)、(10.2.37)和(10.2.38)就是连带勒让德函数的四个基本的递推公式，其它的递推公式都可从它们导出.

§10.3 一般的球函数

(一) 球函数

(1) 球函数的表达式

球函数方程(9.1.3)的解称为**球函数**. 一般情况下，球函数方程的分离变数的解是

$$Y_l^m(\theta,\varphi)=P_l^m(\cos\theta)\begin{Bmatrix}\sin m\varphi\\ \cos m\varphi\end{Bmatrix}\quad \begin{pmatrix}m=0,1,2,\cdots,l\\ l=0,1,2,3,\cdots\end{pmatrix}, \tag{10.3.1}$$

记号{ }表示其中列举的函数是线性独立的，可任取其一，l 叫作球函数的**阶**.

(2) 复数形式的球函数

线性独立的 l 阶球函数共有 $2l+1$ 个. 这是因为对应于 $m=0$，有一个球函数 $P_l(\cos\theta)$；对应于 $m=1,2,\cdots,l$ 则各有两个球函数即 $P_l^m(\cos\theta)\sin m\varphi$ 和 $P_l^m(\cos\theta)\cos m\varphi$.

根据欧拉公式 $\cos m\varphi+i\sin m\varphi=e^{im\varphi}$，$\cos m\varphi-i\sin m\varphi=e^{-im\varphi}$，(10.3.1)完全可以重新组合为

$$Y_l^m(\theta,\varphi)=P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{im\varphi}\begin{pmatrix}m=-l,-l+1,\cdots,0,1,\cdots,l\\ l=0,1,2,3,\cdots\end{pmatrix}. \tag{10.3.2}$$

在(10.3.2)之中，独立的 l 阶球函数还是 $2l+1$ 个. 从(9.1.7)直

到(10.3.1)，m 都是指的正整数. 在(10.3.2)中，m 既可以是正整数，也可以是负整数. 对于负整数 m，(10.3.2)本来也可用 $P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi}$，即 $P_l^{-|m|}(\cos\theta)e^{im\varphi}$，但习惯上用 $P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{im\varphi}$，[参看(10.2.15)，$P_l^{-|m|}(\cos\theta)$ 与 $P_l^{|m|}(\cos\theta)$ 是线性相关的，它们只相差常数因子.]

(二) 球函数的正交关系

球函数(10.3.1)中的任意两个在球面 S 上(即 $0\leqslant\theta\leqslant\pi, 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$)**正交**，

$$\iint_S Y_l^m(\theta,\varphi)Y_k^n(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi$$
$$= \int_0^\pi P_l^m(\cos\theta)P_k^n(\cos\theta)\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}\begin{Bmatrix}\sin m\varphi\\ \cos m\varphi\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\sin n\varphi\\ \cos n\varphi\end{Bmatrix}d\varphi$$
$$= \int_{-1}^{+1} P_l^m(x)P_k^n(x)dx\int_0^{2\pi}\begin{Bmatrix}\sin m\varphi\\ \cos m\varphi\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\sin n\varphi\\ \cos n\varphi\end{Bmatrix}d\varphi = 0$$
$$(m\neq n \text{ 或 } l\neq k). \quad (10.3.3)$$

这是很容易验证的. 事实上，(5.1.4)指出，只要 $m\neq n$，上式中对 φ 的积分为零；而如果 $m=n$，(10.2.18)指出对 x 的积分为零，或者说，(10.2.19)指出对 θ 的积分为零.

请读者自己验证，球函数(10.3.2)中的任意两个也在球面上正交，

$$\iint_S Y_l^m(\theta,\varphi)Y_k^n(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi$$
$$= \int_0^\pi P_l^{|m|}(\cos\theta)P_k^{|n|}(\cos\theta)\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}e^{im\varphi}[e^{in\varphi}]^* d\varphi$$
$$= \int_{-1}^{+1} P_l^{|m|}(x)P_k^{|n|}(x)dx\int_0^{2\pi}e^{im\varphi}[e^{in\varphi}]^* d\varphi = 0.$$
$$(m\neq n \text{ 或 } l\neq k) \quad (10.3.4)$$

(三) 球函数的模

现在计算球函数(10.3.1)的模 N_l^m.

$$(N_l^m)^2 = \iint_S [Y_l^m(\theta,\varphi)]^2\sin\theta d\theta d\varphi = \int_0^\pi [P_l^m(\cos\theta)]^2\times\sin\theta d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\begin{Bmatrix}\sin^2 m\varphi\\ \cos^2 m\varphi\end{Bmatrix}d\varphi = \int_{-1}^{+1}[P_l^m(x)]^2 dx\int_0^{2\pi}\begin{Bmatrix}\sin^2 m\varphi\\ \cos^2 m\varphi\end{Bmatrix}d\varphi.$$

读者已经熟悉

$$\int_0^{2\pi}\sin^2 m\varphi\, d\varphi = \pi(m\neq 0),$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^2 m\varphi\, d\varphi = \pi\delta_m, \delta_m = \begin{cases}2(m=0),\\ 1(m\neq 0).\end{cases}$$

(10.2.20)给出

$$\int_{-1}^{+1}[P_l^m(x)]^2 dx = \frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}.$$

因此，

$$(N_l^m)^2 = \frac{2\pi\delta_m}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}.$$

于是，球函数(10.3.1)的模

$$N_l^m = \sqrt{\frac{2\pi\delta_m}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}}. \tag{10.3.5}$$

因为

$$\int_0^{2\pi}e^{im\varphi}[e^{im\varphi}]^* d\varphi = \int_0^{2\pi}1 d\varphi = 2\pi,$$

从而复数形式的球函数(10.3.2)的模 N_l^m 的平方

$$\begin{aligned}(N_l^m)^2 &= \iint_S [Y_l^m(\theta,\varphi)[Y_l^m(\theta,\varphi)]^* \sin\theta d\theta d\varphi\\ &= \int_0^{\pi}[P_l^{|m|}(\cos\theta)]^2\sin\theta d\theta\cdot\int_0^{2\pi}e^{im\varphi}[e^{im\varphi}]^* d\varphi\\ &= \frac{2}{2l+1}\cdot\frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!}\cdot 2\pi\end{aligned}$$

于是，复数形式的球函数(10.3.2)的模

$$N_l^m = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}\cdot\frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!}}. \tag{10.3.6}$$

（四）球面上的函数的广义傅里叶级数

定义在球面 S(即 $0\leqslant\theta\leqslant\pi, 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$)上的函数 $f(\theta,\varphi)$ 可用

球函数(10.3.1)或(10.3.2)展开成二重广义傅里叶级数.

现以球函数(10.3.1)为基,把 $f(\theta,\varphi)$进行展开.分两步进行.首先,把 $f(\theta,\varphi)$对 φ 展为傅里叶级数

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}[A_m(\theta)\cos m\varphi+B_m(\theta)\sin m\varphi]. \quad (10.3.7)$$

这里 θ 作为参数出现于傅里叶系数 A_m 和 B_m 之中,

$$\begin{cases}A_m(\theta)=\dfrac{1}{\pi\delta_m}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(\theta,\varphi)\cos m\varphi\,\mathrm{d}\varphi,\\ B_m(\theta)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(\theta,\varphi)\sin m\varphi\,\mathrm{d}\varphi,\end{cases} \quad (10.3.8)$$

又以 $\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)$为基,在区间$[0,\pi]$上把 $A_m(\theta)$和 $B_m(\theta)$展开.按照(10.2.22),

$$\begin{cases}A_m(\theta)=\displaystyle\sum_{l=m}^{\infty}A_l^m\mathrm{P}_l^m(\cos\theta),\\ B_m(\theta)=\displaystyle\sum_{l=m}^{\infty}B_l^m\mathrm{P}_l^m(\cos\theta),\end{cases} \quad (10.3.9)$$

式中 l 从 m 开始是因为如若 $l<m$,则 $\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)=0$.系数 A_l^m 和 B_l^m 为

$$\begin{cases}A_l^m=\dfrac{2l+1}{2}\cdot\dfrac{(l-m)!}{(l+m)!}\displaystyle\int_0^{\pi}A_m(\theta)\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta\\ \quad=\dfrac{2l+1}{2\pi\delta_m}\cdot\dfrac{(l-m)!}{(l+m)!}\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta,\varphi)\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\cos m\varphi\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi,\\ B_l^m=\dfrac{2l+1}{2}\cdot\dfrac{(l-m)!}{(l+m)!}\displaystyle\int_0^{\pi}B_m(\theta)\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta\\ \quad=\dfrac{2l+1}{2\pi}\cdot\dfrac{(l-m)!}{(l+m)!}\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta,\varphi)\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\sin m\varphi\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi.\end{cases}$$

(10.3.10)

把(10.3.9)代入(10.3.7)即得 $f(\theta,\varphi)$在球面 S 上的展开式

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty}[A_l^m\cos m\varphi+B_l^m\sin m\varphi]\mathrm{P}_l^m(\cos\theta).$$

(10.3.11)

式中两个累加号的次序也可交换，那就应当写成$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}$. 展开系数$A_l^m$和$B_l^m$的计算公式如(10.3.10)所示.

若以球函数(10.3.2)为基，把$f(\theta,\varphi)$进行展开，则对φ的展开将是复数形式的傅里叶级数. 请读者自己验证，这时$f(\theta,\varphi)$在球面S上的展开式为

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}C_l^m \mathrm{P}_l^{|m|}(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}, \qquad (10.3.12)$$

其中系数C_l^m的计算公式是

$$C_l^m=\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta,\varphi)\mathrm{P}_l^{|m|}(\cos\theta)[\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}]^*\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi. \qquad (10.3.13)$$

例 1 用(10.3.1)的球函数把下列函数展开. ①$\sin\theta\cos\varphi$, ②$\sin\theta\sin\varphi$.

解 ①先把$\sin\theta\cos\varphi$对φ展开为傅里叶级数，其实，这已经是傅里叶级数了，只不过这级数只有$m=1$的一个单项$\cos\varphi$，其系数为$\sin\theta$.

第二步，以$\mathrm{P}_l^1(\cos\theta)\ (l=1,2,\cdots)$为基，在$[0,\pi]$区间上把$\sin\theta$展开，其实，这也已经展开成广义傅里叶级数了，只不过这级数只有$l=1$的一个单项$\mathrm{P}_1^1(\cos\theta)=\sin\theta$.

这样，$\sin\theta\cos\varphi=\mathrm{P}_1^1(\cos\theta)\cos\varphi$正是(10.3.1)所列举的球函数之一，无需再作展开.

②同理，$\sin\theta\sin\varphi=\mathrm{P}_1^1(\cos\theta)\sin\varphi$也是(10.3.1)所列举的球函数之一，无需再作展开.

例 2 用(10.3.1)的球函数把$f(\theta,\varphi)=3\sin^2\theta\cos^2\varphi-1$展开.

解 先把$f(\theta,\varphi)$对φ展开为傅里叶级数，这可以如下简便地完成.

$$\begin{aligned} f(\theta,\varphi)&=\frac{3}{2}\sin^2\theta(1+\cos2\varphi)-1 \\ &=\left(\frac{3}{2}\sin^2\theta-1\right)+\frac{3}{2}\sin^2\theta\cos2\varphi. \end{aligned}$$

这傅里叶级数只含有两项：一项是 $m=2$ 的 $\cos 2\varphi$，其系数 $f_2(\theta)=(3/2)\sin^2\theta$；另一项是 $m=0$ 的 1，其系数 $f_0(\theta)=(3/2)\sin^2\theta-1$.

第二步，把 $f_2(\theta)=(3/2)\sin^2\theta$ 按 $\mathrm{P}_l^2(\cos\theta)$ $(l=2,3,\cdots)$ 展开. 利用(10.2.12)，知道 $(3/2)\sin^2\theta=(1/2)\mathrm{P}_2^2(\cos\theta)$，这就是展开结果，只含 $l=2$ 的一项. 此外还需把 $f_0(\theta)=(3/2)\sin^2\theta-1$ 按 $\mathrm{P}_l^0(\cos\theta)$ 即 $\mathrm{P}_l(\cos\theta)$ $(l=0,1,2,\cdots)$ 展开，利用 § 10.1 列出的前几个勒让德多项式的表达式，方便地得到

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}\sin^2\theta-1&=\frac{3}{2}(1-\cos^2\theta)-1\\&=-\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1)\\&=-\frac{1}{2}(3x^2-1)\\&=-\mathrm{P}_2(x)=-\mathrm{P}_2(\cos\theta).\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}f(\theta,\varphi)&=3\sin^2\theta\cos^2\varphi-1\\&=-\mathrm{P}_2(\cos\theta)+\frac{1}{2}\mathrm{P}_2^2(\cos\theta)\cos 2\varphi.\end{aligned}\qquad(10.3.14)$$

（五）拉普拉斯方程的非轴对称定解问题

拉普拉斯方程在球形区域的定解问题，如果是非轴对称的，问题与 φ 有关，因而需用一般的球函数.

例 3 计算偶极子的电场中的电势.

解 读者在初等电学里已熟悉电偶极子. 两个点电荷，电量相等而符号相反，两者相距很近，就构成**偶极子**，用 $\boldsymbol{s}_1$ 表示点电荷 $+q$ 相对于点电荷 $-q$ 的矢径，$q\boldsymbol{s}_1$ 叫作偶极子的**偶极矩**，记作 $\boldsymbol{p}_1$，

$$\boldsymbol{p}_1=q\boldsymbol{s}_1.$$

先研究 $\boldsymbol{s}_1$ 沿 x 轴的情况，即 $p_{1x}=qs_{1x}$，$p_{1y}=0$，$p_{1z}=0$. 把坐标原点取在偶极子所在处，或者更具体些，取在点电荷 $-q$ 所在处. 于是，两个点电荷的坐标分别是 $(s_{1x},0,0)$ 和 $(0,0,0)$. 从初等电学知道电势

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{(x-s_{1x})^2+y^2+z^2}}-\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right].$$

引用记号 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$f(x,y,z)=q/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，由于 $\boldsymbol{s}_1$ 很小，故其分量的绝对值 $|s_{1x}|\ll 1$. 记 $\Delta x=-s_{1x}$，则上式改写为

$$\begin{aligned}u(x,y,z)&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}[f(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)]\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\Delta x=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{q}{r}\right)\cdot s_{1x}\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}qs_{1x}\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1x}\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.\end{aligned}$$

改用球坐标，

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1x}\frac{\sin\theta\cos\varphi}{r^2}.$$

引用例 1 的答案，

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1x}\frac{1}{r^2}\mathrm{P}_1^1(\cos\theta)\cos\varphi.$$

同理，如果 $\boldsymbol{s}_1$ 沿 y 轴，则

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1y}\frac{y}{r^3}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1y}\frac{1}{r^2}\mathrm{P}_1^1(\cos\theta)\sin\varphi.$$

如果 $\boldsymbol{s}_1$ 沿 z 轴，则

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1z}\frac{z}{r^3}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1z}\frac{1}{r^2}\mathrm{P}_1(\cos\theta).$$

一般情况下，偶极子的电场中的电势

$$\begin{aligned}u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}[&p_{1x}\mathrm{P}_1^1(\cos\theta)\cos\varphi\\&+p_{1y}\mathrm{P}_1^1(\cos\theta)\sin\varphi+p_{1z}\mathrm{P}_1(\cos\theta)].\end{aligned}$$

[ ]里是一阶球函数.

例 4 半径为 r_0 的球形区域内部没有电荷，球面上的电势为 $u_0\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi$，$u_0$ 为常数，求球形区域内部的电势分布.

解 这是静电场电势分布问题，定解问题为

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \qquad (r < r_0) & (10.3.15) \\ u|_{r=r_0} = u_0 \sin^2\theta \cos\varphi \sin\varphi, & (10.3.16) \\ u|_{r=0} \text{有限}. & (10.3.17) \end{cases}$$

由于球面上边界条件含有 φ 的函数，并非轴对称，因而问题与 φ 有关，其解也必与 φ 有关，需用一般的球函数.

根据(9.1.4)和(10.3.1)，拉普拉斯方程在非轴对称情况下的一般解为

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty} r^l [A_l^m \cos m\varphi + B_l^m \sin m\varphi] \mathrm{P}_l^m(\cos\theta) + \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} [C_l^m \cos m\varphi + D_l^m \sin m\varphi] \mathrm{P}_l^m(\cos\theta). \tag{10.3.18}$$

考虑到自然边界条件(10.3.17)，必须弃去 $1/r^{l+1}$，即取 $C_l^m = 0, D_l^m = 0$，于是

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty} r^l [A_l^m \cos m\varphi - B_l^m \sin m\varphi] \mathrm{P}_l^m(\cos\theta). \tag{10.3.19}$$

把(10.3.19)代入非齐次边界条件(10.3.16)，有

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty} r_0^l [A_l^m \cos m\varphi + B_l^m \sin m\varphi] \mathrm{P}_l^m(\cos\theta) = u_0 \sin^2\theta \cos\varphi \sin\varphi. \tag{10.3.20}$$

利用(10.2.12)可把上式右边按球函数(10.3.1)进行展开，有

$$u_0 \sin^2\theta \cos\varphi \sin\varphi = \frac{1}{6} u_0 (3\sin^2\theta) \sin 2\varphi = \frac{1}{6} u_0 \mathrm{P}_2^2(\cos\theta) \sin 2\varphi \tag{10.3.21}$$

(10.3.21)已是广义傅里叶级数，不过只含有球函数 $\mathrm{P}_2^2(\cos\theta)\sin 2\varphi$ 的单项，把(10.3.21)代入(10.3.20)，两边比较系数，得

$$\begin{cases} r_0^2 B_2^2 = \dfrac{1}{6} u_0, \\ r_0^l B_l^m = 0, \\ r_0 A_l^m = 0. \end{cases} \quad \text{从而} \quad \begin{cases} B_2^2 = \dfrac{u_0}{6r_0^2}, & (l=2, m=2) \\ B_l^m = 0, & (l \neq 2, \text{且 } m \neq 2) \\ A_l^m = 0. & (l, m = 0, 1, 2, \cdots) \end{cases}$$

因此，

$$u(r,\theta,\varphi) = \frac{u_0}{6r_0^2} r^2 P_2^2(\cos\theta)\sin 2\varphi. \tag{10.3.22}$$

例 5 在半径为 r_0 的球形区域的外部求解

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (r > r_0) & (10.3.23) \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r_0} = u_0\left(\sin^2\theta\sin^2\varphi - \dfrac{1}{3}\right), & & (10.3.24) \\ u\big|_{r\to\infty} = \text{有限值}. & & (10.3.25) \end{cases}$$

解 跟例 3 一样，问题与 φ 有关，解中含有一般的球函数，其一般解亦为(10.3.18)，考虑到自然边界条件(10.3.25)，必须弃去 r^l，即取 $A_l^m=0, B_l^m=0$，于是

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}}[C_l^m\cos m\varphi + D_l^m\sin m\varphi]P_l^m(\cos\theta). \tag{10.3.26}$$

把(10.3.26)代入(10.3.24)，有

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty} -\frac{(l+1)}{r_0^{l+2}}[C_l^m\cos m\varphi + D_l^m\sin m\varphi]P_l^m(\cos\theta)$$
$$= u_0\left(\sin^2\theta\sin^2\varphi - \frac{1}{3}\right). \tag{10.3.27}$$

把(10.3.27)的右边按球函数(10.3.1)展开，参照例 2 的步骤有

$$u_0\left(\sin^2\theta\sin^2\varphi - \frac{1}{3}\right)$$
$$= \frac{u_0}{3}\left[\frac{3}{2}\sin^2\theta(1-\cos 2\varphi) - 1\right]$$
$$= \frac{u_0}{3}\left[-\frac{1}{2}(3\sin^2\theta)\cos 2\varphi + \frac{3}{2}(1-\cos^2\theta) - 1\right]$$
$$= \frac{u_0}{3}\left[-\frac{1}{2}P_2^2(\cos\theta)\cos 2\varphi - \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)\right]$$

$$= \frac{u_0}{3}\left[-\frac{1}{2}P_2^2(\cos\theta)\cos 2\varphi - P_2(\cos\theta) \right], \qquad (10.3.28)$$

把(10.3.28)代入(10.3.27)，两边比较系数，得

$$\begin{cases} -\frac{3}{r_0^4}C_2^0 = -\frac{u_0}{3}, \\ -\frac{3}{r_0^4}C_2^2 = -\frac{u_0}{6}, \\ -\frac{(l+1)}{r_0^{l+2}}C_l^m = 0, \\ -\frac{(l+1)}{r_0^{l+2}}D_l^m = 0. \end{cases}$$

从而

$$\begin{cases} C_2^0 = \frac{1}{9}u_0 r_0^4, \\ C_2^2 = \frac{1}{18}u_0 r_0^4, \\ C_l^m = 0, (l \neq 2, m \neq 0, 2. l, m = 1, 3, \cdots) \\ D_l^m = 0. \quad (l, m = 0, 1, 2, \cdots) \end{cases}$$

因此，

$$u(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{9}u_0 r_0^4 \cdot \frac{1}{r^3}P_2(\cos\theta) + \frac{1}{18}u_0 r_0^4 \cdot \frac{1}{r^3}P_2^2(\cos\theta)\cos 2\varphi. \qquad (10.3.29)$$

（六）正交归一化的球函数

物理学中常常用正交归一化的球函数，定义如下①：

$$Y_{lm}(\theta,\varphi) = \frac{1}{(N_l^m)}Y_l^m(\theta,\varphi)$$

$$= \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi} \cdot \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{im\varphi}.$$

---

① 有的书上把正交归一化的球函数定义为 $Y_{lm}(\theta,\varphi) = \frac{1}{N_l^m}(-1)^m Y_l^m(\theta,\varphi)$，比(10.3.30)多一个因子$(-1)^m$.

$$(l=0,1,2,\cdots;m=-l,-l+1,\cdots 0,\cdots l-1,l)$$

(10.3.30)

于是，根据(10.3.4)和(10.3.6)，有

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}Y_{lm}(\theta,\varphi)Y_{kn}^*(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi$$

$$=\frac{1}{(N_l^m)(N_k^n)}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}P_l^{|m|}(\cos\theta)P_k^{|n|}(\cos\theta)e^{im\varphi}\cdot[e^{in\varphi}]^*\sin\theta d\theta d\varphi$$

$$=\frac{1}{(N_l^m)(N_k^n)}\frac{4\pi}{2l+1}\cdot\frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!}\delta_{lk}\delta_{mn}=\delta_{lk}\delta_{mn}. \quad (10.3.31)$$

(10.3.31)就是球函数 $Y_{lm}(\theta,\varphi)$的正交归一关系.

球面上的函数 $f(\theta,\varphi)$可用正交归一球函数 $Y_{lm}(\theta,\varphi)$展开，

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}C_{lm}Y_{lm}(\theta,\varphi), \quad (10.3.32)$$

其中广义傅里叶系数 C_{lm}为

$$C_{lm}=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(\theta,\varphi)Y_{lm}^*(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi. \quad (10.3.33)$$

（七）加法公式

把勒让德多项式 $P_l(\cos\Theta)$用一般的球函数 $Y_l^m(\theta,\varphi)$展开为广义傅里叶级数，

$$P_l(\cos\Theta)=\sum_{m=0}^{l}\frac{2}{\delta_m}\cdot\frac{(l-m)!}{(l+m)!}(\cos m\varphi_0\cos m\varphi+\sin m\varphi_0\sin m\varphi)$$

$$P_l^m(\cos\theta_0)P_l^m(\cos\theta). \quad (10.3.34)$$

(10.3.34)称为球函数的**加法公式**.式中的 Θ 见后面的(10.3.36).

下面利用球面上单位正电荷的电荷密度函数来推导球函数的加法公式.

如图 10-6 所示，半径 $r=1$ 的单位球面上 P 点、M 点的球坐标分别为(θ_0,φ_0)，(θ,φ). 若仅在 P 点有一单位电量的正电荷，则球面上的电荷密度函数可以记为

$$\rho(\theta,\varphi)=1\cdot\delta(x-x_0)\delta(\varphi-\varphi_0)=\delta(\cos\theta-\cos\theta_0)\delta(\varphi-\varphi_0). \quad (10.3.35)$$

把极轴正向旋转到 OP 方向，得到新的坐标系.记 M 点新的球坐标为(Θ,Φ).这样，单位矢量 OP 的老的和新的直角坐标分别是$(\sin\theta_0\cos\varphi_0,\sin\theta_0\sin\varphi_0,\cos\theta_0)$和$(0,0,1)$，单位矢量 OM 的老的和新的直角坐标分别是$(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta)$和$(\sin\Theta\cos\Phi,\sin\Theta\sin\Phi,\cos\Theta)$. 单位矢量 OP 与 OM 的标量积

$\boldsymbol{OP}\cdot\boldsymbol{OM}$ 跟坐标系的选取无关，因而

$$\cos\Theta=\cos\theta_0\cos\theta+\sin\theta_0\sin\theta\cos(\varphi-\varphi_0). \tag{10.3.36}$$

(10.3.36)式建立了新老球坐标之间的联系.

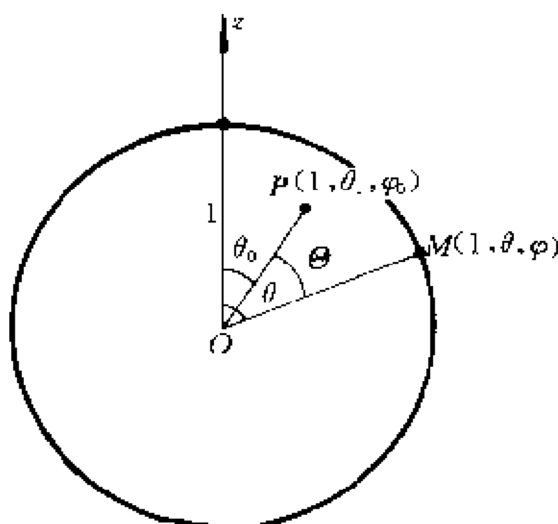


图 10-6

由于点电荷位于新极轴上，电荷密度函数在新的球坐标系中是轴对称的，$\rho(\Theta)=C\delta(\cos\Theta-\cos0)=C\delta(\cos\Theta-1)$，$C$ 为常数，待定. 电荷密度函数对整个球面的积分应为球面上的总电量 1，即

$$1=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\rho(\Theta)\sin\Theta\mathrm{d}\Theta\mathrm{d}\Phi=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}C\delta(\cos\Theta-1)\mathrm{d}(\cos\Theta)\mathrm{d}\varphi=C2\pi.$$

于是，$C=1/2\pi$.

$$\rho(\Theta)=\frac{1}{2\pi}\delta(\cos\Theta-1). \tag{10.3.37}$$

把函数 $\rho(\theta,\varphi)$ 在单位球面上用 (10.3.11) 和 (10.3.10) 按球函数 (10.3.1) 展开.

$$\begin{aligned}\rho(\theta,\varphi)&=\delta(\cos\theta-\cos\theta_0)\delta(\varphi-\varphi_0)\\&=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}[A_l^m\cos m\varphi+B_l^m\sin m\varphi]\mathrm{P}_l^m(\cos\theta),\\A_l^m&=\frac{2l+1}{2\pi\delta_m}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\int_0^{\pi}\delta(\cos\theta\quad\cos\theta_0)\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\mathrm{d}(\cos\theta)\\&\quad\times\int_0^{2\pi}\delta(\varphi-\varphi_0)\cos m\varphi\,\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{2l+1}{2\pi\delta_m}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\mathrm{P}_l^m(\cos\theta_0)\cos m\varphi_0,\\B_l^m&=\frac{2l+1}{2\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\int_0^{\pi}-\delta(\cos\theta-\cos\theta_0)\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\mathrm{d}(\cos\theta)\end{aligned}$$

$$\times \int_0^{2\pi} \delta(\varphi - \varphi_0)\sin m\varphi d\varphi$$

$$= \frac{2l+1}{2\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(\cos\theta_0)\sin m\varphi_0.$$

这样，展开的结果是

$$\rho(\theta,\varphi) = \delta(\cos\theta - \cos\theta_0)\delta(\varphi - \varphi_0) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+1}{2\pi}\sum_{m=0}^{l}\frac{1}{\delta_m}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}$$
$$\times(\cos m\varphi_0\cos m\varphi + \sin m\varphi_0\sin m\varphi)P_l^m(\cos\theta_0)P_l^m(\cos\theta). \qquad (10.3.38)$$

另外，把函数 $\rho(\Theta)$用(10.1.19)按勒让德多项式 $P_l(\cos\theta)$展开，

$$\rho(\Theta) = \frac{1}{2\pi}\delta(\cos\Theta - 1) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l P_l(\cos\Theta),$$

$$f_l = \frac{2l+1}{2}\int_0^{\pi}\frac{1}{2\pi}\delta(\cos\Theta - 1)P_l(\cos\Theta)\sin\Theta d\Theta$$
$$= \frac{2l+1}{2}\int_0^{\pi} - \frac{1}{2\pi}\delta(\cos\Theta - 1)P_l(\cos\Theta)d(\cos\Theta)$$
$$= \frac{2l+1}{4\pi}P_l(1) = \frac{2l+1}{4\pi}.$$

这样，展开的结果是

$$\rho(\Theta) = \frac{1}{2\pi}\delta(\cos\Theta - 1) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+1}{4\pi}P_l(\cos\Theta). \qquad (10.3.39)$$

$\rho(\theta,\varphi)$和 $\rho(\Theta)$是同一电荷密度函数在不同球坐标系中的表达式，自然相等，其相应的展开式(10.3.38)和(10.3.39)也应该彼此相等，

$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+1}{4\pi}P_l(\cos\Theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+1}{2\pi}\sum_{m=0}^{l}\frac{1}{\delta_m}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}$$
$$\times(\cos m\varphi_0\cos m\varphi + \sin m\varphi_0\sin m\varphi)P_l^m(\cos\theta_0)P_l^m(\cos\theta). \qquad (10.3.40)$$

我们知道，球函数方程是从拉普拉斯方程或亥姆霍兹方程把变数 r 分离出去而得到的. 拉普拉斯方程和亥姆霍兹方程中的算符 Δ 即 $\nabla\cdot\nabla$ 具有确定的意义，跟坐标的选择无关. “径向变数”r 则跟坐标系的旋转无关. 因此，在坐标系旋转时，球函数方程不变. 换句话说，老的坐标系旋转到新的坐标系时，l 阶球函数仍保持为 l 阶，所以(10.3.40)两边的相同 l 阶的球函数项彼此相等，约去常数因子$(2l+1)/(2\pi)$，就得球函数的加法公式(10.3.34).

如果改用展开公式(10.3.12)以代替(10.3.11)，则球函数的加法公式是

$$P_l(\cos\Theta) = \sum_{m=-l}^{+l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(\cos\theta_0)P_l^m(\cos\theta)e^{im(\varphi-\varphi_0)}. \qquad (10.3.41)$$

(八) 四极子、多极子

例 6 两个偶极子，偶极矩相等而方向相反，两者相距很近，就构成四极子. 计算四极子的电场中的电势.

解 把这两个偶极子的偶极矩记作 $\boldsymbol{p}_1$ 和 $-\boldsymbol{p}_1$，前者相对于后者的矢径记作 $\boldsymbol{s}_2$.

先计算 $\boldsymbol{p}_1$ 和 $\boldsymbol{s}_2$ 都沿 x 轴的情况，$p_{1y}=p_{1z}=0$，$s_{2y}=s_{2z}=0$. 把坐标原点取在四极子所在处，或者更具体些，取在偶极矩为 $-\boldsymbol{p}_1$ 的偶极子处. 于是，两个偶极子的坐标分别是 $(s_{2x},0,0)$ 和 $(0,0,0)$. 引用例 3 的结果，电势

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1x}\left\{\frac{x-s_{2x}}{[(x-s_{2x})^2+y^2+z^2]^{3/2}}-\frac{x}{[x^2+y^2+z^2]^{3/2}}\right\}$$

引用记号 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$f_1(x,y,z)=x/[x^2+y^2+z^2]^{3/2}$，由于 s_2 很小，故其分量的绝对值 $|s_{2x}|\ll 1$，记 $\Delta x=-s_{2x}$，则上式改写为，

$$\begin{aligned}u(x,y,z)&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1x}[f_1(x+\Delta x,y,z)-f_1(x,y,z)]\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1x}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x}\cdot\Delta x=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right)\cdot s_{2x}\\&=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1x}\cdot\frac{r^2-3x^2}{r^5}s_{2x}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1x}s_{2x}\frac{3\sin^2\theta\cos^2\varphi-1}{r^3}.\end{aligned}$$

引用例 2 的答案，则

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{2xx}\frac{1}{r^3}\left[\frac{1}{2}\mathrm{P}_2^2(\cos\theta)\cos 2\varphi-\mathrm{P}_2(\cos\theta)\right],$$

式中 $p_{2xx}=p_{1x}s_{2x}$ 叫作**四极矩**.

同理，$\boldsymbol{p}_1$ 沿 x 轴，$\boldsymbol{s}_2$ 沿 y 轴，则

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{2xy}\frac{3xy}{r^5}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{2xy}\frac{3\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi}{r^3}.$$

式中 $p_{2xy}=p_{1x}s_{2y}$ 叫作**四极矩**. 引用例 4 的答案，则

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{2xy}\frac{1}{r^3}\left[\frac{1}{2}\mathrm{P}_2^2(\cos\theta)\sin 2\varphi\right].$$

$\boldsymbol{p}_1$ 沿 x 轴，$\boldsymbol{s}_2$ 沿 z 轴，则

$$\begin{aligned}u(x,y,z)&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1x}s_{2z}\frac{3xz}{r^5}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1x}s_{2z}\frac{3\sin\theta\cos\theta\cos\varphi}{r^3}\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1x}s_{2z}\frac{1}{r^3}[\mathrm{P}_2^1(\cos\theta)\cos\varphi].\end{aligned}$$

$\boldsymbol{p}_1$ 沿 y 轴，$\boldsymbol{s}_2$ 沿 x 轴，则

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1y}s_{2x}\frac{3xy}{r^5}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1y}s_{2x}\frac{1}{r^3}\left[\frac{1}{2}\mathrm{P}_2^2(\cos\theta)\sin 2\varphi\right].$$

$\boldsymbol{p}_1$ 沿 y 轴，s_2 沿 y 轴，则

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1y}s_{2y}\frac{3y^2-r^2}{r^5}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1y}s_{2y}\frac{3\sin^2\theta\sin^2\varphi-1}{r^3},$$

引用例 5 的答案，则

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1y}s_{2y}\frac{1}{r^3}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{P}_2^2(\cos\theta)\cos 2\varphi-\mathrm{P}_2(\cos\theta)\right].$$

$\boldsymbol{p}_1$ 沿 y 轴，s_2 沿 z 轴，则

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1y}s_{2z}\frac{3yz}{r^5}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1y}s_{2z}\frac{1}{r^3}[\mathrm{P}_2^1(\cos\theta)\sin\varphi].$$

$\boldsymbol{p}_1$ 沿 z 轴，s_2 沿 x 轴，则

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1z}s_{2x}\frac{3xz}{r^5}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1z}s_{2x}\frac{1}{r^3}[\mathrm{P}_2^1(\cos\theta)\cos\varphi].$$

$\boldsymbol{p}_1$ 沿 z 轴，s_2 沿 y 轴，则

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1z}s_{2y}\frac{3yz}{r^5}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1z}s_{2y}\frac{1}{r^3}[\mathrm{P}_2^1(\cos\theta)\sin\varphi].$$

$\boldsymbol{p}_1$ 沿 z 轴，s_2 沿 z 轴，则

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1z}s_{2z}\frac{3z^2-r^2}{r^5}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p_{1z}s_{2z}\frac{1}{r^3}[2\mathrm{P}_2(\cos\theta)].$$

这些答案的[　　]里全是二阶球函数. 其实，这些电势是拉普拉斯方程的解，拉普拉斯方程的解如表为$\frac{1}{r^3}$[　　]，则[　　]里必定是二阶球函数[参看(9.1.4)和(9.1.3)].

一般情况下，四极子的电场的电势

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\mathbf{Tr}\begin{bmatrix}p_{1x}s_{2x} & p_{1x}s_{2y} & p_{1x}s_{2z}\\ p_{1y}s_{2x} & p_{1y}s_{2y} & p_{1y}s_{2z}\\ p_{1z}s_{2x} & p_{1z}s_{2y} & p_{1z}s_{2z}\end{bmatrix}$$

$$\times\begin{bmatrix}-P_2+\frac{1}{2}P_2^2\cos 2\varphi & \frac{1}{2}P_2^2\sin 2\varphi & P_2^1\cos\varphi\\ \frac{1}{2}P_2^2\sin 2\varphi & -P_2-\frac{1}{2}P_2^2\cos 2\varphi & P_2^1\sin\varphi\\ P_2^1\cos\varphi & P_2^1\sin\varphi & 2P_2\end{bmatrix}$$

记号 **Tr** 表示迹(trace)，就是说，取(后面相乘所得的)矩阵的对角线元素之和.

上式经整理后可表为

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}[(-p_{1x}s_{2x}-p_{1y}s_{2y}+2p_{1z}s_{2z})\mathrm{P}_2(\cos\theta)$$

$$+(p_{1x}s_{2z}+p_{1z}s_{2x})\mathrm{P}_2^1(\cos\theta)\cos\varphi$$

$$+(p_{1y}s_{2z}+p_{1z}s_{2y})\mathrm{P}_2^1(\cos\theta)\sin\varphi$$

$$+\frac{1}{2}(p_{1x}s_{2y}+p_{1y}s_{2x})\mathrm{P}_2^2(\cos\theta)\sin 2\varphi$$

$$+\frac{1}{2}(p_{1x}s_{2x}-p_{1y}s_{2y})\mathrm{P}_2^2(\cos\theta)\cos 2\varphi].$$

例 7 类推下去，还有八极子、十六极子、……等所谓多极子. 2^n 极子的电场的电势必可表为$\frac{1}{r^{n+1}}$[n 阶球函数]. 这里证明电学里很重要的一个推论：在区域 T 中分布着电荷，对区域外远处的电场来说，区域 T 里的电荷可以用一系列的多极子代替.

证 在区域 T 里有电荷分布，其密度为 $4\pi\varepsilon_0\rho(r_0,\theta_0,\varphi_0)$，其中 r_0,θ_0 和 φ_0 是电荷所在处的坐标. 空间中坐标为(r,θ,φ)处的电势应为

$$u(r,\theta,\varphi)=\iiint\limits_T \frac{\rho(r_0,\theta_0,\varphi_0)}{R}\mathrm{d}v_0,$$

式中 R 是点(r,θ,φ)距(r_0,θ_0,φ_0)处的电荷的距离，积分是对(r_0,θ_0,φ_0)进行的，$\mathrm{d}v_0$ 表示积分体积元. 把(θ,φ)方向与(θ_0,φ_0)方向之间的夹角记作 Θ，

$$\cos\Theta=\cos\theta\cos\theta_0+\sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0)，则距离 R 是$$

$$R=\sqrt{r^2-2rr_0\cos\Theta+r_0^2}.$$

于电，电势

$$u(r,\theta,\varphi)=\iiint\limits_T \frac{\rho(r_0,\theta_0,\varphi_0)}{\sqrt{r^2-2rr_0\cos\Theta+r_0^2}}\mathrm{d}v_0.$$

利用勒让德多项式的母函数公式(10.1.57)，上式可改写为

$$u(r,\theta,\varphi)=\iiint\limits_T \rho(r_0,\theta_0,\varphi_0)\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_0^l}{r^{l+1}}\mathrm{P}_l(\cos\Theta)\mathrm{d}v_0.$$

再利用球函数的加法公式(10.3.41)，

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\frac{2}{\delta_m}\iiint\limits_T \rho(r_0,\theta_0,\varphi_0)\right.$$
$$\left.\times r_0^l\mathrm{P}_l^m(\cos\theta_0)\cos m\varphi_0\mathrm{d}v_0\right]\frac{1}{r^{l+1}}\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\cos m\varphi$$
$$+\sum_{l=0}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}2\iiint\limits_T \rho(r_0,\theta_0,\varphi_0)\right.$$
$$\left.\times r_0^l\mathrm{P}_l^m(\cos\theta_0)\sin m\varphi_0\mathrm{d}v_0\right]\frac{1}{r^{l+1}}\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\sin m\varphi.$$

球函数 $\frac{1}{r^{l+1}}\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{Bmatrix}$ 表明是 2^l 极子的电势，而 $r_0^l\mathrm{P}_l^m(\cos\theta_0)$ $\begin{Bmatrix}\cos m\varphi_0\\ \sin m\varphi_0\end{Bmatrix}$ 则是这 2^l 极子的 2^l 极矩.

习　题

1. 用球函数把下列函数展开.

(1) $(1+3\cos\theta)\sin\theta\cos\varphi$,　　(2) $(1-|\cos\theta|)(1+\cos 2\varphi)$.

2. 在半径为 r_0 的球的(1)内部，(2)外部求解定解问题

$$\begin{cases}\Delta u=0,\\ u|_{r=r_0}=4\sin^2\theta\left(\cos\varphi\sin\varphi+\dfrac{1}{2}\right).\end{cases}$$

3. 在半径为 r_0 的球的(1)内部，(2)外部求解定解问题

$$\begin{cases}\Delta u=0,\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=r_0}=\cos^2\theta\cos^2\varphi-\cos^2\varphi+\dfrac{1}{3}.\end{cases}$$

4. 在半径为 r_0 的球的内部区域($r<r_0$)，求解定解问题

$$\begin{cases}\Delta u=0,\\ \left.\left(u+h\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)\right|_{r=r_0}=u_0\sin\theta(\sin\theta+\cos\theta\sin\varphi).\quad (h,u_0\text{ 为常数})\end{cases}$$

5. 在内半径为 r_1、外半径为 r_2 的空心球区域($r_1<r<r_2$)，求解定解问题

$$\begin{cases}\Delta u=0,\\ u|_{r=r_1}=u_1\cos\theta,\\ u|_{r=r_2}=u_2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi.\qquad (u_1,u_2\text{ 为常数})\end{cases}$$

6. 在半径为 r_0 的球的内部区域($r<r_0$)，求解泊松方程问题

$$\begin{cases}\Delta u=Ar\cos\theta,\qquad (A\text{ 为常数})\\ u|_{r=r_0}=0.\end{cases}$$

第十一章 柱 函 数

§11.1 三类柱函数

§9.1 用柱坐标系对拉普拉斯方程进行分离变数，得到贝塞尔方程(9.1.22)

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}+(x^2-m^2)R=0,\qquad (x=\sqrt{\mu}\rho)$$

或者虚宗量贝塞尔方程(9.1.25)

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}-(x^2+m^2)R=0.\qquad (x=\nu\rho)$$

§9.1 用柱坐标系，对亥姆霍兹方程进行分离变数，也得到贝塞尔方程(9.1.48)，跟(9.1.22)形式完全一样. §9.1 还用球坐标系，对亥姆霍兹方程进行分离变数，得到球贝塞尔方程(9.1.38)

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2}+2r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}+[k^2r^2-l(l+1)]R=0.$$

本章要讨论这些方程的解的性质及其在数学物理定解问题中的应用.

不过，在进行此种讨论之前，这里要对贝塞尔方程的阶的记号作一点说明. §9.3 以 m 特指整数阶，以 $l+1/2$ 特指半奇数阶，以 ν 表示这两种情况以外的阶. 从现在起，m 和 $l+1/2$ 仍保留原来的意义，ν 改为统指一般的阶，其不合适的某些情况则特别指明.

(一) 三类柱函数

§9.3 已求出贝塞尔方程的通解(9.3.23)或(9.3.25)，即

$$y(x)=C_1\mathrm{J}_\nu(x)+C_2\mathrm{J}_{-\nu}(x),\qquad (11.1.1)$$

或 $$y(x)=C_1\mathrm{J}_\nu(x)+C_2\mathrm{N}_\nu(x),\tag{11.1.2}$$
其中 ν 阶贝塞尔函数 $\mathrm{J}_\nu(x)$，$-\nu$ 阶贝塞尔函数 $\mathrm{J}_{-\nu}(x)$，ν 阶诺伊曼函数 $\mathrm{N}_\nu(x)$分别由(9.3.21)，(9.3.22)，(9.3.24)给出.

但是，对于整数 m 阶，$\mathrm{J}_{-m}(x)=(-1)^m\mathrm{J}_m(x)$[见(9.3.36)]并非独立于 $\mathrm{J}_m(x)$的解，所以 $C_1\mathrm{J}_m(x)+C_2\mathrm{J}_{-m}(x)$并非方程的通解，即(11.1.1)不适用于整数阶的情况. 至于(11.1.2)则对整数阶的情况照样适用.

通常又取线性独立的
$$\begin{cases}\mathrm{H}_\nu^{(1)}(x)=\mathrm{J}_\nu(x)+\mathrm{i}\mathrm{N}_\nu(x),\\ \mathrm{H}_\nu^{(2)}(x)=\mathrm{J}_\nu(x)-\mathrm{i}\mathrm{N}_\nu(x),\end{cases}\tag{11.1.3}$$
并称之为**第一种和第二种汉克尔函数**. 于是，贝塞尔方程的通解又可表为
$$y(x)=C_1\mathrm{H}_\nu^{(1)}(x)+C_2\mathrm{H}_\nu^{(2)}(x).\tag{11.1.4}$$
(11.1.2)、(11.1.4)对整数阶的情况也照样适用.

贝塞尔函数、诺伊曼函数、汉克尔函数又分别称为第一类、第二类、第三类柱函数.

(二) $x\to0$ 和 $x\to\infty$时的行为

由(9.3.21)，(9.3.22)，(9.3.24)和(9.3.38)看出，当 $x\to0$，
$$\mathrm{J}_0(x)\to1,\qquad \mathrm{J}_\nu(x)\to0,\qquad \mathrm{J}_{-\nu}(x)\to\infty,$$
$$\mathrm{N}_0(x)\to-\infty,\qquad \mathrm{N}_\nu(x)\to\pm\infty.\ (\nu\neq0)$$
这样，在研究圆柱内部问题时，“解在圆柱轴上($\rho=0$，亦即 $x=0$)应为有限”这个要求就成为自然的边界条件，按照这个条件，应舍弃诺伊曼函数和负阶的贝塞尔函数，只要零阶和正阶的贝塞尔函数.

再看另一极端 $x\to\infty$. 当 x 很大之时，柱函数的渐近公式见后面的(11.3.17)～(11.3.20)，即

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{H}_\nu^{(1)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-\nu\pi/2-\pi/4)}, \\
&\mathrm{H}_\nu^{(2)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x-\nu\pi/2-\pi/4)}, \\
&\mathrm{J}_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x-\nu\pi/2-\pi/4), \\
&\mathrm{N}_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin(x-\nu\pi/2-\pi/4).
\end{aligned} \tag{11.1.5}
$$

[顺便说一句，以上四式以及(11.1.3)都使人联想到 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$，$\cos\theta$，$\sin\theta$ 之间的关系.]当 $x\to\infty$，它们全都 $\to 0$. 这样，在研究圆柱外部问题时，两个线性独立特解，如 $\mathrm{J}_\nu(x)$ 和 $\mathrm{N}_\nu(x)$，或 $\mathrm{H}_\nu^{(1)}(x)$ 和 $\mathrm{H}_\nu^{(2)}(x)$，都要保留，不可任意舍弃两者之一，因为它们都满足"解在无限远处($\rho\to\infty$ 亦即 $x\to\infty$)为有限".

(三) 递推公式

由贝塞尔函数的级数表达式(9.3.21)容易算出

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{J}_\nu(x)}{x^\nu}\right] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu+2k} x^{2k}\right] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2k}{k!\,\Gamma(\nu-k+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu+2k} x^{2k-1}.
\end{aligned}
$$

令 $k=l+1$，则

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{J}_\nu(x)}{x^\nu}\right] &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1} 2(l+1)}{(l+1)!\,\Gamma(\nu+l+1+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu+2l+2} x^{2l+1} \\
&= -\frac{1}{x^\nu}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!\,\Gamma(\nu+1+l+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+1+2l} \\
&= -\frac{\mathrm{J}_{\nu+1}(x)}{x^\nu}.
\end{aligned} \tag{11.1.6}
$$

仿此还可推出

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^\nu \mathrm{J}_\nu(x)\right] = x^\nu \mathrm{J}_{\nu-1}(x). \tag{11.1.7}
$$

以上两式都是贝塞尔函数的线性关系式.诺伊曼函数 $N_\nu(x)$ 和(9.3.24)所定义,是正、负阶贝塞尔函数的线性组合.因此,(11.1.6)和(11.1.7)也适用于 $N_\nu(x)$.令 $\nu\to$整数 m,知这两式也适用于 $N_m(x)$.

按(11.1.3),汉克尔函数是用贝塞尔函数和诺伊曼函数的线性组合定义的,可见(11.1.6)和(11.1.7)也适用于汉克尔函数.

总之,如用 $Z_\nu(x)$ 代表 ν 阶的第一或第二或第三类柱函数,总是有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[Z_\nu(x)/x^\nu]=-Z_{\nu+1}(x)/x^\nu, \tag{11.1.8}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^\nu Z_\nu(x)]=x^\nu Z_{\nu-1}(x). \tag{11.1.9}$$

把两式左端展开,又可改写为

$$Z'_\nu(x)-\nu Z_\nu(x)/x=-Z_{\nu+1}(x), \tag{11.1.10}$$

$$Z'_\nu(x)+\nu Z_\nu(x)/x=Z_{\nu-1}(x). \tag{11.1.11}$$

从(11.1.10)和(11.1.11)消去 Z_ν 或消去 Z'_ν 可得

$$Z_{\nu-1}(x)-Z_{\nu+1}(x)=2Z'_\nu(x), \tag{11.1.12}$$

$$Z_{\nu+1}(x)-2\nu Z_\nu(x)/x+Z_{\nu-1}(x)=0. \tag{11.1.13}$$

(11.1.13)就是从 $Z_{\nu-1}(x)$ 和 $Z_\nu(x)$ 推算 $Z_{\nu+1}(x)$ 的递推公式.

§11.2 贝塞尔方程

(一) 贝塞尔函数与本征值问题

§9.1 末的表给出拉普拉斯方程和亥姆霍兹方程在柱坐标系中分离变数的 $\mu<0$, $\mu=0$ 和 $\mu>0$ 三种情况.

对于圆柱内部的问题,如果柱侧有齐次的边界条件,则 $\mu<0$ 应予排除.这是因为 $\mu<0$ 引至虚宗量贝塞尔方程,其解(9.3.45)和(9.3.46)恒不为零,除非 $x=\sqrt{\mu}\,\rho=0$.这样,我们只需考虑 $\mu\geqslant0$.这中间,$\mu=0$ 的情况如§9.1 末的表所列出,是比较简单的,

无需特别讨论；这里着重说一说 $\mu>0$ 的情况.

在 $\mu>0$ 的情况下，$R(\rho)$ 应是 m 阶贝塞尔方程(9.1.22)

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}+(x^2-m^2)R=0\quad(x=\sqrt{\mu}\,\rho)\qquad(11.2.1)$$

的解. 由于圆柱轴上的自然边界条件，这个方程的两个线性独立解之中，我们只要非负阶贝塞尔函数

$$R(\rho)=\mathrm{J}_m(x)=\mathrm{J}_m(\sqrt{\mu}\,\rho).\quad(m\geqslant 0)\qquad(11.2.2)$$

柱侧的齐次边界条件决定(11.2.1)中的 μ 的可能值，这些就是方程(11.2.1)在所给边界条件下的本征值，相应的(11.2.2)则是本征函数.

(1)第一类齐次边界条件 $R(\rho_0)=0$，ρ_0 为圆柱的半径. 这条件也就是 $\mathrm{J}_m(\sqrt{\mu}\,\rho_0)=0$. 因此，本征值

$$\mu_n^{(m)}=(x_n^{(m)}/\rho_0)^2,\qquad(11.2.3)$$

其中 $x_n^{(m)}$ 是 $\mathrm{J}_m(x)$的第 n 个零点.

图 11-1 描画了 $\mathrm{J}_0(x)$，$\mathrm{J}_1(x)$，$\mathrm{J}_2(x)$和 $\mathrm{J}_3(x)$. 从(9.3.35)易知 $\mathrm{J}_0(0)=1$ 而 $\mathrm{J}_m(0)=0(m\neq 0)$，这是说，除 $\mathrm{J}_0(x)$以外，其他的 $\mathrm{J}_m(x)$都有一个等于零的本征值 $\mu=0$. 不过，这已不属于 $\mu>0$ 的情况；如 § 9.1 末的表所指出，$\mu=0$ 的情况需要另行处理.

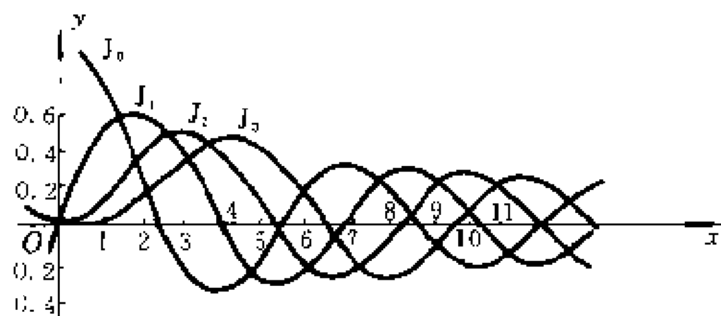


图 11-1

说到贝塞尔函数的零点 $x_n^{(m)}$，有许多数学用表，尤其是专门的贝塞尔函数表列出了这些零点. 本书附录六有一简略的零点表.

零点 $x_n^{(m)}$ 还可以用下面的公式计算：

$$x_n^{(m)}=A-\frac{B-1}{8A}\left(1+\frac{C}{3(4A)^2}+\frac{2D}{15(4A)^4}+\frac{E}{105(4A)^6}+\cdots\right),$$

其中

$$A=\left(m-\frac{1}{2}+2n\right)\frac{\pi}{2},B=4m^2,$$

$$C=7B-31,D=83B^2-982B+3779,$$

$$E=6949B^3-153855B^2+1585743B-6277237.$$

下面列举一些有关贝塞尔函数零点的一般性结论.

贝塞尔函数 $\mathrm{J}_m(x)$ 的级数表达式(9.3.35)各项的幂指数依次逐个相差 2,所以 $\mathrm{J}_m(-x)=(-1)^m\mathrm{J}_m(x)$. 这样,如 $x_n^{(m)}$ 是零点,则 $-x_n^{(m)}$ 必也是零点. 换句话说,贝塞尔函数的零点正负成对,其绝对值相等. 不过,柱坐标系中的 ρ 一般理解为正,所以我们将不讨论负的零点.

(11.1.5)给出了大 x 的渐近公式 $\mathrm{J}_m(x)\sim(1/\sqrt{x})\cos(x-m\pi/2-\pi/4)$. 余弦函数有无限多个零点,可见贝塞尔函数有无限多个零点.

连续函数的两个相邻零点之间必有其导数的一个零点. 这样,(11.1.6)表明 $\mathrm{J}_m(x)$ 的两个相邻零点之间必有 $\mathrm{J}_{m+1}(x)$ 的一个零点. 把(11.1.7)中的 ν 换作 $m+1$,则它表明 $x^{m+1}\mathrm{J}_{m+1}(x)$ 的两个相邻零点之间必有 $\mathrm{J}_m(x)$ 的一个零点. 这又可分为两种情况:i) $\mathrm{J}_{m+1}(x)$ 的两个相邻的且不等于零的两零点之间必有 $\mathrm{J}_m(x)$ 的一个零点. ii) 在 $x=0$ 与 $\mathrm{J}_{m+1}(x)$ 的绝对值最小的零点之间必有 $\mathrm{J}_m(x)$ 的一个零点. 总之,$\mathrm{J}_m(x)$ 和 $\mathrm{J}_{m+1}(x)$ 的零点两两相间,$\mathrm{J}_m(x)$ 的绝对值最小的零点比 $\mathrm{J}_{m+1}(x)$ 的绝对值最小的零点更接近于零(这对于波导问题是有意义的).

(2)第二类齐次边界条件 $R'(\rho_0)=0$. 这个条件就是 $0=[\mathrm{d}\mathrm{J}_m(\sqrt{\mu}\rho)/\mathrm{d}\rho]|_{\rho=\rho_0}=\sqrt{\mu}\mathrm{J}'_m(\sqrt{\mu}\rho_0)$,如 $\mu\neq0$,则这个条件也就是 $\mathrm{J}'_m(\sqrt{\mu}\rho_0)=0$. 所以,本征值

$$\mu_n^{(m)}=(x_n^{(m)}/\rho_0)^2, \qquad (11.2.4)$$

其中 $x_n^{(m)}$ 是 $\mathrm{J}'_m(x)$ 的第 n 个零点.

$\mathrm{J}'_m(x)$ 的零点在一般的数学用表中并未列出. 不过,$m=0$ 的特

例还是容易处理的：在(11.1.10)之中，置 $\nu=0$，则

$$J_0'(x)=-J_1(x). \tag{11.2.5}$$

这样，$J_0'(x)$ 的零点不过就是 $J_1(x)$ 的零点，可从许多数学用表查出. 至于 $m\neq0$ 的情况，则可如下考虑：引用(11.1.12)，

$$J_m'(x)=\frac{1}{2}[J_{m-1}(x)-J_{m+1}(x)].$$

这样，$J_m'(x)$ 的零点可从曲线 $J_{m-1}(x)$ 和 $J_{m+1}(x)$ 的交点得出.

$J_m'(x)$ 的零点 $x_n^{(m)}$ 还可以用下面的公式计算：

$$x_n^{(m)}=A-\frac{B+3}{8A}-\frac{C}{6(4A)^3}-\frac{D}{15(4A)^5}-\cdots,$$

其中

$$A=\left(m+\frac{1}{2}+2n\right)\frac{\pi}{2},\quad B=4m^2,\quad C=7B^2+82B-9,$$

$$D=83B^3+2075B^2-3039B+3537.$$

(3)第三类齐次边界条件 $R(\rho_0)+HR'(\rho_0)=0$. 这个条件就是

$$J_m(\sqrt{\mu}\rho_0)+H\sqrt{\mu}J_m'(\sqrt{\mu}\rho_0)=0. \tag{11.2.6}$$

记 $x_0=\sqrt{\mu}\rho_0$，$h=\rho_0/H$，并引用(11.1.10)可将(11.2.6)改写为

$$J_m(x_0)=\frac{x_0}{h+m}J_{m+1}(x_0). \tag{11.2.7}$$

所以本征值 $\mu_n^{(m)}=(x_n^{(m)}/\rho_0)^2$，其中 $x_n^{(m)}$ 是(11.2.7)的第 n 个根. 本书附录六给出 $m=0$ 的(11.2.7)的前六个根.

（二）贝塞尔函数的正交关系

作为施图姆-刘维尔本征值问题的正交关系(9.4.12)的特例，对应于不同本征值的同阶贝塞尔函数在区间[0，ρ_0]上带权重 ρ 正交，

$$\int_0^{\rho_0}J_m(\sqrt{\mu_n}\rho)J_m(\sqrt{\mu_l}\rho)\rho\mathrm{d}\rho=0. \qquad (n\neq l) \tag{11.2.8}$$

（三）贝塞尔函数的模

为了用贝塞尔函数作基进行广义傅里叶级数展开，需要先计

算贝塞尔函数 $\mathrm{J}_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho)$ 的模 $N_n^{(m)}$，

$$[N_n^{(m)}]^2=\int_0^{\rho_0}[\mathrm{J}_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho)]^2\rho\mathrm{d}\rho. \qquad (11.2.9)$$

对于 $\mu_n^{(m)}>0$，把 $\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho$ 记作 x，$\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho_0$ 记作 x_0，则

$$\begin{aligned}[N_n^{(m)}]^2&=\frac{1}{\mu_n^{(m)}}\int_0^{x_0}[\mathrm{J}_m(x)]^2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2\mu_n^{(m)}}\int_0^{x_0}[\mathrm{J}_m(x)]^2\mathrm{d}(x^2)\\&=\frac{1}{2\mu_n^{(m)}}[x^2\mathrm{J}_m^2(x)]_0^{x_0}-\frac{1}{\mu_n^{(m)}}\int_0^{x_0}[x^2\mathrm{J}_m(x)]\mathrm{J}_m'(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

右边积分号下的[ ]里的 $x^2\mathrm{J}_m(x)$ 可利用贝塞尔方程加以改写，

$$\begin{aligned}[N_n^{(m)}]^2&=\frac{1}{2\mu_n^{(m)}}[x^2\mathrm{J}_m^2]_0^{x_0}\\&\quad+\frac{1}{\mu_n^{(m)}}\int_0^{x_0}[x^2\mathrm{J}_m''(x)\\&\quad+x\mathrm{J}_m'(x)-m^2\mathrm{J}_m(x)]\mathrm{J}_m'(x)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2\mu_n^{(m)}}[x^2\mathrm{J}_m^2]_0^{x_0}\\&\quad+\frac{1}{\mu_n^{(m)}}\int_0^{x_0}\left[x^2\mathrm{J}_m'(x)\frac{\mathrm{d}\mathrm{J}_m'(x)}{\mathrm{d}x}+x(\mathrm{J}_m')^2\right]\mathrm{d}x\\&\quad-\frac{m^2}{\mu_n^{(m)}}\int_0^{x_0}\mathrm{J}_m\mathrm{d}\mathrm{J}_m\\&=\frac{1}{2\mu_n^{(m)}}[x^2\mathrm{J}_m^2]_0^{x_0}+\frac{1}{2\mu_n^{(m)}}\int_0^{x_0}\mathrm{d}[x^2\mathrm{J}_m'^2]-\frac{m^2}{2\mu_n^{(m)}}[\mathrm{J}_m^2]_0^{x_0}\\&=\frac{1}{2\mu_n^{(m)}}[(x^2-m^2)\mathrm{J}_m^2]_0^{x_0}+\frac{1}{2\mu_n^{(m)}}[x^2\mathrm{J}_m'^2]_0^{x_0}\\&=\frac{1}{2}\left(\rho_0^2-\frac{m^2}{\mu_n^{(m)}}\right)[\mathrm{J}_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho_0)]^2\\&\quad+\frac{1}{2}\rho_0^2[\mathrm{J}_m'(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho_0)]^2.\end{aligned} \qquad (11.2.10)$$

对于第一类齐次边界条件 $\mathrm{J}_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho_0)=0$，(11.2.10)成为

$$[N_n^{(m)}]^2=\frac{1}{2}\rho_0^2[\mathrm{J}_m'(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho_0)]^2.$$

以(11.1.10)代入并且考虑到第一类齐次边界条件，得

$$[N_n^{(m)}]^2=\frac{1}{2}\rho_0^2[\mathrm{J}_{m+1}(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho_0)]^2 \qquad (11.2.11)$$

对于第二类齐次边界条件 $\mathrm{J}_m'(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho_0)=0$，(11.2.10)成为

$$[N_n^{(m)}]^2=\frac{1}{2}\left(\rho_0^2-\frac{m^2}{\mu_n^{(m)}}\right)[\mathrm{J}_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho_0)]^2.$$

对于第三类齐次边界条件，$\mathrm{J}_m'=-\mathrm{J}_m/\sqrt{\mu_n^{(m)}}\mathrm{H}$，(11.2.10)成为

$$[N_n^{(m)}]^2=\frac{1}{2}\left(\rho_0^2-\frac{m^2}{\mu_n^{(m)}}+\frac{\rho_0^2}{\mu_n^{(m)}\mathrm{H}}\right)[\mathrm{J}_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho_0)]^2. \qquad (11.2.12)$$

（四）傅里叶-贝塞尔级数

按照§9.4 施图姆-刘维尔本征值问题的性质(4)，本征函数族 $\mathrm{J}_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho)$ 是完备的，可作为广义傅里叶级数展开的基.

作为(9.4.14)和(9.4.18)的特例，区间$[0,\rho_0]$上的函数 $f(\rho)$ 的傅里叶 贝塞尔级数是

$$\begin{cases} f(\rho)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n\mathrm{J}_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho), & (11.2.13) \\ \text{系数 } f_n=\dfrac{1}{[N_n^{(m)}]^2}\displaystyle\int_0^{\rho_0} f(\rho)\mathrm{J}_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho)\rho\mathrm{d}\rho. & (11.2.14) \end{cases}$$

记得公式(11.1.6)，(11.2.5)和(11.1.7)可能对计算系数 f_n 有帮助，因为它们给出不定积分

$$\int x^{-m}\mathrm{J}_{m+1}(x)\mathrm{d}x=-x^{-m}\mathrm{J}_m(x)+C, \qquad (11.2.15)$$

$$\int \mathrm{J}_1(x)\mathrm{d}x=-\mathrm{J}_0(x)+C, \qquad (11.2.16)$$

$$\int x^m\mathrm{J}_{m-1}(x)\mathrm{d}x=x^m\mathrm{J}_m(x)+C. \qquad (11.2.17)$$

某些贝塞尔函数表附有系数 f_n 的简便计算表.

对于 $\rho_0\to\infty$ 的情况，则有**傅里叶-贝塞尔积分**

$$\begin{cases} f(\rho) = \int_0^\infty F(\omega) \mathrm{J}_m(\omega\rho)\omega \mathrm{d}\omega, \\ F(\omega) = \int_0^\infty f(\rho)\mathrm{J}_m(\omega\rho)\rho \mathrm{d}\rho. \end{cases} \tag{11.2.18}$$

例1 计算积分 $\int_0^{x_0} x^3 \mathrm{J}_0(x)\mathrm{d}x$.

解 由(11.2.17)，$\int x\mathrm{J}_0(x)\mathrm{d}x = x\mathrm{J}_1(x)+C$，所以

$$\begin{aligned}\int_0^{x_0} x^3\mathrm{J}_0(x)\mathrm{d}x &= \int_0^{x_0} x^2 \mathrm{d}[x\mathrm{J}_1(x)] \\ &= [x^2 \cdot x\mathrm{J}_1(x)]_0^{x_0} - \int_0^{x_0} x\mathrm{J}_1(x) \cdot 2x\mathrm{d}x\end{aligned}$$

又由(11.2.17)，$\int x^2\mathrm{J}_1(x)\mathrm{d}x = x^2\mathrm{J}_2(x)+C$，所以

$$\begin{aligned}\int_0^{x_0} x^3\mathrm{J}_0(x)\mathrm{d}x &= x_0^3\mathrm{J}_1(x_0) - 2[x^2\mathrm{J}_2(x)]_0^{x_0} \\ &= x_0^3\mathrm{J}_1(x_0) - 2x_0^2\mathrm{J}_2(x_0)\end{aligned} \tag{11.2.19}$$

用递推公式(11.1.13)，$\mathrm{J}_2(x) = (2/x)\mathrm{J}_1(x) - \mathrm{J}_0(x)$，(11.2.19)可改写为

$$\int_0^{x_0} x^3\mathrm{J}_0(x)\mathrm{d}x = x_0^3\mathrm{J}_1(x_0) - 4x_0\mathrm{J}_1(x_0) + 2x_0^2\mathrm{J}_0(x_0).$$

例2 在区间$[0,\rho_0]$上，以 $\mathrm{J}_0(\sqrt{\mu_n^{(0)}}\rho)$ 为基[$\mu_n^{(0)}$ 是 $\mathrm{J}_0(\sqrt{\mu}\rho_0)=0$ 的根]，把函数 $f(\rho)=$ 常数 u_0 展开为傅里叶-贝塞尔级数.

解 依(11.2.13)，(11.2.14)，

$$u_0 = \sum_{n=1}^\infty f_n \mathrm{J}_0(\sqrt{\mu_n^{(0)}}\rho),$$

其中系数

$$f_n = \frac{1}{[N_n^{(0)}]^2}\int_0^{\rho_0} u_0\mathrm{J}_0(\sqrt{\mu_n^{(0)}}\rho)\rho\mathrm{d}\rho.$$

这里的 $N_n^{(0)}$ 由(11.2.11)给出，本征值 $\mu_n^{(0)} = (x_n^{(0)}/\rho_0)^2$，而 $x_n^{(0)}$ 是 $\mathrm{J}_0(x)$的第 n 个零点，可由贝塞尔函数表查出. 这样，

$$f_n = \frac{2u_0}{\rho_0^2[\mathrm{J}_1(x_n^{(0)})]^2}\int_0^{\rho_0}\mathrm{J}_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{\rho_0}\rho\right)\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{2u_0}{\rho_0^2[J_1(x_n^{(0)})]^2}\left[\frac{\rho_0}{x_n^{(0)}}\right]^2\int_0^{\rho_0}J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{\rho_0}\rho\right)\cdot\frac{x_n^{(0)}}{\rho_0}\rho\mathrm{d}\left(\frac{x_n^{(0)}}{\rho_0}\rho\right)$$

令　$x=(x_n^{(0)}/\rho_0)\rho$，应用(11.2.14)，

$$f_n=\frac{2u_0}{[x_n^{(0)}J_1(x_n^{(0)})]^2}\int_0^{x_n^{(0)}}xJ_0(x)\mathrm{d}x=\frac{2u_0}{[x_n^{(0)}J_1(x_n^{(0)})]^2}[xJ_1(x)]_0^{x_n^{(0)}}$$

$$=\frac{2u_0}{x_n^{(0)}J_1(x_n^{(0)})}.$$

从而

$$u_0=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2u_0}{x_n^{(0)}J_1(x_n^{(0)})}J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{\rho_0}\rho\right).$$

例 3　在傅里叶光学中常用到圆域函数，其定义是

$$\mathrm{circ}\rho=\begin{cases}1, & (\rho\leqslant 1)\\ 0. & (\rho>1)\end{cases}$$

试将 $\mathrm{circ}\rho$ 展开为傅里叶-贝塞尔积分 $\int_0^{\infty}F(\omega)J_0(\omega\rho)\omega\mathrm{d}\omega$.

解　依(11.2.18)，$\mathrm{circ}\rho$ 的傅里叶-贝塞尔积分

$$\mathrm{circ}\rho=\int_0^{\infty}F(\omega)J_0(\omega\rho)\omega\mathrm{d}\omega$$

中的 $F(\omega)$ 应是

$$F(\omega)=\int_0^{\infty}\mathrm{circ}(\rho)J_0(\omega\rho)\rho\mathrm{d}\rho=\int_0^1J_0(\omega\rho)\rho\mathrm{d}\rho$$

把 $\omega\rho$ 记作 x，则

$$F(\omega)=\frac{1}{\omega^2}\int_0^{\infty}J_0(x)x\mathrm{d}x.$$

应用(11.2.34)，

$$F(\omega)=\frac{1}{\omega^2}[xJ_1(x)]_0^{\omega}=\frac{1}{\omega^2}\{\omega J_1(\omega)-0\}=\frac{1}{\omega}J_1(\omega).$$

（五）贝塞尔函数应用例

例 4　匀质圆柱，半径为 ρ_0，高 L. 柱侧绝热，上下底面温度分布分别保持为 $f_2(\rho)$ 和 $f_1(\rho)$. 求解柱内的稳定温度分布.

解　采用柱坐标系，极点在下底中心，z 轴沿着圆柱的轴，定解问题表为

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \rho}\Big|_{\rho=\rho_0} = 0, u|_{\rho=0} = \text{有限值}, & (11.2.20) \\ u|_{z=0} = f_1(\rho), u|_{z=L} = f_2(\rho). & (11.2.21) \end{cases}$$

本例是圆柱内部的拉普拉斯方程定解问题. 因柱侧是齐次的第二类边界条件,应查看 § 9.1 末的表中 $\mu \geqslant 0$ 的部分.

对于 $\mu > 0$,计及圆柱轴($\rho = 0$)的自然边界条件,查得

$$J_m(\sqrt{\mu}\rho)\begin{Bmatrix} e^{\sqrt{\mu}z} \\ e^{-\sqrt{\mu}z} \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix}.$$

边界条件全都与 φ 无关,由此可见 $m=0$. 于是只要

$$J_0(\sqrt{\mu}\rho)\begin{Bmatrix} e^{\sqrt{\mu}z} \\ e^{-\sqrt{\mu}z} \end{Bmatrix}.$$

第二类齐次边界条件 $\mu_\rho(\rho_0) = 0$ 指出本征值 $\mu_n^{(0)} = (x_n^{(0)}/\rho_0)^2$,其中 $x_n^{(0)}$ 是 $J'_0(x)$的第 n 个根,亦即 $J_1(x)$的第 n 个根.

对于 $\mu = 0$,考虑到 $m = 0$ 查得 $\begin{Bmatrix} 1 \\ z \end{Bmatrix}$.

把以上特解叠加起来,

$$u(\rho, z) = A_0 + B_0 z + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{x_n^{(0)} z/\rho_0} + B_n e^{-x_n^{(0)} z/\rho_0}) J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{\rho_0}\rho\right). \tag{11.2.22}$$

为决定系数 A_0、B_0、A_n 和 B_n,把(11.2.22)代入边界条件(11.2.21),

$$\begin{cases} A_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (A_n + B_n) J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{\rho_0}\rho\right) = f_1(\rho), \\ A_0 + B_0 L + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{x_n^{(0)} L/\rho_0} + B_n e^{-x_n^{(0)} L/\rho_0}) J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{\rho_0}\rho\right) = f_2(\rho). \end{cases}$$

把右边的 $f_1(\rho)$和 $f_2(\rho)$分别展开为傅里叶-贝塞尔级数,然后与左边比较,即得

$$\begin{cases} A_0 = \dfrac{2}{\rho_0^2}\displaystyle\int_0^{\rho_0} f_1(\rho)\rho \mathrm{d}\rho \equiv f_{10}, \\ A_0 + B_0 L = \dfrac{2}{\rho_0^2}\displaystyle\int_0^{\rho_0} f_2(\rho)\rho \mathrm{d}\rho \equiv f_{20}; \end{cases} \tag{11.2.23}$$

$$\begin{cases} A_n + B_n = \dfrac{2}{\rho_0^2[\mathrm{J}_0(x_n^{(0)})]^2}\displaystyle\int_0^{\rho_0} f_1(\rho)\mathrm{J}_0(\dfrac{x_n^{(0)}}{\rho_0}\rho)\rho \mathrm{d}\rho \equiv f_{1n}, \\ A_n \mathrm{e}^{x_n^{(0)}L/\rho_0} + B_n \mathrm{e}^{-x_n^{(0)}L/\rho_0} \\ \qquad = \dfrac{2}{\rho_0^2[\mathrm{J}_0(x_n^{(0)})]^2}\displaystyle\int_0^{\rho_0} f_2(\rho)\mathrm{J}_0\left(\dfrac{x_n^{(0)}}{\rho_0}\rho\right)\rho \mathrm{d}\rho \equiv f_{2n}. \end{cases} \tag{11.2.24}$$

$$\begin{cases} A_0 = f_{10}, \\ A_n = \dfrac{f_{1n}\mathrm{e}^{-x_n^{(0)}L/\rho_0} - f_{2n}}{\mathrm{e}^{\ x_n^{(0)}L/\rho_0} - \mathrm{e}^{x_n^{(0)}L/\rho_0}}, \end{cases} \quad \begin{cases} B_0 = (f_{20} - f_{10})/L; \\ B_n = \dfrac{f_{1n}\mathrm{e}^{x_n^{(0)}L/\rho_0} - f_{2n}}{\mathrm{e}^{x_n^{(0)}L/\rho_0} - \mathrm{e}^{\ x_n^{(0)}L/\rho_0}}. \end{cases} \tag{11.2.25}$$

本例的解即是(11.2.22),其中系数由(11.2.25)给出.

例5 用匀质材料制作尖劈形细杆,宽度很小,首尾一样,取 x 轴沿杆身,坐标原点在削尖的一端,杆长为 l,粗端是自由的.已知初始位移为 $f(x)$,初始速度处处为零,求解杆的纵振动.

解 本例虽非圆柱问题,却也用到贝塞尔函数.

尖劈的横截面积 $S(x)$ 随 x 而异.记粗端的高为 h,则 x 处的高 $y=(h/l)x$.记尖劈的宽为 ε,则 $S(x)=\varepsilon y=\varepsilon hx/l$.

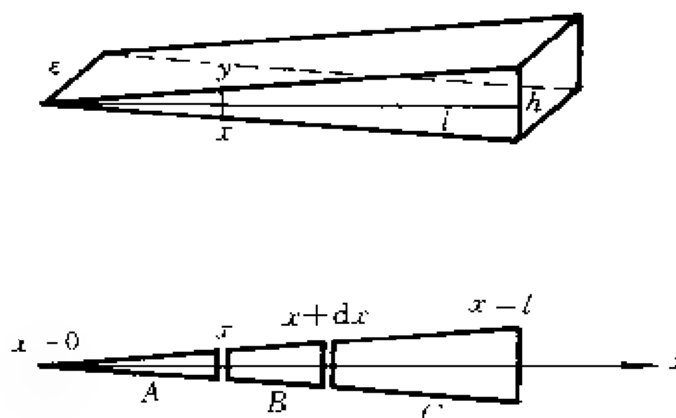


图 11-2

现在推导这种杆的纵振动方程,设想在杆上截取一小段 B(图11-2),这小段的两端分别受到 A 段、C 段的拉力 $[YSu_x]_x$、

$[YSu_x]_{x+dx}$，其合力为$[YSu_x]_{x+dx}-[YSu_x]_x$，即$Y\dfrac{\partial}{\partial x}[Su_x]dx$. B段的质量是ρSdx. 于是，B段的运动方程是

$$(\rho Sdx)u_{tt}=Y\frac{\partial}{\partial x}(Su_x)dx.$$

即

$$\rho\frac{\varepsilon h}{l}xu_{tt}=Y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varepsilon h}{l}xu_x\right)$$

这样，本例所研究的定解问题是

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial}{\partial x}(xu_x)=0, \quad (a^2=Y/\rho) & (11.2.26) \\ u_x|_{x=l}=0, & \\ u|_{t=0}=f(x), \quad u_t|_{t=0}=0. & (11.2.27) \end{cases}$$

在尖端$x=0$，没有提出边界条件. 下面将会发现在$x=0$有自然的边界条件.

用分离变数法，以

$$u(x,t)=X(x)T(t)$$

代入(11.2.26)和(11.2.27)，可得

$$T''+k^2a^2T=0, \tag{11.2.28}$$

$$\begin{cases} x^2X''+xX'+k^2x^2X=0 & (11.2.29) \\ X'(l)=0. & (11.2.30) \end{cases}$$

方程(11.2.29)是以kx为宗量的零阶贝塞尔方程. 它在$x=0$有自然的边界条件，其在$x=0$为有限的解是

$$X(x)=J_0(kx).$$

代入齐次边界条件(11.2.30)，有$J_0'(kl)=-J_1(kl)=0$，得本征值

$$k_n=\frac{1}{l}x_n^{(0)}, \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

其中$x_n^{(0)}$是$J_1(x)$的第n个零点. 这样，本征函数是

$$X_n(x)=J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{l}x\right). \tag{11.2.31}$$

至于方程(11.2.28)的解，对于$k_0=x_0^{(0)}/l=0$，它是

$$T_0(t)=A_0+B_0t;$$

对于 $k_n=x_n^{(0)}/l>0$，它是

$$T_n(t)=A_n\cos\frac{x_n^{(0)}a}{l}t+B_n\sin\frac{x_n^{(0)}a}{l}t.$$

把本征解叠加起来，

$$u(x,t)=A_0+B_0t+\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos\frac{x_n^{(0)}a}{l}t+B_n\sin\frac{x_n^{(0)}a}{l}t\right]J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{l}x\right).$$

为决定系数 A_0、B_0、A_n 和 B_n，将通解代入初始条件(11.2.28)，

$$\begin{cases}A_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_nJ_0\left(\dfrac{x_n^{(0)}}{l}x\right)=f(x),\\ B_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}B_n\dfrac{x_n^{(0)}a}{l}J_0\left(\dfrac{x_n^{(0)}}{l}x\right)=0.\end{cases}$$

由第二式知 $B_0=0$，$B_n=0$. 再把第一式右边的 $f(x)$ 展开为傅里叶-贝塞尔级数，然后比较两边系数，

$$\begin{cases}A_0=\dfrac{2}{l^2}\displaystyle\int_0^l f(x)x\mathrm{d}x,\\ A_n=\dfrac{2}{l^2[J_0(x_n^{(0)})]^2}\displaystyle\int_0^l J_0\left(\dfrac{x_n^{(0)}}{l}x\right)f(x)x\mathrm{d}x.\end{cases}\qquad(11.2.32)$$

这样，本例的解是

$$u(x,t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{x_n^{(0)}}{l}atJ_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{l}x\right),$$

其中系数由(11.2.32)给出.

例6 一圆柱体半径为 ρ_0，高为 L，侧面和下底面温度保持为 u_0，上底面绝热，初始温度为 $u_0+f_1(\rho)f_2(z)$. 求圆柱体内各处温度 u 的变化情况.

解 采用柱坐标系，极点在下底中心，z 轴沿着圆柱的轴. 定解问题表为

$$\begin{cases}u_t-a^2\Delta_3u=0,\\ u|_{\rho=\rho_0}=u_0,\ u|_{\rho=0}\text{有限},\\ u|_{z=0}=u_0,\ u_z|_{z=L}=0,\\ u|_{t=0}=u_0+f_1(\rho)f_2(z).\end{cases}$$

首先把边界条件化为齐次．为此令

$$u=u_0+v, \tag{11.2.33}$$

则
$$\begin{cases}v_t-a^2\Delta_3 v=0, \\ v|_{\rho=\rho_0}=0, v|_{\rho=0}\text{有限}, & (11.2.34)\\ v|_{z=0}=0, v_z|_{z=L}=0, & (11.2.35)\\ v|_{t=0}=f_1(\rho)f_2(z). & (11.2.36)\end{cases}$$

这是圆柱内部的热传导问题，边界条件全是齐次的．查看§9.1末的表．计及 i) 上下底的齐次边界条件，ii) 圆柱轴的自然边界条件，iii) 问题与 φ 无关即 $m=0$，查得

$$J_0(\sqrt{\mu}\rho)\sin\nu z\, e^{-k^2a^2t}. \qquad (k^2=\mu+\nu^2)$$

以此代入边界条件(11.2.35)容易求得本征值 $\nu^2=(p+1/2)^2\pi^2/L^2$，其中 p 为非负整数．又，代入边界条件(11.2.34)容易求得本征值 $\mu_n^{(0)}=(x_n^{(0)}/\rho_0)^2$，其中 $x_n^{(0)}$ 是 $J_0(x)$ 的第 n 个零点．

把以上特解叠加起来，

$$v=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}A_{np}e^{-\left[\left(\frac{x_n^{(0)}}{\rho_0}\right)^2+\frac{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}{L^2}\right]a^2t}J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{\rho_0}\rho\right)$$
$$\sin\frac{\left(p+\frac{1}{2}\right)\pi}{L}z. \tag{11.2.37}$$

为确定系数 A_{np}，将上式代入初始条件(11.2.36)，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}A_{np}J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{\rho_0}\rho\right)\sin\frac{\left(p+\frac{1}{2}\right)\pi}{L}z=f_1(\rho)f_2(z).$$

由此可见，应以 $J_0(x_n^{(0)}\rho/\rho_0)$ 为基而将 $f_1(\rho)$ 展为傅里叶-贝塞尔级数，以 $\sin[(p+1/2)\pi z/L]$ 为基而将 $f_2(z)$ 展为傅里叶级数．然后比较两边系数，即得

$$A_{np}=\frac{2}{\rho_0^2[J_1(x_n^{(0)})]^2}\int_0^{\rho_0}f_1(\rho)J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{\rho_0}\rho\right)\rho d\rho$$
$$\cdot\frac{2}{L}\int_0^L f_2(z)\sin\frac{\left(p+\frac{1}{2}\right)\pi}{L}zdz.$$

将上式代入(11.2.37),又将(11.2.37)代入(11.2.33)即得本例的解.

(六) 母函数,积分表示与加法公式

§3.5 例 4 把 $e^{\frac{1}{2}xz}$ 和 $e^{-\frac{1}{2}x\frac{1}{z}}$ 分别展为绝对收敛级数,逐项相乘而得到(3.5.16)即

$$e^{\frac{1}{2}x(z-\frac{1}{z})}=\sum_{m=0}^{\infty}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(m+n)!\,n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2n}\right]z^m$$
$$+\sum_{m=-1}^{-\infty}\left[(-1)^m\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(|m|+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{|m|+2n}\right]z^m$$
$$(0<|z|<\infty).$$

上式右边前一个[ ]正是 $J_m(x)$,后一个[ ]则是 $(-1)^m J_{|m|}(x)$,而这按照(9.3.36)正是 $J_{-|m|}(x)$.这样

$$e^{\frac{1}{2}x(z-\frac{1}{z})}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}J_m(x)z^m\quad(0<|z|<\infty).\qquad(11.2.38)$$

$e^{\frac{1}{2}x(z-\frac{1}{z})}$ 因此叫作整数阶贝塞尔函数的**母函数**。令 $z=e^{i\zeta}$,(11.2.38)改写成

$$e^{ix\sin\zeta}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}J_m(x)e^{im\zeta}.\qquad(11.2.39)$$

又令 $\zeta=\psi-\frac{\pi}{2}$,(11.2.39)改写成

$$e^{-ix\cos\psi}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-i)^m J_m(x)e^{im\psi}.\qquad(11.2.40)$$

又令 $\psi=\theta+\pi$,(11.2.40)改写成

$$e^{ix\cos\theta}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}i^m J_m(x)e^{im\theta}.\qquad(11.2.41)$$

(11.2.38)~(11.2.41)是彼此等价的。

把(11.2.38)的右边看作复数形式的傅里叶级数,那么 $J_m(x)$ 就是 $e^{ix\sin\zeta}$ 的傅里叶系数,所以

$$J_m(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ix\sin\zeta}e^{-im\zeta}d\zeta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ix\sin\zeta-im\zeta}d\zeta.\qquad(11.2.42)$$

被积函数 $e^{ix\sin\zeta-im\zeta}=\cos(x\sin\zeta-m\zeta)+i\sin(x\sin\zeta-m\zeta)$,虚部是 ζ 的奇函数,在区间 $[-\pi,\pi]$ 上积分为零,所以

$$J_m(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(x\sin\zeta-m\zeta)d\zeta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(m\zeta-x\sin\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\mathrm{i}m\zeta-\mathrm{i}x\sin\zeta}\mathrm{d}\zeta. \tag{11.2.43}$$

如用 ψ 和 θ 代替 ζ，则

$$\mathrm{J}_m(x)=\frac{(-\mathrm{i})^m}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\mathrm{i}x\cos\psi+\mathrm{i}m\psi}\mathrm{d}\psi, \tag{11.2.44}$$

$$\mathrm{J}_m(x)=\frac{\mathrm{i}^m}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-\mathrm{i}x\cos\theta+\mathrm{i}m\theta}\mathrm{d}\theta. \tag{11.2.45}$$

(11.2.42)～(11.2.45)是整数阶贝塞尔函数的**积分表示式**.

现在推导整数阶贝塞尔函数的加法公式. 按照(11.2.38)，

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_m(a+b)z^m=e^{\frac{1}{2}(a+b)\left(z-\frac{1}{z}\right)}=e^{\frac{1}{2}a\left(z-\frac{1}{z}\right)}e^{\frac{1}{2}b\left(z-\frac{1}{z}\right)}.$$

对右边两个因子分别应用(11.2.38)，

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_m(a+b)z^m=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_k(a)z^k\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_n(b)z^n.$$

比较两边的 z^m 的系数，即得**加法公式**

$$\mathrm{J}_m(a+b)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_k(a)\mathrm{J}_{m-k}(b). \tag{11.2.46}$$

（七）诺伊曼函数

图 11-3 描画了 $\mathrm{N}_0(x)$ 和 $\mathrm{N}_1(x)$ 的图象. 明显可见，当 $x\to 0$，$\mathrm{N}_0(x)$ 和 $\mathrm{N}_1(x)\to-\infty$. 其实，所有的诺伊曼函数都有此性质：当 x

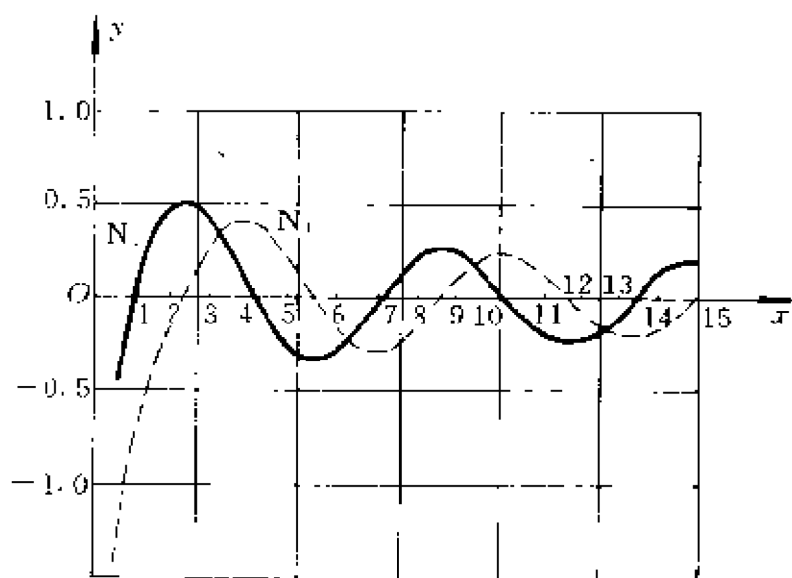


图 11-3

$\to 0$, $N_\nu(x) \to \pm\infty$.

前此，研究圆柱内部问题，圆柱轴（$x=\sqrt{\mu}\rho=0$）上的自然边界条件排除了诺伊曼函数. 但如果研究的是空心圆柱之类的区域，并不涉及 $\rho=0$ 的自然边界条件，那就不能排除诺伊曼函数.

例 7 匀质空心长圆柱体，内外半径分别为 ρ_1 和 ρ_2. 初始温度分布是 $f(\rho)$，放入温度为 U_0 的烘箱里进行保温. 设圆柱内外表面的温度均保持为 U_0. 求解柱内各处温度 u 的变化情况.

解 对于长柱，可以认为每个横剖面上情况相同，只要研究一个横剖面即可，从而三维问题简化为二维问题. 在剖面上采用平面极坐标系，极点在柱轴上，则定解问题是

$$\begin{cases} u_t - a^2\Delta_2 u = 0, \\ u|_{\rho=\rho_1} = U_0, u|_{\rho=\rho_2} = U_0, \\ u|_{t=0} = f(\rho). \end{cases}$$

首先移动温标的零点，使边界条件化为齐次，

$$u=U_0+v, \tag{11.2.47}$$

$$\begin{cases} v_t - a^2\Delta_2 v = 0, \\ v|_{\rho=\rho_1} = 0, v|_{\rho=\rho_2} = 0, & (11.2.48) \\ v|_{t=0} = f(\rho) - U_0 & (11.2.49) \end{cases}$$

查看 §9.1 末的表. 平面极坐标系不过是缺少 z 轴的柱坐标系，因此不考虑表中的 $Z(z)$. 计及问题与 φ 无关即 $m=0$，查得

$$[AJ_0(\sqrt{\mu}\rho)+BN_0(\sqrt{\mu}\rho)]e^{-\mu a^2 t}.$$

以此代入边界条件(11.2.48)，

$$\begin{cases} AJ_0(\sqrt{\mu}\rho_1) + BN_0(\sqrt{\mu}\rho_1) = 0, \\ AJ_0(\sqrt{\mu}\rho_2) + BN_0(\sqrt{\mu}\rho_2) = 0. \end{cases}$$

从这个齐次线性代数方程组只能解出没意思的 $A=0=B$，除非系数行列式等于零，即

$$J_0(\sqrt{\mu}\rho_1)N_0(\sqrt{\mu}\rho_2)-J_0(\sqrt{\mu}\rho_2)N_0(\sqrt{\mu}\rho_1)=0.$$

这个方程的根 μ_n 可从一些数学用表查出，本书附录七也有一个简单的表. 将 μ_n 代回原来的代数方程组，可求得相应的 A_n 与 B_n 的比值

$$\frac{B_n}{A_n}=-\frac{J_0(\sqrt{\mu_n}\rho_1)}{N_0(\sqrt{\mu_n}\rho_1)}.$$

将以上本征解叠加起来，

$$v=\sum_{n=1}^{\infty}C_n[N_0(\sqrt{\mu_n}\rho_1)J_0(\sqrt{\mu_n}\rho)$$
$$-J_0(\sqrt{\mu_n}\rho_1)N_0(\sqrt{\mu_n}\rho)]e^{-\mu_n a^2 t},\qquad(11.2.50)$$

其中 $C_n=A_n/N_0(\sqrt{\mu_n}\rho_1)$ 是尚待确定的系数. 为确定 C_n，以(11.2.50)代入初始条件(11.2.49)，

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_n[N_0(\sqrt{\mu_n}\rho_1)J_0(\sqrt{\mu_n}\rho)-J_0(\sqrt{\mu_n}\rho_1)N_0(\sqrt{\mu_n}\rho)]=f(\rho).$$

以 $[N_0(\sqrt{\mu_n}\rho_1)J_0(\sqrt{\mu_n}\rho)-J_0(\sqrt{\mu_n}\rho_1)N_0(\sqrt{\mu_n}\rho)]$ 为基，将上式右端的 $f(\rho)$ 展开，比较两边系数就可定出 C_n.

这样，本例的解是(11.2.47)，其中的 v 由(11.2.50)给出.

（八）汉克尔函数

§9.1 末的表指出，波动方程在柱坐标系中的分离变数形式的解是

$$Z_m(\sqrt{\mu}\rho)\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\cos\nu z\\ \sin\nu z\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}e^{ikat}\\ e^{-ikat}\end{Bmatrix}.\qquad(k^2=\mu+\nu^2)$$

这里已将 $\cos kat$ 和 $\sin kat$ 重新组合为 e^{ikat} 和 e^{-ikat}，而 $Z_m(\sqrt{\mu}\rho)$ 则是 m 阶柱函数.

现在考察这个分离变数解在大 ρ 地方的行为. 为确定起见，取时间因子为 e^{-ikat}. 为简便起见，下面将省略不写有关 φ 和 z 的因子. 引用(11.1.5)知道，对于大的 ρ，

$$H_m^{(1)}(\sqrt{\mu}\rho)e^{-ikat}\sim\sqrt{\frac{2}{\pi\sqrt{\mu}\rho}}e^{i(\sqrt{\mu}\rho-kat-m\pi/2-\pi/4)},$$

$$H_m^{(2)}(\sqrt{\mu}\rho)e^{-ikat}\sim\sqrt{\frac{2}{\pi\sqrt{\mu}\rho}}e^{-i(\sqrt{\mu}\rho+kat-m\pi/2-\pi/4)},$$

$$J_m(\sqrt{\mu}\rho)e^{-ikat}\sim\sqrt{\frac{2}{\pi\sqrt{\mu}\rho}}\cos(\sqrt{\mu}\rho-m\pi/2-\pi/4)e^{-ikat},$$

$$N_m(\sqrt{\mu}\rho)e^{-ikat}\sim\sqrt{\frac{2}{\pi\sqrt{\mu}\rho}}\sin(\sqrt{\mu}\rho-m\pi/2-\pi/4)e^{-ikat}.$$

参照 § 7.4 关于(7.4.5)的物理解释，第一式是朝 $+\rho$ 方向传播的波，亦即向外发散的波；第二式是朝 $-\rho$ 方向传播的波，亦即向内会聚的波；第三和第四式的变数 ρ 和 t 是分离的，它们是驻波.

如果改取时间因子为 $e^{i\omega t}$，则 $H_m^{(1)}$ 对应于会聚波，$H_m^{(2)}$ 对应于发散波，J_m 和 N_m 仍对应于驻波.

这样，研究波发射问题，用汉克尔函数比较方便.

例 8 半径为 ρ_0 的长圆柱面，其径向速度分布为

$$v=v_0\cos\omega t.$$

试求解这柱面所发射的稳恒声振动的速度势 u，设 ρ_0 远小于声波的波长 λ.

解 本例正是 § 7.2(一)所说的没有初始条件的问题.

这里研究的速度势 u 满足二维波动方程. 在横剖面上取平面极坐标系，极点在柱轴上，则定解问题是

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2\Delta_2 u=0, \\ u_\rho|_{\rho=\rho_0}=v_0 e^{-i\omega t}. \end{cases} \tag{11.2.51}$$

为计算方便，边界条件里的 $\cos\omega t$ 即 $\mathrm{Re}(e^{-i\omega t})$ 写成了 $e^{-i\omega t}$. 这就要求约定在计算的最后结果中也应取其实部.

查看 § 9.1 末的表. 不考虑 $Z(z)$，计及 i)问题与 φ 无关即 $m=0$，ii)边界条件(11.2.51)的时间因子 $e^{-i\omega t}$，查得

$$Z_0(k\rho)e^{-ika t},$$

且 $ka=\omega$，即 $k=\omega/a$. [这式其实就是 $2\pi/\lambda=2\pi f/a$，即 $a=f\lambda$. 这正是读者熟悉的"波速=频率×波长".]

考虑到这是声波发射问题，柱函数 $Z_0(\frac{\omega}{a}\rho)$ 应取为 $H_0^{(1)}(k\rho)$，而舍弃 $H_0^{(2)}(k\rho)$. 本例的 k 只有 ω/a 这个唯一的值，所以无需叠加，

$$u=AH_0^{(1)}\left(\frac{\omega}{a}\rho\right)e^{-i\omega t}. \tag{11.2.52}$$

为确定系数 A，把(11.2.52)代入边界条件(11.2.51)，

$$A\left[\frac{\partial}{\partial\rho}H_0^{(1)}\left(\frac{\omega}{a}\rho\right)\right]_{\rho=\rho_0}=v_0.$$

因 $\rho_0 \ll \lambda = 2\pi/k = 2\pi a/\omega$，即 $(\omega/a)\rho_0$ 很小. 因而可以引用(9.3.41)和(9.3.42)，

$$A\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(1+\mathrm{i}\,\frac{2}{\pi}\ln\frac{\omega\rho}{2a}+\mathrm{i}C\right)\right]_{\rho=\rho_0}=v_0,$$

即
$$\mathrm{i}A\,\frac{2}{\pi\rho_0}=v_0.$$

由此，$A=-\mathrm{i}\pi v_0\rho_0/2$，于是得答案

$$u=-\mathrm{i}\,\frac{\pi v_0\rho_0}{2}\mathrm{H}_0^{(1)}\left(\frac{\omega}{a}\rho\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}.$$

在远场区即 ρ 大的地方，用渐近公式(11.1.5)，

$$u\sim-\mathrm{i}v_0\rho_0\sqrt{\frac{\pi a}{2\omega\rho}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\omega}{a}\rho-\omega t-\pi/4)}.$$

按约定取实部

$$u\sim v_0\rho_0\sqrt{\frac{\pi a}{2\omega\rho}}\sin\left(\frac{\omega}{a}\rho-\omega t-\pi/4\right).$$

这是振幅按 $1/\sqrt{\rho}$ 减小的柱面波.

习　题

1. 计算积分 $\int x^4\mathrm{J}_1(x)\mathrm{d}x$. [提示：反复运用(11.1.7)和(11.2.5).]

2. 计算积分 $\int \mathrm{J}_3(x)\mathrm{d}x$.

3. 在区间[0,1]上，第一类齐次边界条件下，用零阶贝塞尔函数把 $f(x)=1$ 展开为傅里叶-贝塞尔级数.

4. 半径为 ρ_0、高为 L 的圆柱体，下底和侧面保持零度，上底温度分布为 $f(\rho)=\rho^2$，求柱体内各点的稳恒温度分布.

5. 半径为 ρ_0、高为 L 的圆柱体，下底温度分布为 $u_0\rho^2$，上底温度保持为 u_1，侧面绝热，求柱体内的稳恒温度分布.

6. 圆柱体半径为 ρ_0 而高为 L，上底有均匀分布的强度为 q_0 的热流进入，下底则有同样的热流流出，柱侧保持零度，求柱体内的稳恒温度分布.

7. 半径为 ρ_0 的圆形膜，边缘固定，初始形状是旋转抛物面 $u|_{t=0}=(1-\rho^2/\rho_0^2)u_0$，初始速度为零，求解膜的振动情况.

8. 半径为 ρ_0 的半圆形膜，边缘固定，求其本征频率和本征振动.

9. 求长圆柱形铀块的临界半径.［"临界"一词的意义见 § 8.1 习题 8.］

10. 把温度为室温 u_0 的样品放入温度为 U_0 的烘炉内保温，但是，样品里的温度不可能立刻就转变为 U_0，它与 U_0 之差随着时间而衰减，今约定把这差值降到初始值的 $1/e$ 之时作为保温开始时间，试计算圆柱形样品放入烘炉多长时间才可开始计算保温时间.

11. 匀质圆柱，半径 ρ_0、高 L，上下底面固定，侧面自由，初始位移为零，初始速度为 $u_0\rho^2 z$，求柱内各处的振动情况.

12. 半径为 ρ_0 的圆形膜，边缘固定、初始位移、初始速度为零，每单位质量上的作用力为 $f=A\sin\omega t$. 求解膜的振动情况.

13. 匀质圆柱，半径 ρ_0、高 L，试求解圆柱内部的热传导问题.

$$\begin{cases} u_t-a^2\Delta u=0, \\ u\big|_{\rho=\rho_0}=u_1 z^2, u\big|_{\rho=0}=\text{有限值}. \\ u\Big|_{z=0}=0, \dfrac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=L}=2Lu_1, \\ u\big|_{t=0}=u_0 \end{cases}$$

其中 u_0、u_1 为常数.

14. 环形膜，内、外半径分别是 ρ_1 和 ρ_2. 内外边缘都保持固定，试求它的本征振动和本征频率.

15. 半径为 ρ_0 的长圆柱面，其径向速度分布为

$$v=v_0\cos\varphi\ \cos\omega t.$$

试求解这个长圆柱面在空气中辐射出去的声场中的速度势. 设 ρ_0 远小于声波波长.

16. 半径为 ρ_0 的长圆柱面上一条母线作谐振动，即柱面径向速度为 $v=v_0\delta(\varphi-\varphi_0)\cos\omega t$. 试求解这个长圆柱在空气中辐射出去的声场中的速度势，设 $\rho_0\ll\lambda$.

§ 11.3 柱函数的渐近公式

(一) 索末菲积分

索末菲把柱函数表为路积分，这种路积分表示式就叫作**索末菲积分**.

很容易验证，

$$e^{i(ax+by)}\ (a^2+b^2=k^2)$$

是二维亥姆霍兹方程 $v_{xx}+v_{yy}+k^2v=0$ 的特解. 从直角坐标系 (x,y) 变换到平面极坐标系 (ρ,φ)，同时把 a 和 b 改记作

$$a=k\cos\alpha, b=k\sin\alpha;$$

则上述特解

$$e^{i(ax+by)}=e^{ik\rho(\cos\alpha\cos\varphi+\sin\alpha\sin\varphi)}=e^{ik\rho\cos(\alpha-\varphi)}.$$

为便于跟前面有关各节相比较，把 $k\rho$ 记作 x（注意这 x 并不是直角坐标，它只是代表 $k\rho$ 的一个记号）. 于是，上述特解表为

$$e^{ix\cos(\alpha-\varphi)}. \tag{11.3.1}$$

作(11.3.1)的线性叠加，

$$v=\int_\beta^\gamma A(\alpha)e^{ix\cos(\alpha-\varphi)}d\alpha,$$

这当然仍是二维亥姆霍兹方程 $\Delta_2 v+k^2v=0$ 的解. 参考(11.2.42)～(11.2.45)，取 $A(\alpha)=a_\nu e^{i\nu\alpha}$，

$$v=a_\nu\int_\beta^\gamma e^{i\nu\alpha+ix\cos(\alpha-\varphi)}d\alpha.$$

鉴于(11.2.44)，令 $\psi=\alpha-\varphi$，则

$$v=a_\nu e^{i\nu\varphi}\int_{\beta-\varphi}^{\gamma-\varphi}e^{i\nu\psi+ix\cos\psi}d\psi.$$

一般说来，(11.2.43)比(11.2.44)较为常用，再令 $\zeta=\psi-\frac{\pi}{2}$，则

$$\begin{aligned} v&=a_\nu e^{i\nu\varphi}e^{i\nu\frac{\pi}{2}}\int_{\beta-\varphi-\frac{\pi}{2}}^{\gamma-\varphi-\frac{\pi}{2}}e^{i\nu\zeta-ix\sin\zeta}d\zeta \\ &=a_\nu i^\nu e^{i\nu\varphi}\int_{\beta-\varphi-\frac{\pi}{2}}^{\gamma-\varphi-\frac{\pi}{2}}e^{i\nu\zeta-ix\sin\zeta}d\zeta. \end{aligned} \tag{11.3.2}$$

(11.3.2)作为二维亥姆霍兹方程的解，如果积分上下限跟 φ 无关，就是说，如果极坐标 ρ（注意 x 就是 $k\rho$）和 φ 是分离在不同的因子里，那么它的径向因子（即积分式）应当就是贝塞尔方程的解即柱函数，这是 § 9.1 关于亥姆霍兹方程的分离变数过程已经表明的. 可是，(11.3.2)的积分上下限是含有 φ 的. 要使积分上下限跟 φ 无关，必须把上下限取为某种无限大. 这样一来，又需要考虑积分的上下限趋于∞时积分是否收敛. 为此，试考察当 $\zeta=\xi+i\eta\to\infty$ 时，被积函数的模怎样变化.

$$|e^{i\nu\zeta-ix\sin\zeta}| = |e^{\mathrm{Re}(i\nu\zeta-ix\sin\zeta)-i\mathrm{Im}(i\nu\zeta-ix\sin\zeta)}| = e^{\mathrm{Re}(i\nu\zeta-ix\sin\zeta)},$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(i\nu\zeta - ix\sin\zeta) &= \mathrm{Re}(i\nu\zeta) - \mathrm{Re}(ix\sin\zeta)\\ &= \mathrm{Re}(i\nu\xi - \nu\eta) - \mathrm{Re}\left[\frac{x}{2}(e^{i\zeta} - e^{-i\zeta})\right]\\ &= -\nu\eta - \mathrm{Re}\left[\frac{x}{2}(e^{-\eta}e^{i\xi} - e^{\eta}e^{-i\xi})\right]\\ &= -\nu\eta + \frac{x}{2}(e^{\eta} - e^{-\eta})\cos\xi.\end{aligned} \tag{11.3.3}$$

(11.3.3)的第一项是 η 的一次幂，第二项是 η 的指数函数. 当 η 增大时，指数函数的增大远比幂函数来得快，所以第二项远比第一项重要. (如果 $x=0$，第二项根本不存在，那就另当别论了.) 参看图 11-4，如 ζ 在划线区域中趋于∞，则(11.3.3)的第二项趋于$+\infty$，被积函数的模趋于 $e^{+\infty}$，积分发散. 如 ζ 在未划线区域中趋于∞，则(11.3.3)的第二项趋于$-\infty$，被积函数的模迅速地趋于 $e^{-\infty}$ 即 0，积分收敛.

到这里，我们得到结论：路积分

$$a\nu\int_l e^{i\nu\zeta-ix\sin\zeta}d\zeta \tag{11.3.4}$$

的积分路径 l 的两端在未划线区域中趋于无限远点，则(11.3.4)收敛. 它不再跟 φ 有关，如前所指出，它应当就是柱函数.

取积分路径为图 11-4 的 W_0，取常数 a_ν 为 $1/2\pi$，可以证明这个柱函数是 ν 阶贝塞尔函数 $J_\nu(x)$，

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{W_0} e^{i\nu\zeta-ix\sin\zeta}d\zeta. \tag{11.3.5}$$

事实上，对于 $x=0$，当 ζ 趋于 W_0 两端的时候，(11.3.5)的被积函数的模

$$|e^{i\nu\zeta}| = e^{-\nu\eta} \to e^{-\infty} = 0,$$

积分收敛. 既然(11.3.5)是柱函数而且在 $x=0$ 是有限的，它只能就是贝塞尔函数.

如果 ν 是整数 m，还可以具体验证(11.3.5)确是贝塞尔函数. 被积函数在有限远点是解析的，根据柯西定理，积分路径 W_0 可以变形为图 11-5 的折线 $-\pi+i\infty \to -\pi \to +\pi \to \pi+i\infty$，

$$\begin{aligned}J_m(x) = &\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+i\infty}^{-\pi} e^{im\zeta-ix\sin\zeta}d\zeta + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{im\zeta-ix\sin\zeta}d\zeta\\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi+i\infty} e^{im\zeta-ix\sin\zeta}d\zeta.\end{aligned}$$

在右边第一个积分中，令 $\zeta = z - 2\pi$，则

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi+i\infty}^{\pi} e^{im2\pi} e^{imz - ix\sin z} dz$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{im\zeta - ix\sin\zeta} d\zeta + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi+i\infty} e^{im\zeta - ix\sin\zeta} d\zeta.$$

既然 m 是整数，$e^{im2\pi} = 1^m = 1$，所以右边第一项跟第三项互相消去，

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{im\zeta - ix\sin\zeta} d\zeta.$$

这正是贝塞尔函数的积分表示式(11.2.43).

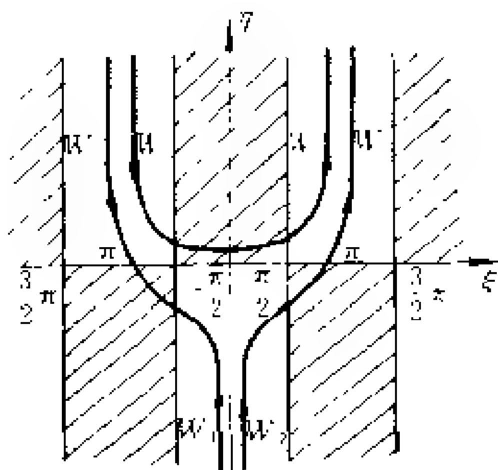


图 11-4

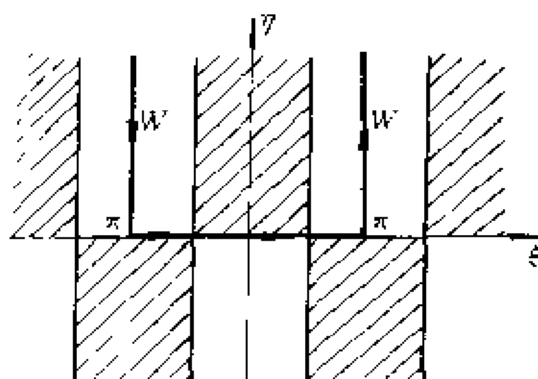


图 11-5

又取积分路径为图 11-4 的 W_1 或 W_2，取常数 a_ν 为 $1/\pi$，暂且把这两个柱函数记作 $H_\nu^{(1)}(x)$ 和 $H_\nu^{(2)}(x)$，

$$\begin{cases} H_\nu^{(1)}(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{W_1} e^{i\nu\zeta - ix\sin\zeta} d\zeta, \\ H_\nu^{(2)}(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{W_2} e^{i\nu\zeta - ix\sin\zeta} d\zeta. \end{cases} \tag{11.3.6}$$

(11.3.6)是两个线性独立的 ν 阶柱函数，凡是 ν 阶柱函数都可表为它们的线性组合. 例如

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{W_0} e^{i\nu\zeta - ix\sin\zeta} d\zeta = \frac{1}{2\pi}\int_{W_1+W_2} e^{i\nu\zeta - ix\sin\zeta} d\zeta$$

$$= \frac{1}{2}[H_\nu^{(1)}(x) + H_\nu^{(2)}(x)]. \tag{11.3.7}$$

如 ν 不是整数，$J_\nu(x)$ 和 $J_{-\nu}(x)$ 是两个线性独立 ν 阶柱函数，其他的 ν 阶柱函数都可表为它们的线性组合. 现在

$$J_{-\nu}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{W_0} e^{-i\nu\zeta - ix\sin\zeta} d\zeta.$$

令 $\zeta = -\zeta'$，则

$$J_{-\nu}(x) = \frac{-1}{2\pi}\int_{-W_0} e^{i\nu\zeta' + ix\sin\zeta'} d\zeta'.$$

为了把积分路径移入未划线区域，要使积分路径 $-W_0$ 向左移动 π(图 11-6)．为此，又令 $\zeta' = \zeta + \pi$，则

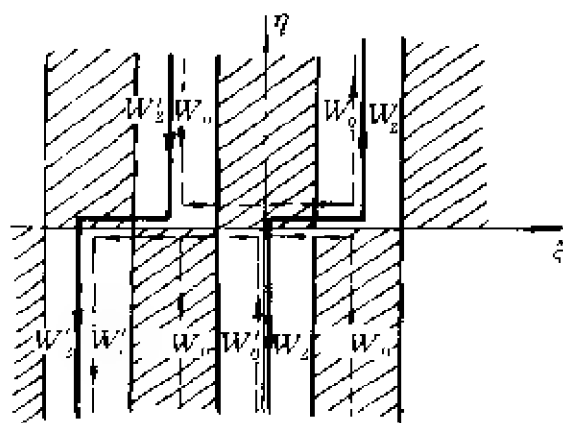


图 11-6

$$J_{-\nu}(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{W'_0} e^{i\nu(\zeta+\pi) + ix\sin(\zeta+\pi)} d\zeta$$

$$= -\frac{e^{i\nu\pi}}{2\pi}\int_{W'_0} e^{i\nu\zeta - ix\sin\zeta} d\zeta. \tag{11.3.8}$$

由(11.3.5)和(11.3.8)得

$$J_\nu(x) - e^{-i\nu\pi}J_{-\nu}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{W_0+W'_0} e^{i\nu\zeta - ix\sin\zeta} d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{W_2+W'_2} e^{i\nu\zeta - ix\sin\zeta} d\zeta$$

$$= \frac{1}{2}H_\nu^{(2)}(x) + \frac{1}{2\pi}\int_{W'_2} e^{i\nu\zeta - ix\sin\zeta} d\zeta.$$

在上式右边第二个积分中，令 $\zeta = z - 2\pi$，则

$$J_\nu(x) - e^{-i\nu\pi}J_{-\nu}(x)$$

$$= \frac{1}{2}H_\nu^{(2)}(x) - \frac{1}{2\pi}\int_{W_2} e^{-i2\nu\pi} e^{i\nu z - ix\sin z} dz.$$

$$= \frac{1}{2}(1 - e^{-i2\nu\pi})H_\nu^{(2)}(x) = e^{-i\nu\pi} i\sin\nu\pi H_\nu^{(2)}(x),$$

即

$$\mathrm{H}_\nu^{(2)}(x)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\pi}\mathrm{J}_\nu(x)-\mathrm{J}_{-\nu}(x)}{\mathrm{i}\sin\nu\pi}. \tag{11.3.9}$$

把上式代入(11.3.7)又得

$$\mathrm{H}_\nu^{(1)}(x)=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\pi}\mathrm{J}_\nu(x)-\mathrm{J}_{-\nu}(x)}{-\mathrm{i}\sin\nu\pi}. \tag{11.3.10}$$

把柱函数$\frac{1}{2\mathrm{i}}[\mathrm{H}_\nu^{(1)}(x)-\mathrm{H}_\nu^{(2)}(x)]$暂且记作 $\mathrm{N}_\nu(x)$,

$$\mathrm{N}_\nu(x)=\frac{1}{2\mathrm{i}}[\mathrm{H}_\nu^{(1)}(x)-\mathrm{H}_\nu^{(2)}(x)]. \tag{11.3.11}$$

关系式(11.3.7)和(11.3.11)等价于

$$\begin{cases}\mathrm{H}_\nu^{(1)}(x)=\mathrm{J}_\nu(x)+\mathrm{i}\mathrm{N}_\nu(x),\\ \mathrm{H}_\nu^{(2)}(x)=\mathrm{J}_\nu(x)-\mathrm{i}\mathrm{N}_\nu(x).\end{cases} \tag{11.3.12}$$

把(11.3.9)和(11.3.10)代入(11.3.11),

$$\mathrm{N}_\nu(x)=\frac{\mathrm{J}_\nu(x)\cos\nu\pi-\mathrm{J}_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi} \tag{11.3.13}$$

这正是诺伊曼函数 $\mathrm{N}_\nu(x)$的原先的定义(9.3.24). 因此,(11.3.6)和(11.3.11)的记号 $\mathrm{H}_\nu^{(1)}(x)$,$\mathrm{H}_\nu^{(2)}(x)$和 $\mathrm{N}_\nu(x)$用得完全正当.

(11.3.5)和(11.3.6)就是索末菲积分.

(二) 渐近公式

从索末菲积分出发,运用鞍点法(最速下降法),不难导出柱函数对于大 x 的近似式,即所谓**渐近公式**.

以 $\mathrm{H}_\nu^{(1)}(x)$为例,

$$\mathrm{H}_\nu^{(1)}(x)=\frac{1}{\pi}\int_{W_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\zeta-\mathrm{i}x\sin\zeta}\mathrm{d}\zeta.$$

前已指出,被积函数的模的大小取决于指数

$$\mathrm{i}\nu\zeta-\mathrm{i}x\sin\zeta \tag{11.3.14}$$

的实部

$$\mathrm{Re}(\mathrm{i}\nu\zeta-\mathrm{i}x\sin\zeta)=-\nu\eta+\frac{\pi}{2}(\mathrm{e}^\eta+\mathrm{e}^{-\eta})\cos\xi, \tag{11.3.15}$$

其中$\frac{x}{2}(\mathrm{e}^\eta-\mathrm{e}^{-\eta})\cos\xi$ 尤为重要. 对于大的 x,决定被积函数的模的(11.3.15)式在图 11-4～图 11-6 的划线区域具有很大的正值,在未划线区域具有负值,其绝对值很大. 图 11-7 是(11.3.15)的"地形图". 点 $\xi=-\frac{\pi}{2},\eta=0$ 的两侧是

高峰，前后是低谷，因而叫作鞍点.

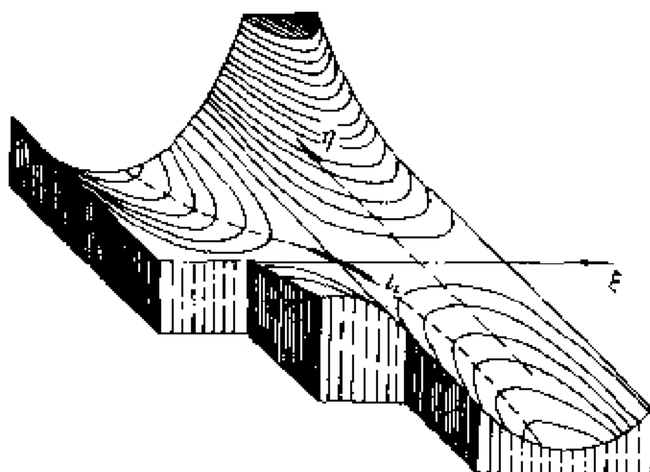


图 11-7

把积分路径 W_1 变形，使之通过鞍点. 在积分路径上，被积函数的模于鞍点最大，在鞍点前后则迅速减小. 因而积分的值主要来自鞍点附近的一段路程 l_s. 适当选取 l_s 的方向使被积函数的模在鞍点前后减小得最快，那自然最理想. 为此，需要研究(11.3.15)的主要部分 $\frac{x}{2}(e^{\eta}-e^{-\eta})\cos\xi$ 在 l_s 上的变化情况. 近似地把 l_s 当作直线段，其辐角为 θ. 把 l_s 上的点 ζ 与鞍点的距离记作 s，则 ζ 应表为

$$\zeta=-\frac{\pi}{2}+se^{i\theta}, \text{即}\begin{cases}\xi=-\frac{\pi}{2}+s\cos\theta,\\ \eta=s\sin\theta.\end{cases}$$

于是，

$$\begin{aligned}\frac{x}{2}(e^{\eta}-e^{-\eta})\cos\xi &= \frac{x}{2}(e^{s\sin\theta}-e^{-s\sin\theta})\cos\left(-\frac{\pi}{2}+s\cos\theta\right)\\ &=\frac{x}{2}(e^{s\sin\theta}-e^{-s\sin\theta})\sin(s\cos\theta)\\ &=\frac{x}{2}\left[1+\frac{s\sin\theta}{1!}+\cdots-\left(1-\frac{s\sin\theta}{1!}+\cdots\right)\right]\\ &\quad\times\left(s\cos\theta-\frac{s^3\cos^3\theta}{3!}+\cdots\right)\sim\frac{x}{2}(2s\sin\theta)(s\cos\theta)\\ &=\frac{x}{2}s^2\sin2\theta. \end{aligned}\qquad(11.3.16)$$

上式沿路径的变化率

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{x}{2}s^2\sin2\theta\right)=xs\sin2\theta.$$

于 $2\theta=-\dfrac{\pi}{2}$，即 $\theta=-\dfrac{\pi}{4}$，变化率取负值，且绝对值最大.

这样说来，积分的值主要来自通过鞍点而与 ξ 轴作 $-45°$ 的短线段 l_ε 上的积分，

$$\mathrm{H}_\nu^{(1)}(x)\sim\frac{1}{\pi}\int_{l_\varepsilon}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\zeta-\mathrm{i}x\sin\zeta}\mathrm{d}\zeta.$$

上面已算出(11.3.14)的实部(11.3.15)的主要部分在 l_ε 上为(11.3.16)即 $\dfrac{1}{2}xs^2\sin2\theta$. 至于(11.3.14)的虚部的主要部分 $-\dfrac{x}{2}(\mathrm{e}^{\eta}+\mathrm{e}^{-\eta})\sin\xi$ 在 l_ε 上同样可以算出为 $x\left(1-\dfrac{1}{2}s^2\cos2\theta\right)$. 因此，

$$\begin{aligned}\mathrm{H}_\nu^{(1)}(x)&\sim\frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}xs^2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}x\left(1-\frac{1}{2}s^2\cos\frac{\pi}{2}\right)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{2}xs^2+\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\nu\frac{\pi}{2}+x-\frac{\pi}{4}\right)}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}s^2}\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

引用 $t=s\sqrt{x/2}$ 作为积分变数，得到 $\mathrm{H}_\nu^{(1)}(x)$ 的**渐近公式**

$$\begin{aligned}\mathrm{H}_\nu^{(1)}(x)&\sim\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)}\sqrt{\frac{2}{x}}\int_{-\varepsilon\sqrt{x/2}}^{+\varepsilon\sqrt{x/2}}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\\&\approx\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{x}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{x}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)}\sqrt{\pi}\\&=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)}.\end{aligned}\tag{11.3.17}$$

同理可得 $\mathrm{H}_\nu^{(2)}(x)$ 的**渐近公式**

$$\mathrm{H}_\nu^{(2)}(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)}.\tag{11.3.18}$$

把以上两式代入(11.3.7)和(11.3.11)即得 $\mathrm{J}_\nu(x)$ 和 $\mathrm{N}_\nu(x)$ 的**渐近公式**

$$\mathrm{J}_\nu(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right),\tag{11.3.19}$$

$$\mathrm{N}_\nu(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right).\tag{11.3.20}$$

§11.4 虚宗量贝塞尔方程

§11.2所研究的圆柱状区域的拉普拉斯方程定解问题都是柱侧面有齐次边界条件的. 对于那些问题,只要考虑§9.1末的表中的 $\mu\geqslant0$ 的分离变数解. 但如果圆柱上下底面具有齐次边界条件,则与 $\mu>0$ 对应的 $Z(z)=e^{\sqrt{\mu}z}$ 或 $e^{-\sqrt{\mu}z}$ 在上下底齐次边界条件下只能给出没有意思的 $Z(z)=0$. 因此,对于这些问题,应考虑 $\mu\leqslant0$ 的分离变数解. $\mu=0$ 的情况比较简单,无需特别讨论;这里着重说一说 $\mu<0$ 的情况.

在 $\mu=-\nu^2<0$ 的情况下, $R(\rho)$ 应是虚宗量贝塞尔方程(9.1.25)

$$x^2\frac{d^2R}{dx^2}+x\frac{dR}{dx}-(x^2+m^2)R=0\quad(x=\nu\rho)$$

(11.4.1)

的解. 这方程的一个解是 m 阶**虚宗量贝塞尔函数**(9.3.50)

$$I_m(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!(m+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k}\qquad(11.4.2)$$

§9.3还指出,对于整数 m, $I_{-m}(x)=I_m(x)$, 并非线性独立的另一解. 这样,我们还得寻找线性独立的另一解.

据(11.1.3)和(9.3.37),

$$H_\nu^{(1)}(ix)=J_\nu(ix)+i\frac{J_\nu(ix)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(ix)}{\sin\nu\pi}$$

$$=\frac{e^{-i\nu\pi}J_\nu(ix)-J_{-\nu}(ix)}{-i\sin\nu\pi}$$

又据(9.3.45)和(9.3.46),

$$H_\nu^{(1)}(ix)=\frac{e^{-i\nu\pi}i^\nu I_\nu(x)-i^{-\nu}I_{-\nu}(x)}{-i\sin\nu\pi}=\frac{e^{-i\frac{\nu}{2}\pi}}{-i}\frac{I_\nu(x)-I_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}.$$

乘以 $\pi ie^{i\nu\pi/2}/2$ 使成为实函数,记作 $K_\nu(x)$.

$$K_\nu(x)=\frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(x)-I_\nu(x)}{\sin\nu\pi}. \tag{11.4.3}$$

平常说到虚宗量汉克尔函数就是指(11.4.3).

令 $\nu\to$ 整数 m，得 m 阶虚宗量汉克尔函数

$$K_m(x)=\lim_{\nu\to m}\frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(x)-I_\nu(x)}{\sin\nu\pi}. \tag{11.4.4}$$

(11.4.2)和(11.4.4)是 m 阶虚宗量贝塞尔方程(11.4.1)的两个线性独立解.

图 11-8 描画了 $I_0(x)$ 和 $K_0(x)$，$I_1(x)$ 和 $K_1(x)$. 除 $x=0$ 以外，它们没有实的零点. 其实，这是虚宗量贝塞尔函数和虚宗量汉克尔函数的共同性质.

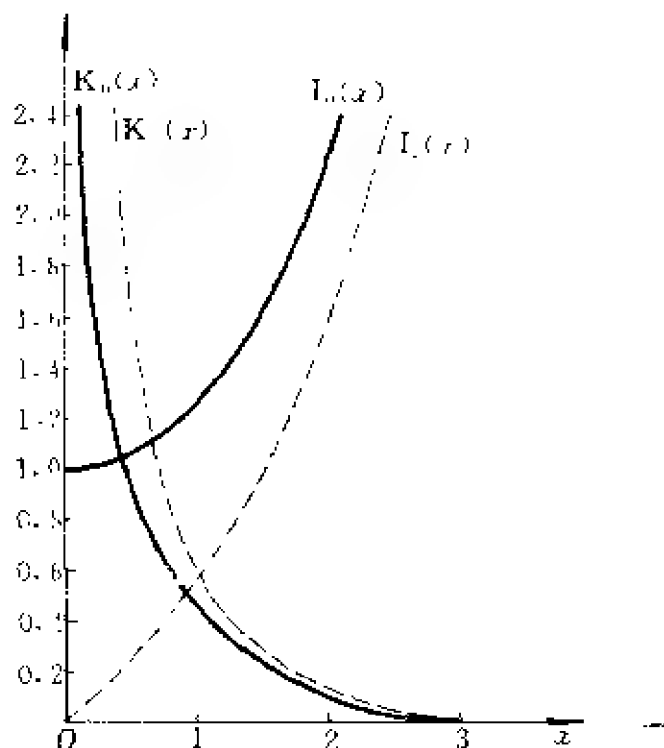


图 11-8

现在看它们在 $x\to 0$ 时的行为. 把虚宗量贝塞尔方程(11.4.1)改写为

$$\frac{d^2R}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dR}{dx}+\left(-1-\frac{m^2}{x^2}\right)R=0. \qquad (x=\nu\rho)$$

它在 $x=0$ 的邻域上的判定方程 $s(s-1)+sp_{-1}+q_{-2}=0$ 显然是

$$s(s-1)+s-m^2=0.$$

其解为 $s_1=m, s_2=-m$. 两根之差为整数，所以对应于小根 $s_2=-m$ 的解一般含有 $\ln x$. 就算是不含 $\ln x$ 的特殊情况，其级数展开式的最低幂项为 x^{-m}. 当 $x\to 0$，不论是 $\ln x$ 还是 x^{-m}，都是 $\to\infty$. 这样，虚宗量贝塞尔方程在 $x=0$ 具有自然的边界条件. 从(11.4.2)易知

$$\mathrm{I}_0(0)=1, \quad \mathrm{I}_m(0)=0. \ (m\neq 0) \tag{11.4.5}$$

于是，在 $x=0$ 的自然边界条件表明

$$\text{当 } x\to 0 \text{ 时}, \mathrm{K}_m(x)\to\infty. \tag{11.4.6}$$

这样，如果所研究的区域包含圆柱轴($\rho=0$ 从而 $x=\rho=0$)，自然边界条件排除虚宗量汉克尔函数 $\mathrm{K}_m(x)$，只用 $\mathrm{I}_m(x)$.

再看另一极端 $x\to\infty$. 引用渐近公式(11.1.5). 对于大 x，

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_m(x)&=\mathrm{i}^{-m}\mathrm{J}_m(\mathrm{i}x)\sim \mathrm{i}^{-m}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{i}x}}\cos\left(\mathrm{i}x-\frac{m\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\\&=\mathrm{i}^{-m-1/2}\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathrm{i}x-m\pi/2-\pi/4)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathrm{i}x-m\pi/2-\pi/4)}\right)\\&\sim \mathrm{i}^{-m-1/2}\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{x-\mathrm{i}m\pi/2+\mathrm{i}\pi/4}=\mathrm{i}^{-m-1/2}\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{x}\mathrm{i}^{m}\mathrm{i}^{1/2}\\&=\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{x}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{K}_m(x)&=\frac{\pi}{2}\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\pi/2}\mathrm{H}_m^{(1)}(\mathrm{i}x)\sim\frac{\pi}{2}\mathrm{i}^{m+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{\mathrm{i}x}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathrm{i}x-m\pi/2-\pi/4)}\\&=\frac{\pi}{2}\mathrm{i}^{m+1/2}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{i}^{-m}\mathrm{i}^{-1/2}=\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-x}.\end{aligned}$$

因此，当 $x\to\infty$ 时，$\mathrm{I}_m(x)\to\infty$，$\mathrm{K}_m(x)\to 0$. 这样，如果所研究的区域伸向无限远，一般应排除 $\mathrm{I}_m(x)$，只用 $\mathrm{K}_m(x)$.

例 1 匀质圆柱，半径 ρ_0，高 L. 柱侧有均匀分布的热流进入，其强度为 q_0. 圆柱上下两底保持为恒定的温度 u_0. 求解柱内稳定

温度分布.

解 采用柱坐标系,极点在下底中心,z 轴沿着圆柱的轴. 定解问题是

$$\begin{cases}\Delta u=0,\\ ku_\rho|_{\rho=\rho_0}=q_0, u|_{\rho=0}\text{有限},\\ u|_{z=0}=u_0, u|_{z=L}=u_0.\end{cases}$$

边界条件全是非齐次的,不便应用分离变数法. 移动温标零点,令

$$u=u_0+v,$$

问题转化为 v 的定解问题,上下底面具有齐次边界条件:

$$\begin{cases}\Delta v=0,\\ kv_\rho|_{\rho=\rho_0}=q_0, v|_{\rho=0}\text{有限}, & (11.4.7)\\ v|_{z=0}=0, v|_{z=L}=0. & (11.4.8)\end{cases}$$

这是圆柱内部的拉普拉斯方程定解问题. 上下底为齐次边界条件,应查表 § 9.1 末的表中 $\mu\leqslant 0$ 的部分.

对于 $\mu<0$,计及 i)柱轴上的自然边界条件,ii)问题与 φ 无关即 $m=0$,查得

$$I_0(\nu^2\rho)\begin{Bmatrix}\cos\nu^2 z\\ \sin\nu^2 z\end{Bmatrix}.$$

上下底齐次边界条件(11.4.8)决定 $\cos\nu^2 z$ 应舍弃,本征值 $\nu^2=p^2\pi^2/L^2$(p 为自然数).

对于 $\nu=0$,计及 i)柱轴上自然边界条件,ii)问题与 φ 无关,查得

$$R(\rho)=1,\quad Z(z)=\begin{Bmatrix}1\\ z\end{Bmatrix}.$$

上下底的第一类齐次边界条件(11.4.8)导致没有意思的 $Z(z)=0$. 所以 $\nu=0$ 的情况应舍弃.

将以上特解叠加起来,

$$v = \sum_{p=1}^{\infty} A_p \mathrm{I}_0\left(\frac{p\pi}{L}\rho\right) \sin\frac{p\pi z}{L}. \qquad (11.4.9)$$

为确定系数 A_p，将(11.4.9)代入柱侧边界条件(11.4.7)，

$$\sum_{p=1}^{\infty} A_p \frac{p\pi}{L} \mathrm{I}'_0\left(\frac{p\pi}{L}\rho_0\right) \sin\frac{p\pi z}{L} = \frac{q_0}{k}.$$

把上式右端展为傅里叶正弦级数，然后比较两边系数，即得

$$\begin{aligned} A_p &= \frac{L}{p\pi} \frac{1}{\mathrm{I}'_0(p\pi\rho_0/L)} \frac{2}{L}\int_0^L \frac{q_0}{k}\sin\frac{p\pi z}{L}\mathrm{d}z \\ &= \frac{2Lq_0}{p^2\pi^2 k} \frac{1}{\mathrm{I}'_0(p\pi\rho_0/L)}[1-(-1)^p]. \end{aligned}$$

只有当 p 为奇数 $2l+1$ 时，A_p 才不为零.

于是，最后答案

$$u = u_0 + \frac{4Lq_0}{k\pi^2}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)^2} \frac{1}{\mathrm{I}'_0\left(\dfrac{(2l+1)\pi\rho_0}{L}\right)}$$

$$\mathrm{I}_0\left(\frac{(2l+1)\pi\rho}{L}\right) \sin\frac{(2l+1)\pi z}{L}.$$

例 2 匀质圆柱，半径 ρ_0，高 L. 柱侧有均匀分布的恒定热流入，其强度为 q_0. 圆柱上下底面温度分布分别保持为 $f_2(\rho)$ 和 $f_1(\rho)$. 求解柱内稳定温度分布.

解 取柱坐标系如上例. 定解问题是

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u_\rho|_{\rho=\rho_0} = q_0, \quad u|_{\rho=0} \text{有限}, \\ u|_{z=0} = f_1(\rho), \quad u|_{z=L} = f_2(\rho). \end{cases}$$

边界条件全是非齐次的，不便应用分离变数法. 移动温标零点也不能解决问题. 常用的办法是把 u 分解为 v 和 w，使 v 和 w 各有一组齐次边界条件. 这是说，令

$$u = v + w$$

$$\begin{cases}\Delta v=0,\\ kv_\rho|_{\rho=\rho_0}=q_0,\\ v|_{\rho=0}\text{有限},\\ v|_{z=0}=0,\\ v|_{z=L}=0;\end{cases}\qquad\begin{cases}\Delta w=0,\\ kw_\rho|_{\rho=\rho_0}=0,\\ w|_{\rho=0}\text{有限},\\ w|_{z=0}=f_1(\rho),\\ w|_{z=L}=f_2(\rho).\end{cases}$$

读者可以验证，把 v 和 w 的泛定方程叠加起来确是 u 的泛定方程，把 v 和 w 的相应定解条件叠加起来确是 u 的定解条件.

v 和 w 的定解问题已分别在本节例 1 和 §11.2 例 4 解出.

例 3 半径 ρ_0 而高 L 的导体圆柱壳，用不导电的物质将柱壳的上下底面与侧面隔离开来. 柱壳侧面电势为 u_0z/L，上底面电势为 u_1，下底面接地. 求柱壳外静电场的电势分布.

解 取柱坐标系如前两例. 柱壳外的空间没有电荷，静电势满足拉普拉斯方程. 定解问题是

$$\begin{cases}\Delta u=0,\quad(\rho>\rho_0)\\ u|_{\rho=\rho_0}=u_0z/L,\quad u|_{\rho\to\infty}\text{有限},\\ u|_{z=0}=0,\quad u|_{z=L}=u_1.\end{cases}$$

边界全是非齐次的，不便应用分离变数法. 不过，我们也无需采用例 2 的一般办法. 下面的方法较为简便，

$$u=\frac{u_1z}{L}+w,\tag{11.4.10}$$

问题转化为 w 的定解问题

$$\begin{cases}\Delta w=0,\\ w|_{\rho=\rho_0}=\dfrac{u_0-u_1}{L}z,\quad w|_{\rho\to\infty}\text{有限},\\ w|_{z=0}=0,\quad w|_{z=L}=0.\end{cases}\tag{11.4.11, 11.4.12}$$

这是拉普拉斯方程的定解问题，上下底面为齐次边界条件，应查看 §9.1 末的表中 $\mu\leqslant0$ 的部分. 计及问题与 φ 无关，从 $\mu=0$ 查得

$$R(\rho)=\begin{Bmatrix}1\\ \ln\rho\end{Bmatrix},Z(z)=\begin{Bmatrix}1\\ z\end{Bmatrix}.$$

上下底第一类齐次边界条件(11.4.12)导致没有意思的 $Z(z)=0$，故应舍弃. 从 $\mu<0$ 查得

$$\begin{Bmatrix}\mathrm{I}_0(x)\\ \mathrm{K}_0(x)\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\cos\nu z\\ \sin\nu z\end{Bmatrix}, \quad (x=\nu\rho)$$

上下底第一类齐次边界条件(11.4.12)决定应舍弃 $\cos\nu z$，本征值 $\nu^2=p^2\pi^2/L^2$（p 为自然数）. 当 $\rho\to\infty$，要求 w 有限，这就排除了 $\mathrm{I}_0(x)$.

将以上特解叠加起来，

$$w=\sum_{p=1}^{\infty}A_p\mathrm{K}_0\left(\frac{p\pi}{L}\rho\right)\sin\frac{p\pi z}{L}. \tag{11.4.13}$$

为确定系数 A_p 将(11.4.13)代入 $\rho=\rho_0$ 处的边界条件(11.4.11)，

$$\sum_{p=1}^{\infty}A_p\mathrm{K}_0\left(\frac{p\pi}{L}\rho_0\right)\sin\frac{p\pi z}{L}=\frac{u_0-u_1}{L}z.$$

将上式右端展为傅里叶正弦级数，比较两边系数，即得

$$\begin{aligned}A_p&=\frac{1}{\mathrm{K}_0(p\pi\rho_0/L)}\frac{2}{L}\int_0^L\frac{u_0-u_1}{L}z\sin\frac{p\pi z}{L}\mathrm{d}z\\ &=(-1)^p\frac{2(u_0-u_1)}{p\pi\mathrm{K}_0(p\pi\rho_0/L)}.\end{aligned} \tag{11.4.14}$$

这样，本例的答案是(11.4.10)，其中 w 见(11.4.13)，系数 A_p 见(14.4.14).

习　题

1. 匀质圆柱半径为 ρ_0、高为 L. 下底保持温度 u_1，上底保持温度 u_2，侧面温度分布为 $f(z)=(2u_2/L^2)(z-L/2)+(u_1/L)(L-z)$. 求解柱体内各点的稳恒温度.

2. 匀质圆柱半径为 ρ_0、高为 L. 上底有均匀分布的强度为 q_0 的热流进入，下底保持温度 u_0，侧面温度分布为 $f(z)$，求解柱体内各点的稳恒温度.

3. 电子光学透镜的某一部件由两个中空圆柱筒组成，其电势分别为＋

v_0 和 $-v_0$. 在圆柱中间隙缝的边缘处电势可近似表为 $v=v_0\sin\frac{\pi z}{2\delta}$. 求圆柱筒内的电势分布. 圆柱两端边界条件可近似表为 $v|_{z=\pm l}=\mp v_0$. 圆柱筒的半径为 ρ_0.

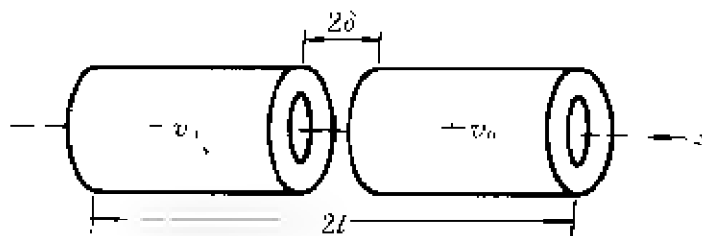


图 11-9

4. 利用虚宗量贝塞尔函数重解 § 11.2 的习题 6.

5. 匀质圆柱, 半径为 ρ_0, 高为 L. 下底保持温度 u_1, 上底温度分布为 $u_2\rho^2$, 侧面温度分布为 $u_0 z$. 求解柱体内各点的稳恒温度.

6. 半径为 ρ_0、高为 L 的圆柱, 上底绝热, 下底保持温度 u_0, 侧面有均匀分布的强度为 q_0 的热流进入, 求柱外匀质介质中各点的稳恒温度.

§ 11.5 球贝塞尔方程

§ 9.1 用球坐标系对亥姆霍兹方程进行分离变数, 得到球贝塞尔方程(9.1.38)

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2}+2r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}+[k^2r^2-l(l+1)]R=0. \qquad (11.5.1)$$

把自变数 r 和函数 $R(r)$ 分别变换作 x 和 $y(x)$

$$x=kr, \qquad R(r)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}y(x), \qquad (11.5.2)$$

则方程(11.5.1)化为 $l+1/2$ 阶贝塞尔方程

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+[x^2-(l+\frac{1}{2})^2]y=0. \qquad (11.5.3)$$

如若 $k=0$, 则方程(11.5.1)退化为

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2}+2r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}-l(l+1)R=0,$$

其线性独立的两解是 r^l 和 $1/r^{l+1}$. 这种情况比较简单, 下面将着重

讨论 $k\neq 0$ 的情况.

（一）线性独立解

$l+1/2$ 阶贝塞尔方程(11.5.3)有如下几种解

$$J_{l+1/2}(x),J_{-(l+1/2)}(x),N_{l+1/2}(x),H^{(1)}_{l+1/2}(x),H^{(2)}_{l+1/2}(x).$$

其中任取两个就组成方程(11.5.3)的线性独立解.这样,球贝塞尔方程(11.5.1)的线性独立解也就是下列五种之中任取的两种：

球贝塞尔函数 $j_l(x)=\sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}J_{l+1/2}(x)$, $j_{-l}(x)=\sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}J_{-l+1/2}(x)$;

球诺伊曼函数 $n_l(x)=\sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}N_{l+1/2}(x)$;

球汉克尔函数 $h_l^{(1)}(x)=\sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}H^{(1)}_{l+1/2}(x)$,

$$h_l^{(2)}(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}H^{(2)}_{l+1/2}(x).$$

（二）递推公式

用 $z_l(x)$代表球贝塞尔函数或球诺伊曼函数或球汉克尔函数,即

$$z_l(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}Z_{l+1/2}(x). \tag{11.5.4}$$

取(11.1.13),置 $\nu=l+1/2$,得

$$Z_{l+3/2}(x)-(2l+1)Z_{l+1/2}(x)/x+Z_{l-1/2}(x)=0$$

按(11.5.4)将 Z 改用 z 表出,则

$$z_{l+1}(x)=\frac{2l+1}{x}z_l-z_{l-1}. \tag{11.5.5}$$

这就是从 z_{l-1}和 z_l 推算 z_{l+1}的公式.(11.1.8)～(11.1.12)也都可以改用 z 表出.

（三）初等函数表示式

(9.3.28)和(9.3.29)给出 $J_{1/2}(x)$和 $J_{-1/2}(x)$的初等函数表示式

$$J_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x, \quad J_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x.$$

按(11.5.4),这是说

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad j_{-1}(x) \frac{\cos x}{x}. \tag{11.5.6}$$

于是,反复应用递推公式,我们就得出所有 $j_l(x)$ 的初等函数表示式.

至于半奇数阶的诺伊曼函数,按定义(9.3.24),

$$N_{l+1/2}(x)=\frac{J_{l+1/2}(x)\cos(l+1/2)\pi - J_{-(l+1/2)}(x)}{\sin(l+1/2)\pi}$$
$$= (-1)^{l+1}J_{-(l+1/2)}(x).$$

改用球诺伊曼函数 $n_l(x)$ 和球贝塞尔函数 $j_{-(l+1)}(x)$ 表出,

$$n_l(x) = (-1)^{l+1}j_{-(l+1)}(x). \tag{11.5.7}$$

在上式中,依次置 $l=0$ 和 $l=-1$ 即得

$$n_0(x) = -\frac{\cos x}{x}, \quad n_{-1}(x) = \frac{\sin x}{x}. \tag{11.5.8}$$

对(11.5.6)和(11.5.8)分别反复应用递推公式,得到

$$j_0(x)=\frac{1}{x}\sin x,$$
$$j_1(x)=\frac{1}{x^2}(\sin x - x\cos x),$$
$$j_2(x)=\frac{1}{x^3}[3(\sin x - x\cos x) - x^2\sin x],$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

$$n_0(x)=-\frac{1}{x}\cos x,$$
$$n_1(x)=-\frac{1}{x^2}(\cos x + x\sin x),$$
$$n_2(x)=-\frac{1}{x^3}[3(\cos x + x\sin x) - x^2\cos x],$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

附录九有 $j_0(x)$ 和 $j_1(x)$ 的简单的函数表.

由球汉克尔函数的定义,显而易见

$$h_l^{(1)}(x) = j_l(x) + i n_l(x), \quad h_l^{(2)}(x) = j_l(x) - i n_l(x). \tag{11.5.9}$$

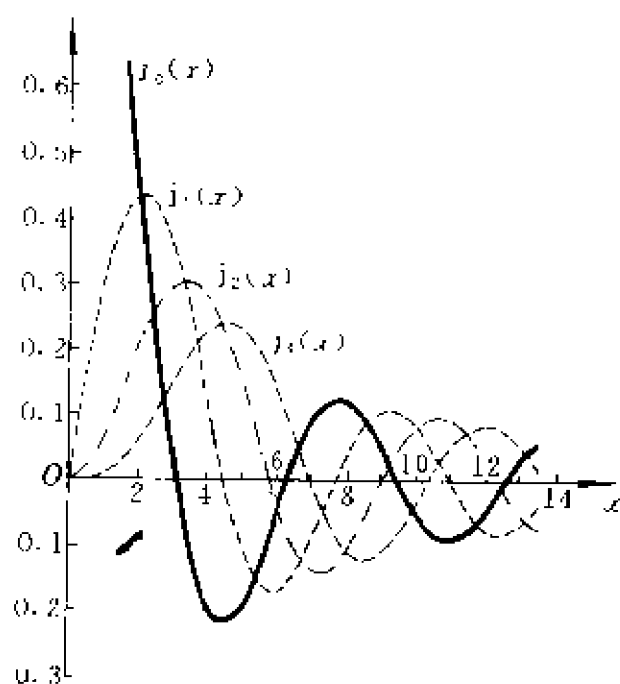


图 11-10

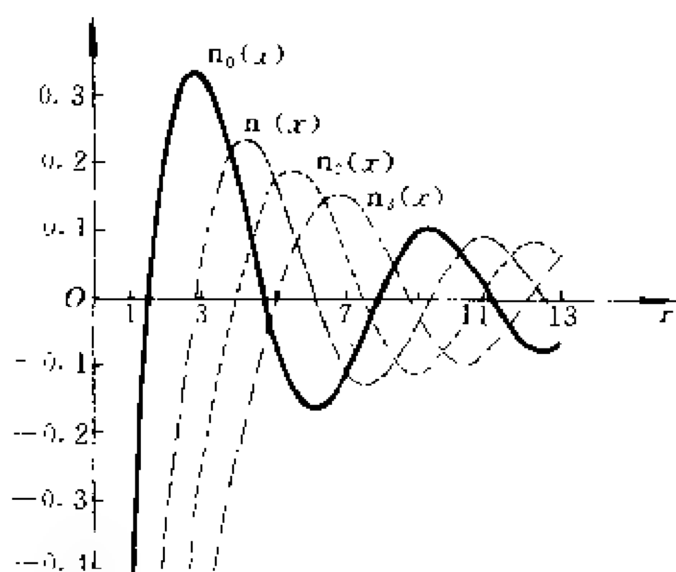


图 11-11

由此易得球汉克尔函数的初等函数表示式

$$h_0^{(1)}(x)=-\frac{i}{x}e^{ix},$$

$$h_1^{(1)}(x)=\left(-\frac{i}{x^2}-\frac{1}{x}\right)e^{ix},$$

$$h_2^{(1)}(x)=\left(-\frac{3i}{x^3}-\frac{3}{x^2}+\frac{i}{x}\right)e^{ix},$$

$$\cdots\cdots$$

$$h_0^{(2)}(x)=\frac{i}{x}e^{-ix},$$

$$h_1^{(2)}(x)=\left(\frac{i}{x^2}-\frac{1}{x}\right)e^{-ix},$$

$$h_2^{(2)}(x)=\left(\frac{3i}{x^3}-\frac{3}{x^2}-\frac{i}{x}\right)e^{-ix}.$$

$$\cdots\cdots$$

（四）$x\to 0$ 和 $x\to\infty$ 时的行为

先看 $x\to 0$. 引用 $J_{l+1/2}(x)$ 的级数表达式(9.3.31),

$$j_l(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}x^{-1/2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\Gamma(l+k+3/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{l+1/2+2k}$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\Gamma(l+k+3/2)}\left(\frac{1}{2}\right)^{l+1/2+2k}x^{l+2k}.$$

我们把 l 理解为非负的整数,这个级数只含 x 的正幂项,可见 $j_0(0)=1, j_l(0)=0$(l 为自然数). 又由(11.5.7),

$$n_l(x)=(-1)^{l+1}j_{-(l+1)}(x)=(-1)^{l+1}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$$

$$\frac{1}{k!\Gamma(-l+k+1/2)}\left(\frac{1}{2}\right)^{-l-\frac{1}{2}+2k}x^{-l+2k-1}.$$

其中既有 x 的正幂项,也有 x 的负幂项,可见

$$\text{当 } x\to 0 \text{ 时},\quad n_l(x)\to\infty.$$

这样,在 $x=0$ 存在自然的边界条件,应舍弃 $n_l(x)$,而只要 $j_l(x)$.

再看 $x\to\infty$. 引用渐近公式(11.1.5),

$$j_l(x)\sim\frac{1}{x}\cos\left(x-\frac{l+1}{2}\pi\right),\qquad n_l(x)\sim\frac{1}{x}\sin\left(x-\frac{l+1}{2}\pi\right),$$

$$h_l^{(1)}(x)\sim\frac{1}{x}e^{ix}(-i)^{l+1},\qquad h_l^{(2)}(x)\sim\frac{1}{x}e^{-ix}i^{l+1}.$$

§9.1 末的表中,从波动方程分离出的时间因子是 $e^{ik\omega t}$ 和 $e^{-ik\omega t}$. 如

把时间因子 $e^{-i\omega t}$ 分别附在上面四个渐近公式之后，则 $\mathrm{j}_l(x)$ 和 $\mathrm{n}_l(x)$ 对应于驻波，$\mathrm{h}_l^{(1)}(x)$ 对应于朝 $+x$ 方向（$+r$ 方向）传播的波，即从球坐标系极点向外发散的波，$\mathrm{h}_l^{(2)}(x)$ 对应于向球坐标系极点会聚的波. 如以 $e^{i\omega t}$ 代替 $e^{-i\omega t}$，则 $\mathrm{j}_l(x)$ 和 $\mathrm{n}_l(x)$ 仍然对应驻波，$\mathrm{h}_l^{(1)}$ 则对应会聚波，$\mathrm{h}_l^{(2)}$ 对应发散波.

***（五）球形区域内的本征值问题**

球贝塞尔方程(11.5.1)写成施图姆-刘维尔型即是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)-l(l+1)R+k^2r^2R=0.$$

请注意左边最后一项的系数 k^2r^2，这 k^2 是本征值，r^2 是权重函数.

这方程在 $r=0$ 有自然边界条件，应取 $\mathrm{j}_l(kr)$ 而舍弃 $\mathrm{n}_l(kr)$. 而 $\mathrm{j}_l(kr)$ 还应满足球面 $r=r_0$ 上的第一、第二或第三类齐次边界条件，这就决定了本征值 $k_m(m=1,2,3,\cdots)$. 决定本征值的边界条件往往可以化为 $\mathrm{J}_{l+1/2}(kr)$ 的条件来求解.

对应不同本征值的本征函数在区间 $[0,r_0]$ 上带权重 r^2 正交，

$$\int_0^{r_0}\mathrm{j}_l(k_mr)\mathrm{j}_l(k_nr)r^2\mathrm{d}r=0.\quad(k_m\neq k_n)\qquad(11.5.10)$$

本征函数族 $\mathrm{j}_l(k_mr)(m=1,2,3,\cdots)$ 是完备的，可作为广义傅里叶级数展开的基，

$$\begin{cases}f(r)=\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}f_m\mathrm{j}_l(k_mr),\\ \text{系数 } f_m=\dfrac{1}{[N_m]^2}\displaystyle\int_0^{r_0}f(r)\mathrm{j}_l(k_nr)r^2\mathrm{d}r,\end{cases}$$

式中 N_m 是本征函数 $\mathrm{j}_l(k_mr)$ 的模，

$$[N_m]^2=\int_0^{r_0}[\mathrm{j}_l(k_mr)]^2r^2\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2k_m}\int_0^{r_0}[\mathrm{J}_{l+1/2}(k_nr)]^2r\mathrm{d}r.$$

具体计算方法可参看附录九.

（六）例题

例 1 匀质球，半径为 r_0. 初始时刻，球体温度均匀为 u_0. 把它放入温度为 U_0 的烘箱，使球面温度保持为 U_0. 求解球内各处温度

u 的变化情况.

解 取球坐标系，极点在球心. 定解问题是

$$\begin{cases} u_t - a^2 \Delta u = 0, \\ u|_{r=r_0} = U_0, \\ u|_{t=0} = u_0. \end{cases}$$

首先把边界条件化为齐次. 为此，移动温标零点，

$$u = U_0 + w,$$

$$\begin{cases} w_t - a^2 \Delta w = 0, \\ w|_{r=r_0} = 0, & (11.5.11) \\ w|_{t=0} = u_0 - U_0. & (11.5.12) \end{cases}$$

查看 § 9.1 末的表. 计及 i)问题与 φ 无关即 $m=0$, ii)问题与 θ 无关即 $l=0$, iii)球心的自然边界条件，查得 $k \neq 0$ 的

$$j_0(kr) e^{-k^2 a^2 t}.$$

至于 $k=0$ 的 $r^0 P_0(\cos\theta) e^{-at}$ 即常数，不可能满足边界条件(11.5.11)，故应舍弃. 这样，我们应考虑的特解只有

$$\frac{\sin kr}{kr} e^{-k^2 a^2 t}. \qquad (11.5.13)$$

为确定本征值 k，把(11.5.13)代入齐次边界条件(11.5.11)

$$\frac{\sin kr_0}{kr_0} e^{-k^2 a^2 t} = 0.$$

由此得本征值

$$k_n = \frac{n\pi}{r_0}. \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

把对应这些本征值的特解叠加起来，

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\sin(n\pi r/r_0)}{n\pi r/r_0} e^{-(n\pi/r_0)^2 a^2 t}. \qquad (11.5.14)$$

为确定系数 A_n，把(11.5.14)代入初始条件(11.5.12)，

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\sin(n\pi r/r_0)}{n\pi r/r_0} = u_0 - U_0.$$

把右边的(u_0-U_0)按球贝塞尔函数展开，比较两边系数，

$$A_n=\int_0^{r_0}(u_0-U_0)\frac{\sin(n\pi r/r_0)}{n\pi r/r_0}r^2\mathrm{d}r\Big/\int_0^{r_0}\left[\frac{\sin(n\pi r/r_0)}{n\pi r/r_0}\right]^2 r^2\mathrm{d}r$$

$$=(-1)^n 2(U_0-u_0).$$

这样，本例的答案是

$$u=U_0+\frac{2(U_0-u_0)}{\pi r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\mathrm{e}^{-n^2\pi^2a^2t/r_0}\sin\frac{n\pi r}{r_0}.$$

例 2 半径为 r_0 的球面径向速度分布为

$$v=v_0\cos\theta\cos\omega t. \tag{11.5.15}$$

试求解这球面所发射的稳恒声振动的速度势 u. 设 ρ_0 远小于声波的波长 λ.

由于(11.5.15)中的 $\cos\theta$ 即 $P_1(\cos\theta)$，本例称为偶极声源.

解 本例跟§11.2 例 8 类似，也是没有初始条件的问题.

用球坐标系，极点取在球心. 定解问题是

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2\Delta u=0 \\ u_r|_{r=r_0}=v_0P_1(\cos\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}. \end{cases} \tag{11.5.16}$$

边界条件里的 $\cos\omega t$ 即 $\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t})$. 写成了 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$，这要求约定计算的最后结果也应取其实部.

查看§9.1 末的表. 计及 i)问题与 φ 无关，$m=0$，ii)u 对 θ 的依赖关系为 $P_1(\cos\theta)$即 $l=1$，iii)边界条件中的时间因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$，查得

$$\mathrm{h}_1^{(1)}(kr)\mathrm{P}_1(\cos\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}.$$

且 $ka=\omega$，即 $k=\omega/a$. 本例的 k 只有 ω/a 这个唯一的值，所以无需叠加，

$$u=A\mathrm{h}_1^{(1)}\left(\frac{\omega}{a}r\right)\mathrm{P}_1(\cos\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}. \tag{11.5.17}$$

为了确定系数 A，把(11.5.17)代入边界条件(11.5.16)，

$$A\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\quad\mathrm{i}\frac{a^2}{\omega^2r^2}\quad\frac{a}{\omega r}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega r/a}\right]_{r=r_0}=v_0,$$

即
$$\frac{\omega}{a}A\left(\mathrm{i}\,\frac{2a^3}{\omega^3 r_0^3}+\frac{2a^2}{\omega^2 r_0^2}-\mathrm{i}\,\frac{a}{\omega r_0}\right)=v_0.$$
因 $r_0 \ll \lambda = 2\pi/k = 2\pi a/\omega$，即 $\omega r_0/a$ 很小，所以上式(　)中第一项的绝对值远大于其余两项，上式可简化为
$$\mathrm{i}A\,\frac{2a^2}{\omega^2 r_0^3}=v_0.$$
由此，$A=-\mathrm{i}v_0\omega^2 r_0^3/2a^2$. 于是得出答案
$$\begin{aligned}u&=-\mathrm{i}\,\frac{v_0\omega^2 r_0^3}{2a^2}\mathrm{h}_1^{(1)}\left(\frac{\omega}{a}r\right)\mathrm{P}_1(\cos\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\\&=-\mathrm{i}\,\frac{v_0\omega^2 r_0^3}{2a^2}\left(-\mathrm{i}\,\frac{a^2}{\omega^2 r^2}-\frac{a}{\omega r}\right)\mathrm{P}_1(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega}{a}(r-at)}.\end{aligned}$$
在远场区即 r 大的地方，用本节(四)的渐近公式，
$$u=\mathrm{i}\,\frac{v_0\omega r_0^3}{2ar}\mathrm{P}_1(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega}{a}(r-at)}.$$
取实部，
$$u=-\frac{v_0\omega r_0^3}{2ar}\mathrm{P}_1(\cos\theta)\sin\frac{\omega}{a}(r-at).$$
这是振幅按 $1/r$ 减小的球面波. 其对空间中方向的依赖也由 $\mathrm{P}_1(\cos\theta)$ 描写，因而是偶极声场.

（七）平面波展开为球面波的叠加

研究波(声波、电磁波、量子力学的波函数)的散射问题，常常需要把平面波展开为球面波的叠加.

函数 $v=\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}$ 显然满足亥姆霍兹方程 $\Delta_3 v+k^2 v=0$，因而代表波动. 事实上，补上时间因子 $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}kat}$，它就成为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(z\pm at)}$，这是沿 z 轴负和正方向传播的平面波. 改用球坐标，这平面波可表为
$$v(r,\theta)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta}. \tag{11.5.18}$$
在球坐标系中，亥姆霍兹方程 $\Delta_3 v+k^2 v=0$ 的分离变数形式而又在 $r=0$ 为有限的解是
$$\mathrm{j}_l(kr)\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{Bmatrix}. \tag{11.5.19}$$
这是各种模式的球面波. 平面波(11.5.18)作为亥姆霍兹方程的解必可表为

球面波的线性叠加，考虑到函数(11.5.18)跟 φ 无关，应限制 $m=0$. 这样，

$$e^{ikr\cos\theta}=\sum_{l=0}^{\infty}A_l j_l(kr)P_l(\cos\theta). \qquad (11.5.20)$$

问题在于确定展开式(11.5.20)的系数 A_l.

应用系数公式(10.1.18)，

$$A_l j_l(kr)=\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{+1}e^{ikrx}P_l(x)dx, \qquad (11.5.21)$$

式中按照惯例把 $\cos\theta$ 写成 x(x 并不是直角坐标). 只要算出(11.5.21)右边的积分，就可确定 A_l.

这里不准备硬算. 试比较(11.5.21)两边在 $r\to\infty$ 时的渐近公式. 于 $r\to\infty$，(11.5.21)的左边

$$A_l j_l(kr)=A_l\sqrt{\frac{\pi}{2kr}}J_{l+\frac{1}{2}}(kr)\sim A_l\frac{1}{kr}\cos\left(kr-\frac{(l+1)\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{A_l}{2ikr}\left(e^{ikr-i\frac{l}{2}\pi}-e^{-ikr+i\frac{l}{2}\pi}\right).$$

再看(11.5.21)的右边

$$\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{+1}e^{ikrx}P_l(x)dx$$

$$=\frac{2l+1}{2ikr}\int_{-1}^{+1}P_l(x)de^{ikrx}$$

$$=\frac{2l+1}{2ikr}[P_l(x)e^{ikrx}]_{-1}^{+1}-\frac{2l+1}{2ikr}\int_{-1}^{+1}e^{ikrx}P'_l(x)dx.$$

于 $r\to\infty$，上式右边已积出部分为 $1/r$ 的数量级，尚未积出部分如仿照上面分部积分一次可知为 $1/r^2$ 的数量级. 因此，于 $r\to\infty$，(11.5.21)的右边

$$\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{+1}e^{ikrx}P_l(x)dx\sim\frac{2l+1}{2ikr}[P_l(1)e^{ikr}-P_l(-1)e^{-ikr}]$$

$$=\frac{2l+1}{2ikr}[e^{ikr}-e^{-ikr}(-1)^l]=\frac{2l+1}{2ikr}e^{i\frac{l}{2}\pi}(e^{ikr-i\frac{l}{2}\pi}-e^{-ikr+i\frac{l}{2}\pi}).$$

比较两边的渐近公式即知

$$A_l=(2l+1)e^{i\frac{l}{2}\pi}=(2l+1)i^l.$$

把这代回(11.5.20)就得到平面波展开为球面波的叠加的公式

$$e^{-ikr\cos\theta}=\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l j_l(kr)P_l(\cos\theta). \qquad (11.5.22)$$

习　题

1. 证明

① $[x^3 \mathrm{j}_{-1}(x)\mathrm{j}_1(x)]' = x^3 \mathrm{j}_0(x)[\mathrm{j}_{-1}(x) - \mathrm{j}_1(x)] = x^2[x\mathrm{j}_0^2(x)]'$

② $\int x^2 \mathrm{j}_0^2(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^3[\mathrm{j}_0^2(x) - \mathrm{j}_{-1}(x)\mathrm{j}_1(x)] + C$

2. 证明

① $[x^3 \mathrm{j}_{l-1}(x)\mathrm{j}_{l+1}(x)]' = x^3 \mathrm{j}_l(x)[\mathrm{j}_{l-1}(x) - \mathrm{j}_{l+1}(x)] = x^2[x\mathrm{j}_l^2(x)]'$

② $\int x^2 \mathrm{j}_l^2(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^3[\mathrm{j}_l^2(x) - \mathrm{j}_{l-1}(x)\mathrm{j}_{l+1}(x)] + C.$

[提示：将(11.5.4)代入(11.1.8)、(11.1.9)得出跟 $\mathrm{j}_l(x)$ 有关的求导公式，利用之]

3. 确定球形铀块的临界半径.[“临界”一词参看 § 36 习题 8]

4. 均质球，半径为 r_0，初始温度分布为 $f(r)$. 把球面温度保持为零度而使它冷却. 求解球内各处温度变化情况.

5. 均质球，半径为 r_0，初始温度分布为 $f(r)\cos\theta$. 把球面温度保持为零度而使它冷却. 求解球内各处温度变化情况.

6. 半径为 $2r_0$ 的均质球. 初始温度 $= \begin{cases} u_0 (0<r<r_0) \\ 0 (r_0<r<2r_0). \end{cases}$ 把球面保持为零度而使它冷却. 求解球内温度变化情况.

7. 均质球，半径为 r_0，初始温度为 U_0. 放在温度为 u_0 的空气中自由冷却(按照牛顿冷却定律跟空气交换热量)，求解球内各处温度变化情况.

8. 半径为 r_0 的球面径向速度分布为 $v = v_0 \frac{1}{4}(3\cos 2\theta + 1)\cos\omega t$. 试求解这个球在空气中辐射出去的声场中的速度势，设 $r_0 \ll$ 波长 λ. 本题径向速度对空间中的方向的依赖性由因子 $\frac{1}{4}(3\cos 2\theta + 1)$ 即 $P_2(\cos\theta)$ 描写，因而是轴对称四极声源.

9. 半径为 r_0 的球面径向速度分布为 $v = v_0 \frac{3}{2}(1 - \cos 2\theta)\sin 2\varphi\cos\omega t$. 试求解这个球在空气中辐射出去的声场中的速度势，设 $r_0 \ll \lambda$. 本题是非轴对称的四极声源.

* § 11.6　可化为贝塞尔方程的方程

有些常微分方程可以化为贝塞尔方程，其解也就可以用柱函

数表示. 下面是一些例子. 至于什么样的方程可以化为贝塞尔方程, 以及如何化, 可参看大学物理 1987 年第 10 期“特殊函数常微分方程的常用变换”一文.

$$y''+\frac{1-2\alpha}{x}y'+\left(\beta^2+\frac{\alpha^2-m^2}{x^2}\right)y=0,\quad y=x^\alpha Z_m(\beta x).$$

$$y''+\frac{1}{x}y'+\left[(\beta\gamma x^{\gamma-1})^2-\left(\frac{m\gamma}{x}\right)^2\right]y=0,\quad y=Z_m(\beta x^\gamma).$$

$$y''+\frac{1-2\alpha}{x}y'+\left[(\beta\gamma x^{\gamma-1})^2+\frac{\alpha^2-m^2\gamma^2}{x^2}\right]y=0,\quad y=x^\alpha Z_m(\beta x^\gamma).$$

$$y''+\frac{1}{x}y'+\left(i-\frac{m^2}{x^2}\right)y=0,\quad y=Z_m(x\sqrt{\mathrm{i}}).$$

$$y''+\frac{1}{x}y'-\left(i+\frac{m^2}{x^2}\right)y=0,\quad y=Z_m(x\sqrt{-\mathrm{i}}).$$

$$y''+\frac{1}{x}y'-\left[\frac{1}{x}+\left(\frac{m}{2x}\right)^2\right]y=0,\quad y=Z_m(2\mathrm{i}\sqrt{x}).$$

$$y''+bx^m y=0,\quad y=\sqrt{x}Z_{1/(m+2)}\left(\frac{2\sqrt{b}}{m+2}x^{(m+2)/2}\right).$$

$$y''+\left(\frac{2m+1}{x}-k\right)y'-\frac{2m+1}{2x}ky=0,\quad y=x^{-m}e^{kx/2}Z_m(\mathrm{i}kx/2).$$

$$y''+\left(\frac{1}{x}-2\mathrm{tg}x\right)y'-\left(\frac{m^2}{x^2}+\frac{\mathrm{tg}x}{x}\right)y=0,\quad y=\frac{1}{\cos x}Z_m(x).$$

$$y''+\left(\frac{1}{x}+2\mathrm{ctg}x\right)y'-\left(\frac{m^2}{x^2}-\frac{\mathrm{ctg}x}{x}\right)y=0,\quad y=\frac{1}{\sin x}Z_m(x).$$

$$y''+\left(\frac{1}{x}-2u\right)y'+\left(1-\frac{m^2}{x^2}+u^2-u'-\frac{u}{x}\right)y=0,\quad y=e^{\int u\mathrm{d}x}Z_m(x).$$

第十二章　格林函数　解的积分公式

在第七章至第十一章中主要介绍用分离变数法求解各类定解问题，本章将介绍另一种常用的方法——格林函数方法.

格林函数，又称点源影响函数，是数学物理中的一个重要概念. 格林函数代表一个点源在一定的边界条件和(或)初始条件下所产生的场. 知道了点源的场，就可以用迭加的方法计算出任意源所产生的场.

§12.1　泊松方程的格林函数法

为了得到以格林函数表示的泊松方程解的积分表示式，需要用到格林公式，为此，我们首先介绍格林公式.

设 $u(\boldsymbol{r})$和 $v(\boldsymbol{r})$在区域 T 及其边界 Σ 上具有连续一阶导数，而在 T 中具有连续二阶导数，应用矢量分析的高斯定理将曲面积分

$$\iint_{\Sigma} u\ \nabla v\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

化成体积积分

$$\begin{aligned}&\iint_{\Sigma} u\ \nabla v\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\\ =&\iiint_{T} \nabla\cdot(u\ \nabla v)\mathrm{d}V\\ =&\iiint_{T} u\Delta v\mathrm{d}V+\iiint_{T}\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}V.\end{aligned}\qquad(12.1.1)$$

这叫作**第一格林公式**. 同理，又有

$$\oiint_{\Sigma} v\,\nabla u\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint_{T} v\Delta u \mathrm{d}V+\iiint_{T}\nabla u\cdot\nabla v \mathrm{d}V. \tag{12.1.2}$$

(12.1.1)与(12.1.2)两式相减，得

$$\oiint_{\Sigma}(u\,\nabla v-v\,\nabla u)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint_{T}(u\Delta v-v\Delta u)\mathrm{d}V,$$

亦即

$$\oiint_{\Sigma}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S=\iiint_{T}(u\Delta v-v\Delta u)\mathrm{d}V. \tag{12.1.3}$$

$\frac{\partial}{\partial n}$表示沿边界 Σ 的外法向求导数.(12.1.3)叫作**第二格林公式**.

现在讨论带有一定边界条件的泊松方程的求解问题.泊松方程是

$$\Delta u=f(\boldsymbol{r}), \qquad (\boldsymbol{r}\in T) \tag{12.1.4}$$

第一、第二、第三类边界条件可统一地表为

$$\left[\alpha\frac{\partial u}{\partial n}+\beta u\right]_{\Sigma}=\varphi(M), \tag{12.1.5}$$

其中 $\varphi(M)$是区域边界 Σ 上的给定函数.$\alpha=0,\beta\neq0$为第一类边界条件，$\alpha\neq0,\beta=0$是第二类边界条件，α、β 都不等于零是第三类边界条件.泊松方程与第一类边界条件构成的定解问题叫作**第一边值问题或狄里希利问题**，与第二类边界条件构成的定解问题叫作**第二边值问题或诺依曼问题**，与第三类边界条件构成的定解问题叫作**第三边值问题**.

为了研究点源所产生的场，需要找一个能表示点源密度分布的函数.§5.3中介绍的 δ 函数正是描述一个单位正点量的密度分布函数.因此，若以 $v(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)$表示位于 $\boldsymbol{r}_0$点的单位强度的正点源在 $\boldsymbol{r}$ 点产生的场，即 $v(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)$应满足方程

$$\Delta v(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0). \tag{12.1.6}$$

现在，我们利用格林公式导出泊松方程解的积分表示式.以 $v(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)$乘(12.1.4)，$u(\boldsymbol{r})$乘(12.1.6)，相减，然后在区域 T 中求积分，得

$$\iiint_T (v\Delta u - u\Delta v)\mathrm{d}V = \iiint_T vf\mathrm{d}V - \iiint_T u\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\mathrm{d}V. \tag{12.1.7}$$

应用格林公式将上式左边的体积分化成面积分.但是,注意到在 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0$ 点,Δv 具有 δ 函数的奇异性,格林公式不能用.解决的办法是先从区域 T 中挖去包含 $\boldsymbol{r}_0$ 的小体积,例如半径为 ε 的小球 K_ε(图12-1),K_ε 的边界面为 Σ_ε.对于剩下的体积,格林公式成立,

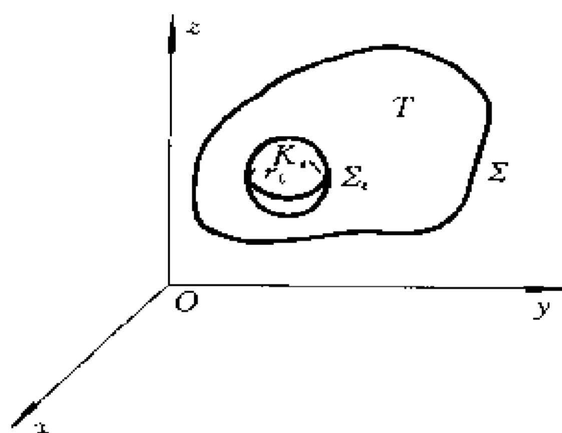


图12-1

$$\iiint_{T-K_\varepsilon} (v\Delta u - u\Delta v)\mathrm{d}V$$
$$= \iint_\Sigma \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)\mathrm{d}S + \iint_{\Sigma_\varepsilon} \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)\mathrm{d}S. \tag{12.1.8}$$

把(12.1.8)代入挖去 K_ε 的(12.1.7),并注意 $\boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{r}_0$,故 $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=0$,于是

$$\iint_\Sigma \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)\mathrm{d}S + \iint_{\Sigma_\varepsilon} \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)\mathrm{d}S$$
$$= \iiint_{T-K_\varepsilon} vf\mathrm{d}V. \tag{12.1.9}$$

当 $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|\ll 1$,方程(12.1.6)的解 $v(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)\longrightarrow$ 位于点 $\boldsymbol{r}_0$ 而电量为 $-\varepsilon_0$ 的点电荷的静电场中的电势,即 $-1/4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|$.令 $\varepsilon\to 0$,得

(12.1.9)右边 $\longrightarrow \iiint_T vf\mathrm{d}V$,

左边的 $\iint_{\Sigma_\varepsilon} v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S - \iint_{\Sigma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n}\left(-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\varepsilon}\right)\varepsilon^2\mathrm{d}\Omega$

$$=-\frac{\varepsilon}{4\pi}\iint_{\Sigma_\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}\Omega=-\varepsilon\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{r=r_0}\to 0$$

左边的 $\iint_{\Sigma_\varepsilon} u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}S=-\iint_{\Sigma_\varepsilon} u\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}S=-\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma_\varepsilon} u\frac{1}{r^2}\cdot r^2\mathrm{d}\Omega$

$$=-u(\boldsymbol{r}_0). \tag{12.1.10}$$

这样,(12.1.7)成为

$$u(\boldsymbol{r}_0)=\iiint_T v(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)f(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V-\iint_\Sigma\left[v(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)\frac{\partial u(\boldsymbol{r})}{\partial n}-u(\boldsymbol{r})\frac{\partial v(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)}{\partial n}\right]\mathrm{d}S. \tag{12.1.11}$$

(12.1.11)称为**泊松方程的基本积分公式**.

(12.1.11)将(12.1.4)的解 u 用区域 T 上的体积分及其边界上的面积分表示了出来.那么,能否用(12.1.11)来解决边值问题呢?我们看到,(12.1.11)中需要同时知道 u 及 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 在边界 Σ 上的值,但是,在第一边值问题中,已知的只是 u 在边界 Σ 上的值;在第二边值问题中,已知的只是 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 在边界 Σ 上的值.在第三边值问题中,已知的是 u 和 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 的一个线性关系在边界 Σ 上的值,三类边界条件均未同时分别给出 u 和 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 在边界 Σ 上的值.因此,我们还不能直接利用(12.1.11)解决三类边值问题.

其实,这里距离问题的解决已经很近了.原来,对于函数 $v(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)$,我们还只考虑其满足方程(12.1.6).如果我们对 $v(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)$ 提出适当的边界条件,则上述困难就得以解决.

对于第一边值问题,u 在边界 Σ 上的值是已知的函数 $\varphi(M)$.如果要求 v 满足齐次的第一类边界条件

$$v|_\Sigma=0, \tag{12.1.12}$$

则(12.1.11)中含 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 的一项等于零.从而不需要知道 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 在边界 Σ 上的值.满足方程(12.1.6)及边界条件(12.1.12)的解称为**泊松方**

程第一边值问题的格林函数，用 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)$ 表示. 这样，(12.1.11)式成为

$$u(\boldsymbol{r}_0)=\iiint_T G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)f(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V+\iint_\Sigma \varphi(\boldsymbol{r})\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)}{\partial n}\mathrm{d}S. \tag{12.1.13}$$

对于第三边值问题，令 v 满足齐次的第三类边界条件，

$$\left[\alpha\frac{\partial v}{\partial n}+\beta v\right]_\Sigma=0. \tag{12.1.14}$$

满足方程(12.1.6)及边界条件(12.1.14)的解称为**泊松方程第三类边值问题的格林函数**，也用 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)$ 表示. 以 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)$ 乘(12.1.5)式两边，得

$$\left[\alpha G\frac{\partial u}{\partial n}+\beta Gu\right]_\Sigma=G\varphi.$$

又以 u 乘(12.1.14)，并以 G 代替其中的 v，得

$$\left[\alpha u\frac{\partial G}{\partial n}+\beta Gu\right]_\Sigma=0.$$

将这两式相减，得

$$\alpha\left[G\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial G}{\partial n}\right]_\Sigma=G\varphi.$$

将此式代入(12.1.11)，得

$$u(\boldsymbol{r}_0)=\iiint_T G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)f(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V-\frac{1}{\alpha}\iint_\Sigma G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)\varphi(\boldsymbol{r})\mathrm{d}S. \tag{12.1.15}$$

至于第二边值问题，表面看来，似乎可以按上述同样的办法来解决，即令 G 为定解问题

$$\Delta G=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0), \tag{12.1.16}$$

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_\Sigma=0 \tag{12.1.17}$$

的解，而由(12.1.11)得到

$$u(\boldsymbol{r}_0)=\iiint_T G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)f(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V-\iint_\Sigma G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)\varphi(\boldsymbol{r})\mathrm{d}S.$$

(12.1.18)

可是,定解问题(12.1.16)～(12.1.17)的解不存在.这在物理上是容易理解的:不妨把这个格林函数看作温度分布.泛定方程(12.1.16)右边的 δ 函数表明在 Σ 所围区域 T 中有一个点热源.边界条件(12.1.17)表明边界是绝热的.点热源不停地放出热量.而热量又不能经由边界散发出去,T 里的温度必然要不停地升高,其分布不可能是稳定的.这就需要引入**推广的格林函数**.对于三维空间,

$$\Delta G=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)-\frac{1}{V_T},$$

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_\Sigma=0.$$

式中 V_T 是 T 的体积.对于二维空间,

$$\Delta G=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)-\frac{1}{A_T},$$

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_\Sigma=0.$$

式中 A_T 是 T 的面积,方程右边添加的项是均匀分布的热汇密度,这些热汇的总体恰好吸收了点热源所放出的热量,不多也不少.

(12.1.13)和(12.1.15)的物理解释有一个困难.公式左边 u 的宗量 $\boldsymbol{r}_0$表明观测点在 $\boldsymbol{r}_0$,而右边积分中的 $f(\boldsymbol{r})$表示源在 $\boldsymbol{r}$,可是,格林函数 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)$所代表的是 $\boldsymbol{r}_0$的点源在 $\boldsymbol{r}$ 点产生的场.这个困难如何解决呢?原来,这个问题里的格林函数具有对称性 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)=G(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r})$,将(12.1.13)和(12.1.15)中的 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}_0$对调,并利用格林函数的对称性,(12.1.13)成为

$$u(\boldsymbol{r})=\iiint_T G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)f(\boldsymbol{r}_0)\mathrm{d}V_0+\iint_\Sigma \varphi(\boldsymbol{r}_0)\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)}{\partial n}\mathrm{d}S_0,$$

(12.1.19)

这就是第一边值问题解的积分表示式. (12.1.15)成为

$$u(\boldsymbol{r})=\iiint_T G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)f(\boldsymbol{r}_0)\mathrm{d}V_0-\frac{1}{\alpha}\iint_\Sigma G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)\varphi(\boldsymbol{r}_0)\mathrm{d}S_0. \tag{12.1.20}$$

这就是第三边值问题解的积分表示式.

(12.1.19)和(12.1.20)的物理意义就很清楚了，右边第一个积分表示区域 T 中分布的源 $f(\boldsymbol{r}_0)$ 在 $\boldsymbol{r}$ 点产生的场的总和. 第二个积分则代表边界上的状况对 $\boldsymbol{r}$ 点场的影响的总和. 两项积分中的格林函数相同. 这正说明泊松方程的格林函数是点源在一定的边界条件下所产生的场.

现在来证明格林函数的对称性. 在 T 中任取两个定点 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$. 以这两点为中心，各作半径为 ε 的球面 Σ_1 和 Σ_2. 从 T 挖去 Σ_1 和 Σ_2 所围的球 K_1 和 K_2. 在剩下的区域 $T-K_1-K_2$ 上，$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1)$ 和 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_2)$ 并无奇点. 以 $u=G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1)$，$v=G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_2)$ 代入格林公式(12.1.3)

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S=\iiint_{T-K_1-K_2}(u\Delta v-v\Delta u)\mathrm{d}V$$

由于 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1)$ 和 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_2)$ 是调和函数，上式右边为零. 又由于格林函数的边界条件，上式左边 $\iint_\Sigma=0$. 这样

$$\iint_{\Sigma_1}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S+\iint_{\Sigma_2}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S=0.$$

令 $\varepsilon\to 0$，上式成为 $0-v(\boldsymbol{r}_1)+u(\boldsymbol{r}_2)-0=0$，即 $G(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)=G(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1)$.

对于拉普拉斯方程，即(12.1.4)式右边的 $f(\boldsymbol{r})\equiv 0$，这时，我们只要令(12.1.19)和(12.1.20)两式右边的体积分值等于零，便可得到拉普拉斯方程第一边值问题的解

$$u(\boldsymbol{r})=\iint_\Sigma \varphi(\boldsymbol{r}_0)\frac{\partial G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)}{\partial n}\mathrm{d}S_0 \tag{12.1.21}$$

以及第三边值问题的解

$$u(\boldsymbol{r})=-\frac{1}{\alpha}\iint_\Sigma G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)\varphi(\boldsymbol{r}_0)\mathrm{d}S_0 \tag{12.1.22}$$

我们看到，借助格林公式，也可利用格林函数方法得到齐次方程定解问题的解.

§12.2 用电像法求格林函数

(一) 无界空间的格林函数 基本解

从§12.1讨论可知，确定了 G，就能利用积分表式求得泊松方程边值问题的解. 虽然，求格林函数的问题本身也是边值问题，但这是特殊的边值问题，其求解比一般边值问题简单. 特别是对于无界区域的情形，常常还可以得到有限形式的解. 无界区域的格林函数称为相应方程的**基本解**.

我们将一个一般边值问题的格林函数 G 分成两部分

$$G=G_0+G_1. \tag{12.2.1}$$

其中 G_0是基本解. 对于三维泊松方程，即 G_0满足

$$\Delta G_0=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0). \tag{12.2.2}$$

G_1则满足相应的齐次方程(拉普拉斯方程)

$$\Delta G_1=0 \tag{12.2.3}$$

及相应的边界条件. 例如在第一边值问题中，$G|_\Sigma=0$，从而有

$$G_1|_\Sigma=(G-G_0)|_\Sigma=-G_0|_\Sigma. \tag{12.2.4}$$

拉普拉斯方程(12.2.3)的边值问题的求解是熟知的. 至于方程(12.2.2)，它描述的是点 $\boldsymbol{r}_0$的点源在无界空间产生的稳定场. 以静电场为例，它描述在点 $\boldsymbol{r}_0$电量为$-\epsilon_0$的点电荷在无界空间中所产生电场的 $\boldsymbol{r}$ 点的电势，即 $G_0=-1/4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|$

现在再给出(12.2.2)的一种解法. 先假设点源位于坐标原点，由于区域是无界的，点源产生的场应与方向无关，如果选取球坐标(r,θ,φ)，则 G_0只是 r 的函数，方程(12.2.2)变成一个常微分方程，当 $r\neq0$时，G_0满足拉普拉斯方程

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}G_0}{\mathrm{d}r}\right)=0, \tag{12.2.5}$$

其解为

$$G_0 = -\frac{C_1}{r} + C_2. \tag{12.2.6}$$

令无穷远处 $G_0=0$，于是 $C_2=0$. 为了求出 C_1，将方程(12.2.2)在包含 $r_0=0$ 的区域作体积分，这个区域可取为以 $r_0=0$ 为球心，半径为 ε 的小球 K_ε，其边界面为 Σ_ε(参见图12-1)，

$$\iiint_{K_\varepsilon} \Delta G_0 \mathrm{d}V = 1.$$

利用(12.1.3)(令其中的 $u\equiv1$)，将上式左边体积分化成面积分.

$$\iiint_{K_\varepsilon} \Delta G_0 \mathrm{d}V = \iint_{\Sigma_\varepsilon} \frac{\partial G_0}{\partial r}\mathrm{d}S = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{C_1}{r}\right)\cdot r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = 4\pi C_1$$

则 $C_1=\frac{1}{4\pi}$，从而

$$G_0(r) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r}.$$

若电荷位于任意点 r_0，则

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}. \tag{12.2.7}$$

类似地，用平面极坐标可求得二维泊松方程的基本解

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0) = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}. \tag{12.2.8}$$

（二）用电像法求格林函数

让我们来考虑这样一个物理问题. 设在一接地导体球内的 $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ 点放置一带电量为 $-\varepsilon_0$ 的点电荷. 则球内电势满足泊松方程

$$\Delta G = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0), \tag{12.2.9}$$

边界条件是

$$G|_{球面} = 0. \tag{12.2.10}$$

此处 G 便是泊松方程第一边值问题的格林函数. 从电磁学知道，在接地导体球内放置电荷时，导体球面上将产生感应电荷. 因此，球内电势应为球内电荷直接产生的电势与感应电荷所产生的电势之和. 因此，我们可将 G 写成两部分之和

$$G=G_0+G_1, \tag{12.2.11}$$

其中 G_0是不考虑球面边界影响的电势，G_1则是感应电荷引起的. 由前面的讨论可知，G_0满足

$$\Delta G_0=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0), \tag{12.2.12}$$

从而 G_1满足

$$\Delta G_1=0 \tag{12.2.13}$$

以及边界条件

$$G_1|_{球面}=(G-G_0)|_{球面}=-G_0|_{球面}. \tag{12.2.14}$$

这样，G_0就是基本解，$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)=-1/4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|$. 至于 G_1则可从方程(12.2.13)及边界条件(12.2.14)用分离变数等方法求得. 但这样得到的解往往是无穷级数. 现在介绍另一种方法——**电像法**，用电像法可以得到有限形式的解.

电像法的基本思想是用另一设想的等效点电荷来代替所有的感应电荷，于是可求得 G_1的类似于 G_0的有限形式的解. 显然，这一等效点电荷不能位于球内，因为感应电荷在球内的场满足(12.2.13)，即球内是无源的. 又根据对称性，这个等效电荷必位于 OM_0的延长线上的某点 M_1. 记等效电荷的电量为 q，其在空间任意点 $M(\boldsymbol{r})$引起的电势是 $G_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_1)=-1/4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|$. 若将场点取在球面上的 P 点，如图12-2所示，则 ΔOPM_0 和 ΔOM_1P 具有公共角 $\angle POM_1$. 如果按比例关系 $r_0:a=a:r_1$(a 为球的半径)选定 M_1(这 M_1必在球外)，则 ΔOPM_0跟 ΔOM_1P 相似，从而

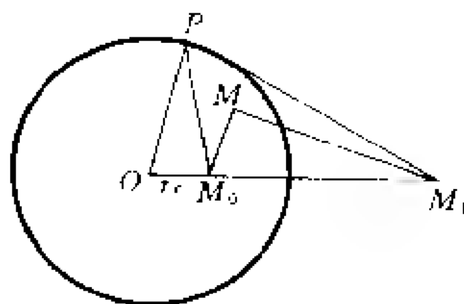


图12-2

$$\left.\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}\right|_{球面上}:\left.\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}\right|_{球面上}=\frac{1}{r_0}:\frac{1}{a}.$$

因此，若取 $q=\varepsilon_0 a/r_0$，则球面上的总电势是

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}+\frac{a}{r_0}\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}\left(\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}-\frac{a}{r_0}\right)=0.$$

正好满足边界条件(12.2.10).这个设想的位于 M_1 点的等效点电荷称为 M_0 点点电荷的**电像**.这样,球内任一点的总电势是

$$G(r,r_0)=-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}+\frac{a}{r_0}\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}+\frac{a}{r_0}\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\left|\boldsymbol{r}-\frac{a^2}{r_0^2}\boldsymbol{r}_0\right|}. \tag{12.2.15}$$

§10.1例6求出球外点电荷的电像(在球内),读者不妨把这两种情况中的电像加以对比.

若 $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ 为圆内的一点,则圆内泊松方程第一边值问题的格林函数满足

$$\Delta G=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0), \tag{12.2.16}$$

$$G|_{圆周上}=0. \tag{12.2.17}$$

这个问题也可用电像法求解,结果是

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)=-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}+\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}+\frac{1}{2\pi}\ln\frac{a}{r_0}, \tag{12.2.18}$$

式中 a 为圆的半径.

例1 在球 $r=a$ 内求解拉普拉斯方程的第一边值问题

$$\begin{cases}\Delta_3 u=0 \qquad (r<a),\\ u|_{r=a}=f(\theta,\varphi).\end{cases}$$

解 前面已用电像法求得球的第一边值问题的格林函数

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)=-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}+\frac{a}{r_0}\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}.$$

把它代入第一边值问题的解的积分公式(12.1.19)就行了.

为了把 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)$ 代入(12.1.19),还必须先算出 $\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_\Sigma$.引用球

坐标系，极点就取在球心.

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}=\frac{1}{\sqrt{r^2-2rr_0\cos\Theta+r_0^2}}, \tag{12.2.19}$$

其中 Θ 是矢径 $\boldsymbol{r}$ 跟 $\boldsymbol{r}_0$ 之间的夹角，

$$\cos\Theta=\cos\theta\cos\theta_0+\sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0).$$

计算法向导数

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}=\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{\sqrt{r^2-2rr_0\cos\Theta+r_0^2}}$$

$$=-\frac{r-r_0\cos\Theta}{(r^2-2rr_0\cos\Theta+r_0^2)^{3/2}}$$

分子里的 $\cos\Theta$ 可利用(12.2.19)消去，

$$\left[\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}\right]_\Sigma=\left.\frac{r_0^2-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^2-r^2}{2r|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3}\right|_\Sigma=\left.\frac{r_0^2-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^2-a^2}{2a|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3}\right|_\Sigma.$$

同理，

$$\left[\frac{a}{r_0}\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}\right]_\Sigma=\left.\frac{a}{r_0}\frac{r_1^2-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|^2-a^2}{2a|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|^3}\right|_\Sigma$$

$$=\left.\frac{\dfrac{a^4}{r_0^2}-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^2\dfrac{a^2}{r_0^2}-a^2}{2r_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3\dfrac{a^3}{r_0^3}}\right|_\Sigma$$

$$=\left.\frac{a^2-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^2-r_0^2}{2a|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3}\right|_\Sigma.$$

于是

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_\Sigma=-\left.\frac{1}{4\pi}\frac{r_0^2-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^2-a^2}{2a|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3}\right|_\Sigma$$

$$+\left.\frac{1}{4\pi}\frac{a^2-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^2-r_0^2}{2a|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3}\right|_\Sigma=\left.\frac{1}{4\pi}\frac{a^2-r_0^2}{a|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3}\right|_\Sigma.$$

代入(12.1.19)，得到球的第一边值问题的解的积分公式

$$u(r,\theta,\varphi)=\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}f(\theta_0,\varphi_0)\frac{1}{4\pi}\left.\frac{a^2-r_0^2}{a|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3}\right|_\Sigma a^2\sin\theta_0\mathrm{d}\theta_0\mathrm{d}\varphi_0$$

$$=\frac{a}{4\pi}\int_{\theta_0=0}^{\pi}\int_{\varphi_0=0}^{2\pi}f(\theta_0,\varphi_0)\frac{a^2-r_0^2}{(a^2-2ar_0\cos\Theta+r_0^2)^{3/2}}$$

$$\sin\theta_0 \mathrm{d}\theta_0 \mathrm{d}\varphi_0 \tag{12.2.20}$$

这叫作球的**泊松积分**.

例2 在半空间 $z>0$内求解拉普拉斯方程的第一边值问题

$$\begin{cases}\Delta_3 u=0(z>0),\\ u|_{z=0}=f(x,y).\end{cases}$$

解 先求格林函数 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)$,

$$\begin{cases}\Delta_3 G=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0),\\ G|_{z=0}=0.\end{cases}$$

这相当于接地导体平面 $z=0$上方的电势,在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$放置着电量为$-\varepsilon_0$的点电荷.这电势可用电像法求得.

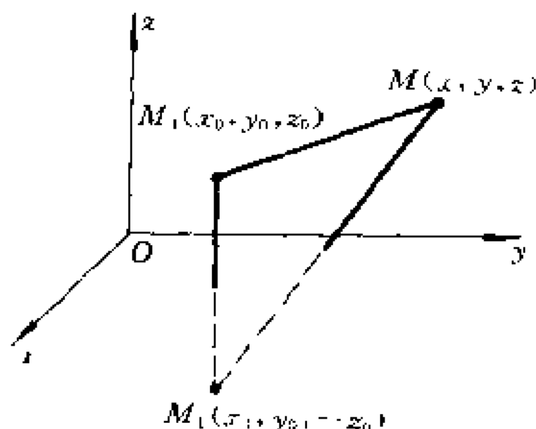


图12-3

设想在 M_0的对称点 $M_1(x_0,y_0,-z_0)$放置电量为$+\varepsilon_0$的点电荷,不难验证,在两个点电荷的电场中,平面 $z=0$上的电势确实是零.在点 M_1的点电荷就是电像.格林函数

$$\begin{aligned}G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)&=-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}+\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}\\&=-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}\\&\quad+\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}.\end{aligned}$$

为了把 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)$代入第一边值问题的解的积分公式(12.1.19),需要先计算$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{z=0}$即$-\left.\frac{\partial G}{\partial z}\right|_{z=0}$.

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{z=0}=\left[\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}\right.$$

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}\Bigg]_{z=0}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{z_0}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2]^{3/2}}.$$

代入(12.1.19)即得半空间的第一边值问题的解的积分公式

$$u(x,y)$$

$$=\frac{z_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\frac{1}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2]^{3/2}}\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0 \qquad (12.2.21)$$

这叫作半空间的**泊松积分**.

例3 在圆 $\rho=a$ 内求解拉普拉斯方程的第一边值问题

$$\begin{cases}\Delta_2 u=0(\rho<a),\\ u|_{\rho=a}=f(\varphi).\end{cases}$$

答案

$$u(\rho,\varphi)=\frac{a^2-\rho_0^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{a^2-2a\rho_0\cos(\varphi-\varphi_0)+\rho_0^2}f(\varphi_0)\mathrm{d}\varphi_0. \qquad (12.2.22)$$

例4 在半平面 $y>0$内求解拉普拉斯方程的第一边值问题

$$\begin{cases}\Delta_2 u=0(y>0),\\ u|_{y=0}=f(x).\end{cases}$$

答案 $$u(x,y)=\frac{y_0}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x-x_0)^2+y_0^2}f(x_0)\mathrm{d}x_0. \qquad (12.2.23)$$

习　　题

1. 在圆 $\rho=a$ 内求解拉普拉斯方程的第一边值问题 $\Delta_2 u=0(\rho<a)$，$u|_{\rho=a}=f(\varphi)$.

2. 在半平面 $y>0$内求解拉普拉斯方程的第一边值问题 $\Delta_2 u=0(y>0)$，$u|_{y=0}=f(x)$.

3. 在圆形域 $\rho\leqslant a$ 上求解 $\Delta u=0$使满足边界条件①$u|_{\rho=a}=A\cos\varphi$，②$u|_{\rho=a}=A+B\sin\varphi$.

4. 对于一般的 $f(\varphi)$，积分公式(12.2.22)里的积分可能不那么容易计

算. 试把$1/[a^2-2a\rho_0\cos(\varphi-\varphi_0)+\rho_0^2]$展开为傅里叶级数，然后逐项积分.

作为对照，再用分离变数法求解圆的第一边值问题.

5. 试求层状空间$0<z<H$第一边值问题的格林函数.

§12.3 含时间的格林函数

§12.1～§12.2讨论的是稳定场问题的格林函数方法. 至于波动与输运这类含时间的问题，同样可以运用格林函数方法求解. 本节以波动问题为例介绍含时间的格林函数，并导出波动方程定解问题解的积分表式；对于输运问题，亦给出相应的结果.

一般强迫振动的定解问题是

$$u_{tt}-a^2\Delta u=f(\boldsymbol{r},t), \tag{12.3.1}$$

$$\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial n}+\beta u\right)\bigg|_{\Sigma}=\theta(M,t), \tag{12.3.2}$$

$$u\big|_{t=0}=\varphi(\boldsymbol{r}),\ u_t\big|_{t=0}=\psi(\boldsymbol{r}). \tag{12.3.3}$$

§5.3中曾指出，持续作用的力$f(\boldsymbol{r},t)$可看作是前后相继的脉冲力$f(\boldsymbol{r},\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau$的叠加. 现在我们再进一步将一个个连续分布于空间的脉冲力看作是鳞次栉比排列在许许多多点上的力的叠加. 总之，把持续作用的连续分布力$f(\boldsymbol{r},t)$看作是许许多多脉冲点力的叠加

$$f(\boldsymbol{r},t)=\iiint\limits_{T}\int_{t}f(\boldsymbol{r}_0,\tau)\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0\mathrm{d}\tau. \tag{12.3.4}$$

把单位脉冲点力所引起的振动记作$G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}_0,t_0)$，称之为波动问题的格林函数. 求得了G，就可用叠加的方法求出任意力$f(\boldsymbol{r},t)$所引起的振动. G所满足的定解问题是

$$G_{tt}-a^2\Delta G=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\delta(t-t_0), \tag{12.3.5}$$

$$\left(\alpha\frac{\partial G}{\partial n}+\beta G\right)\bigg|_{\Sigma}=0, \tag{12.3.6}$$

$$G\big|_{t=c}=0,\ G_t\big|_{t=c}=0. \tag{12.3.7}$$

我们可以用类似于求解泊松方程的方法求得定解问题

(12.3.1)～(12.3.3)的解的积分表式. 需注意的是含时间的格林函数的对称性不同于泊松方程格林函数的对称性,

$$G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}_0,t_0)=G(\boldsymbol{r}_0,-t_0;\boldsymbol{r},-t).\qquad(12.3.8)$$

现在证明对称关系(12.3.8). 在定解问题(12.3.5)～(12.3.7)中将变量 t,$\boldsymbol{r}_0$,t_0分别换为$-t$,$\boldsymbol{r}_1$,$-t_1$,而成为

$$G_{tt}(\boldsymbol{r},-t;\boldsymbol{r}_1,-t_1)-a^2\Delta G(\boldsymbol{r},-t;\boldsymbol{r}_1,-t_1)=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)\delta(t-t_1)\qquad(12.3.9)$$

$$\left[\alpha\frac{\partial G(\boldsymbol{r},-t;\boldsymbol{r}_1,-t_1)}{\partial n}+\beta G(\boldsymbol{r},-t;\boldsymbol{r}_1,-t_1)\right]\bigg|_\Sigma=0\qquad(12.3.10)$$

$$G(\boldsymbol{r},-t;\boldsymbol{r}_1,-t_1)\big|_{t=0}=0,G_t(\boldsymbol{r},-t;\boldsymbol{r}_1,-t_1)\big|_{t=0}=0\qquad(12.3.11)$$

以 $G(\boldsymbol{r},-t;\boldsymbol{r}_1,-t_1)$乘方程(12.3.5). 同时以 $G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}_0,t_0)$乘方程(12.3.9),相减,再对 $\boldsymbol{r}$ 在区域 T 上积分,同时对 t 在区间$(-\infty,t']$(其中 $t'>t_0$和 t_1)上积分,得

$$\begin{aligned}\iiint_T\int_{-\infty}^{t'}&[G_{tt}(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}_0,t_0)G(\boldsymbol{r},-t;\boldsymbol{r}_1,-t_1)\\&-G_{tt}(\boldsymbol{r},-t;\boldsymbol{r}_1,-t_1)G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}_0,t_0)\\&-a^2\Delta G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}_0,t_0)G(\boldsymbol{r},-t;\boldsymbol{r}_1,-t_1)\\&+a^2\Delta G(\boldsymbol{r},-t;\boldsymbol{r}_1,-t_1)G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}_0,t_0)]\mathrm{d}V\mathrm{d}t\\=\,&G(\boldsymbol{r}_0,-t_0;\boldsymbol{r}_1,-t_1)-G(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_0,t_0).\end{aligned}\qquad(12.3.12)$$

利用第二格林公式(12.1.3),上式左端成为

$$\begin{aligned}\iiint_T&[G_t(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}_0,t_0)G(\boldsymbol{r},-t;\boldsymbol{r}_1,-t_1)\\&-G_t(\boldsymbol{r},-t;\boldsymbol{r}_1,-t_1)G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}_0,t_0)]\big|_{t=-\infty}^{t=t'}\mathrm{d}V\\&+a^2\int_{-\infty}^{t'}\iint_\Sigma\left[G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}_0,t_0)\frac{\partial}{\partial n}G(\boldsymbol{r},-t;\boldsymbol{r}_1,-t_1)\right.\\&\left.-G(\boldsymbol{r},-t;\boldsymbol{r}_1,-t_1)\frac{\partial}{\partial n}G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}_0,t_0)\right]\mathrm{d}S\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

由定解条件(12.3.6)～(12.3.7)和(12.3.10)～(12.3.11)可以看出,上式为零,从而(12.3.12)右端也为零. 于是有对称关系(12.3.8).

现在推导定解问题(12.3.1)～(12.3.3)解的积分表式. 考虑到关系式(12.3.8)中时间变数 t 与 t_0不能像空间变数那样简单地对调,我们先将定解问题(12.3.1)～(12.3.3)中的 $\boldsymbol{r}$,t 换为 $\boldsymbol{r}_0$,t_0,

$$u_{t_0t_0}(\boldsymbol{r}_0,t_0)-a^2\Delta_0u(\boldsymbol{r}_0,t_0)=f(\boldsymbol{r}_0,t_0),\qquad(12.3.13)$$

$$\left[\alpha\frac{\partial u(\boldsymbol{r}_0,t_0)}{\partial n_0}+\beta u(\boldsymbol{r}_0,t_0)\right]\Big|_{\Sigma}=\theta(M_0,t_0),\quad(12.3.14)$$

$$u(\boldsymbol{r}_0,t_0)\big|_{t_0=0}=0,u_{t_0}(\boldsymbol{r}_0,t_0)\big|_{t_0=0}=0.\qquad(12.3.15)$$

将 G 的定解问题中的 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{r}_0$互换，同时将 t 和 t_0分别换为$-t_0$和$-t$，并利用对称关系(12.3.8)，得

$$G_{t_0t_0}(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}_0,t_0)-a^2\Delta_0 G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}_0,t_0)=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\delta(t-t_0),$$

$$(12.3.16)$$

$$\left[\alpha\frac{\partial G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}_0,t_0)}{\partial n_0}+\beta G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}_0,t_0)\right]\Big|_{\Sigma}=0,\qquad(12.3.17)$$

$$G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}_0,t_0)\big|_{t_0=0}=0,G_{t_0}(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}_0,t_0)\big|_{t_0=0}=0.\qquad(12.3.18)$$

以 $G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}_0,t_0)$乘方程(12.3.13)，以 $u(\boldsymbol{r}_0,t_0)$乘方程(12.3.16)，相减，再对 $\boldsymbol{r}_0$在区域 T 上积分，同时对 t_0在$[0,t+\epsilon]$上积分，并利用第二格林公式及初始条件(12.3.15)及(12.3.18)，可得

$$\begin{aligned}&\iiint\limits_T\int_0^{t+\epsilon}(Gu_{t_0t_0}-uG_{t_0t_0})\mathrm{d}V_0\mathrm{d}t_0-\\&a^2\iiint\limits_T\int_0^{t+\epsilon}(G\Delta_0u-u\Delta_0G)\mathrm{d}V_0\mathrm{d}t_0\\&=\iiint\limits_T\int_0^{t+\epsilon}G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}_0,t_0)f(\boldsymbol{r}_0,t_0)\mathrm{d}V_0\mathrm{d}t_0\\&\quad-\iiint\limits_T\int_0^{t+\epsilon}u\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\delta(t-t_0)\mathrm{d}V_0\mathrm{d}t_0.\end{aligned}\qquad(12.3.19)$$

其中 $\epsilon>0$，积分后取 $\epsilon\to0$，引入 ϵ 是为了使含 $\delta(t-t_0)$的积分值确定(积分区间包含 $t_0=t$ 在内)，于是可得

$$\begin{aligned}u(\boldsymbol{r},t)=&\iiint\limits_T\int_0^{t+\epsilon}G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}_0,t_0)f(\boldsymbol{r}_0,t_0)\mathrm{d}V_0\mathrm{d}t_0\\&-\iiint\limits_T\int_0^{t+\epsilon}(Gu_{t_0t_0}-uG_{t_0t_0})\mathrm{d}V_0\mathrm{d}t_0\\&+a^2\iiint\limits_T\int_0^{t+\epsilon}(G\Delta_0u-u\Delta_0G)\mathrm{d}V_0\mathrm{d}t_0.\end{aligned}\qquad(12.3.20)$$

右边第二个积分中 $Gu_{t_0t_0}-uG_{t_0t_0}=\mathrm{d}(Gu_{t_0}-uG_{t_0})/\mathrm{d}t_0$因此，可完成

对 t_0的积分，计及 $t<t_0$时 $G=0, G_{t_0}=0$，这样得到

$$u(\boldsymbol{r},t)=\iiint\limits_{T}\int_0^t G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}_0,t_0)f(\boldsymbol{r}_0,t_0)\mathrm{d}V_0\mathrm{d}t_0$$
$$+a^2\iint\limits_{\Sigma}\int_0^t\left(G\frac{\partial u}{\partial n_0}-u\frac{\partial G}{\partial n_0}\right)\mathrm{d}S_0\mathrm{d}t_0$$
$$-\iiint\limits_{T}\left[Gu_{t_0}-uG_{t_0}\right]\Big|_{t_0=0}\mathrm{d}V_0. \qquad (12.3.21)$$

对于不同类型的边界条件，可令 G 满足相应的齐次边界条件，从而得到适用于不同边界条件的以 G 表示的解的积分表式.

对于输运问题，

$$u_t-a^2\Delta u=f(\boldsymbol{r},t) \qquad (12.3.22)$$

$$\left[\alpha\frac{\partial u}{\partial n}+\beta u\right]\Big|_{\Sigma}=\theta(M,t), \qquad (12.3.23)$$

$$u|_{t=0}=\varphi(\boldsymbol{r}). \qquad (12.3.24)$$

类似上面的讨论，同样可得到其解的积分表式

$$u(\boldsymbol{r},t)=\iiint\limits_{T}\int_0^t G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}_0,t_0)f(\boldsymbol{r}_0,t_0)\mathrm{d}V_0\mathrm{d}t_0$$
$$+a^2\iint\limits_{\Sigma}\int_0^t\left(G\frac{\partial u}{\partial n_0}-u\frac{\partial G}{\partial n_0}\right)\mathrm{d}S\mathrm{d}t_0$$
$$+\iiint\limits_{T}[uG]_{t_0=0}\mathrm{d}V_0. \qquad (12.3.25)$$

§12.4 用冲量定理法求格林函数

§12.3给出了以格林函数表示的波动方程与输运方程解的积分表式，然而，只有找到格林函数，才能利用积分表式最终确定问题的解，本节将通过几个例子介绍怎样用冲量定理求格林函数，以及格林函数在求解波动问题或输运问题中的应用.

例 1 求解一维无界空间中的受迫振动

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t),$$
$$u|_{t=0}=0,u_t|_{t=0}=0.$$

解 这个问题的格林函数 G 满足定解问题

$$G_{tt}-a^2G_{xx}=\delta(x-x_0)\delta(t-t_0),$$
$$G|_{t=0}=0,G_t|_{t=0}=0.$$

按照冲量定理方法,G 的定解问题可以转化为

$$G_{tt}-a^2G_{xx}=0,$$
$$G|_{t=\tau+0}=0,G_t|_{t=\tau+0}=\delta(x-\xi).$$

这个定解问题的解由达朗贝尔公式(7.4.7)给出,只是其中的 t 在这里应换为 $t-\tau$,

$$G(x,t;\xi,\tau)=\frac{1}{2a}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}\delta(\xi_0-\xi)\mathrm{d}\xi_0$$
$$=\begin{cases}0,[\xi<x-a(t-\tau)\text{或}\ x+a(t-\tau)<\xi]\\ \frac{1}{2a}.[x-a(t-\tau)<\xi<x+\alpha(t-\tau)]\end{cases}$$

按(12.3.21),u 的解是

$$u(x,t)=\int_{\tau=0}^{t}\int_{\xi=x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}\frac{1}{2a}f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau$$

例 2 求解定解问题

$$u_{tt}-a^2ll_{xx}=A\cos\frac{\pi x}{l}\sin\omega t,$$
$$u_x|_{x=0}=0,u_x|_{x=l}=0,$$
$$u|_{t=0}=0,u_t|_{t=0}=0.$$

解 格林函数 G 满足

$$G_{tt}-a^2G_{xx}=\delta(x-\xi)\delta(t-\tau),$$
$$G_x|_{x=0}=0,G_x|_{x=l}=0,$$
$$G|_{t=0}=0,G_t|_{t=0}=0.$$

按冲量定理,这个问题可转化为

$$G_{tt}-a^2G_{xx}=0,$$

$$G_x|_{x=0}=0, G_x|_{x=l}=0,$$
$$G|_{t=\tau+0}=0, G_t|_{t=\tau+0}=\delta(x-\xi).$$

利用分离变数法，可求得

$$G(x,t;\xi,\tau)=\frac{1}{l}(t-\tau)+\frac{2}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}\cdot$$
$$\cos\frac{n\pi\xi}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}.$$

以此代入(12.3.21)，得

$$u(x,t)=\int_{\tau=0}^{t}\int_{\xi=0}^{l}f(\xi,\tau)G(x,t;\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau$$
$$=\frac{1}{l}\int_{\tau=0}^{t}\int_{\xi=0}^{l}(t-\tau)A\cos\frac{\pi\xi}{l}\sin\omega\tau\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau+\frac{2A}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi x}{l}$$
$$\times\int_{\tau=0}^{t}\int_{\xi=0}^{l}\cos\frac{\pi\xi}{l}\sin\omega\tau\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}\cos\frac{n\pi\xi}{l}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau$$
$$=\frac{2A}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi x}{l}\int_{\xi=0}^{l}\cos\frac{\pi\xi}{l}\cos\frac{n\pi\xi}{l}\mathrm{d}\xi$$
$$\times\int_{\tau=0}^{t}\sin\omega\tau\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}\mathrm{d}\tau.$$

对 ξ 的积分等于零，除非 $n=1$. 对于 $n=1$，这个积分等于 $l/2$.
于是，

$$u(x,t)=\frac{Al}{\pi a}\cos\frac{\pi x}{l}\int_{\tau=0}^{t}\sin\omega\tau\sin\frac{\pi a(t-\tau)}{l}\mathrm{d}\tau$$
$$=\frac{Al}{\pi a}\frac{1}{\omega^2-\pi^2a^2/l^2}\left(\omega\sin\frac{\pi at}{l}-\frac{\pi a}{l}\sin\omega t\right)\cos\frac{\pi x}{l}.$$

例 3 求解一维无界空间的有源输运问题

$$u_t-a^2u_{xx}=f(x,t),$$
$$u|_{t=0}=0.$$

解 格林函数 G 满足定解问题

$$G_t-a^2G_{xx}=\delta(x-\xi)\delta(t-\tau),$$
$$G|_{t=0}=0.$$

这个问题可以转化为

$$G_t - a^2 G_{xx} = 0$$

$$G|_{t=\tau+0} = \delta(x-\xi).$$

这个定解问题的解可引用§13.1例2的结果，只是那里的 t 在这里应换为 $t-\tau$. 于是，得到无界空间输运问题的**格林函数**

$$G(x,t;\xi,\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x_0-\xi)\left[\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]dx_0$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-(x-\xi)^2/4a^2(t-\tau)}. \qquad (12.4.1)$$

从而所求的解

$$u(x,t) = \int_{\tau=0}^{t}\int_{\xi=-\infty}^{\infty} f(\xi,\tau)\left[\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]d\xi d\tau.$$

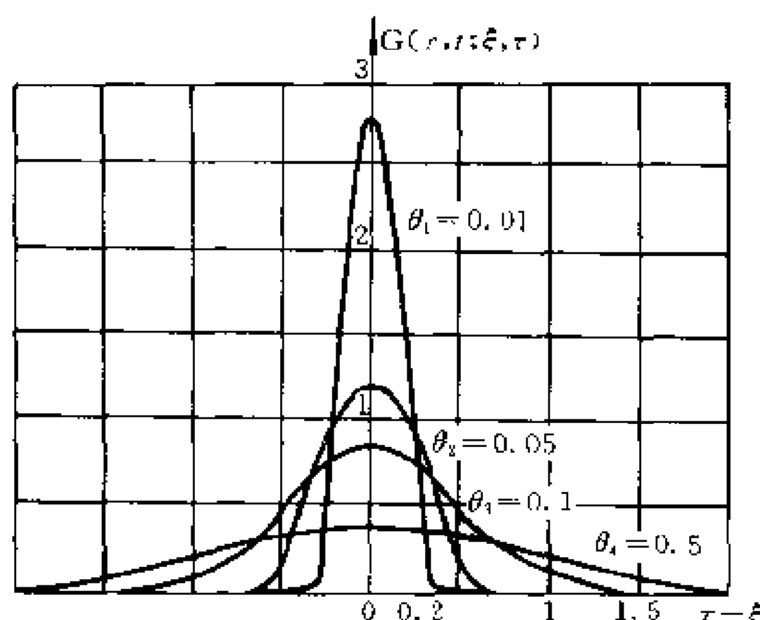


图 12-4

图12-4 描画了一系列给定时刻的格林函数 $G(x,t;\xi,\tau)$，图中所注的 θ 指 $a^2(t-\tau)$，实际上就代表着时间. 这些都是**高斯函数**(附录三)曲线，点热源所在处($x-\xi=0$)温度取峰值. 对于较早的时刻(θ 较小)，峰较高而两侧较陡. 时间越迟，峰越低而两侧越平缓. 值得惊异的是，不论距离点热源多远(不论 $|x-\xi|$ 多大)，瞬时热源刚刚作用之后(t 刚刚超过 τ)，温度就不为零($G\neq 0$). 这是说，热竟然“瞬时地”传到一切地点，传播速度竟然是无限大. 但无限大

的传播速度是不可能的. 问题出在哪里?原来,导出热传导方程所根据的热传导定律 $\boldsymbol{q}=-k\,\nabla u$(或者,导出扩散方程所根据的扩散定律 $\boldsymbol{q}=-D(\nabla u)$ 是一种统计规律,完全没有考虑分子运动的惯性,而正是这惯性使传播速度不能无限大. 不过,只要 $t-\tau$ 不是很小,统计规律已起作用,所求得的解在物理上还是成立的.

例 4 求解一维半无界空间 $x>0$ 的有源输运问题,第一类齐次边界条件,

$$\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}=f(x,t) \quad (x>0), \\ u|_{x=0}=0, \\ u|_{t=0}=0. \end{cases}$$

解 因为是第一类齐次边界条件,应该奇延拓到 $x<0$ 的半空间中去. 于是,

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=\begin{cases} f(x,t) & (x>0), \\ -f(-x,t) & (x<0), \end{cases} \\ u|_{t=0}=0. \end{cases}$$

引用例3的结果,得

$$\begin{aligned} u(x,t)=&\int_{\tau=0}^{t}\int_{\xi=-\infty}^{0}-f(-\xi,\tau)\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau \\ &+\int_{\tau=0}^{t}\int_{\xi=0}^{\infty}f(\xi,\tau)\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{12.4.2}$$

在(12.4.2)右边第一个积分中,令 $\xi=-x_0$,则这个积分

$$=\int_{\tau=0}^{t}\int_{x_0=\infty}^{0}-f(x_0,\tau)\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\mathrm{e}^{-\frac{(x+x_0)^2}{4a^2(t-\tau)}}(-\mathrm{d}x_0)\mathrm{d}\tau.$$

定积分的值跟积分变数无关,所以又可把积分变数 x_0 全部改写为 ξ,则这第一个积分

$$=-\int_{\tau=0}^{t}\int_{\xi=0}^{\infty}f(\xi,\tau)\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\mathrm{e}^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau.$$

这样,(12.4.2)成为

$$u(x,t)=\int_{\tau=0}^{t}\int_{\xi=0}^{\infty} f(\xi,\tau)\left[\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\times\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right)\right]d\xi d\tau.$$

上式的[ ]里可说就是第一类齐次边界条件下，一维半无界空间 $x>0$中的输运问题的**格林函数** $G(x,t;\xi,\tau)$，

$$G(x,t;\xi,\tau)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right). \tag{12.4.3}$$

例 5 求解一维半无界空间 $x>0$的有源输运问题，第二类齐次边界条件，

$$\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}=f(x,t) \quad (x>0), \\ u_x|_{x=0}=0, \\ u|_{t=0}=0. \end{cases}$$

解 因为是第二类齐次边界条件，应该偶延拓到 $x<0$的半空间中去. 于是，

$$\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}=\begin{cases} f(x,t) & (x>0), \\ f(-x,t) & (x<0), \end{cases} \\ u|_{t=0}=0. \end{cases}$$

引用例3的结果，得

$$u(x,t)=\int_{\tau=0}^{t}\int_{\xi=-\infty}^{0} f(-\xi,\tau)\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi d\tau + \int_{\tau=0}^{t}\int_{\xi=0}^{\infty} f(\xi,\tau)\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi d\tau. \tag{12.4.4}$$

在(12.4.4)右边第一个积分中，令 $\xi=-x_0$，再把 x_0改记作 ξ，则(12.4.4)成为

$$u(x,t)=\int_{\tau=0}^{t}\int_{\xi=0}^{\infty} f(\xi,\tau)\left[\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\times\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right)\right]d\xi d\tau.$$

上式的[ ]里可说就是第二类齐次边界条件下，一维半无界空间 $x>0$ 中的输运问题的**格林函数** $G(x,t;\xi,\tau)$，

$$G(x,t;\xi,\tau)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right). \tag{12.4.5}$$

习　题

1. 两端固定的弦在线密度为 $\rho f(x,t)=\rho\Phi(x)\sin\omega t$ 的横向力作用下振动. 求解其振动情况. 研究共振的可能性，并求共振时的解.

2. 两端固定弦在点 x_0 受谐变力 $\rho f(t)=\rho f_0\sin\omega t$ 作用而振动，求解振动情况.

3. 长为 l 的均匀细导线，每单位长的电阻为 R，通以恒定的电流 I，导线表面跟周围温度为零度的介质进行热量交换. 试求解导线上的温度变化. 设初始温度和导线两端温度都是零度.

4. 求解一维半无界空间的输运问题 $u_t-a^2u_{xx}=0, u|_{x=0}=At, u|_{t=0}=0$.

5. 在一维半无界空间中求解 $u_t-a^2u_{xx}=0, u|_{x=0}=f(t), u|_{t=0}=\varphi(x)$.

6. 在一维半无界空间中求解 $u_t-a^2u_{xx}=0, u_x|_{x=0}=q(t), u|_{t=0}=0$.

§12.5　推广的格林公式及其应用

把格林公式加以推广，可以应用于各种类型的数学物理方程. 为简便起见，本节只讨论两个自变数的情况. 至于多变数的情况，处理方法是类似的，对某些不同的地方将作简略说明.

两个自变数的二阶线性偏微分方程

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu=0$$

可记作 $\mathbf{L}u=0$，$\mathbf{L}$ 是算符

$$\mathbf{L}=a_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+b_1\frac{\partial}{\partial x}+b_2\frac{\partial}{\partial y}+c. \tag{12.5.1}$$

设有两个算符 $\mathbf{L}$ 和 $\mathbf{M}$，如果 $v\mathbf{L}u-u\mathbf{M}v$ 是某种"散度"，即 $v\mathbf{L}u-u\mathbf{M}v=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}$，则算符 $\mathbf{L}$ 和 $\mathbf{M}$ 互称为**伴随算符**. 如 $\mathbf{L}=\mathbf{M}$，则叫作**自伴算符**.

不难验证，算符 L(12.5.1)的伴随算符 M 由下式给出：

$$\mathbf{M}v=\frac{\partial^2}{\partial x^2}(a_{11}v)+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(a_{12}v)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(a_{22}v)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}(b_1v)-\frac{\partial}{\partial y}(b_2v)+cv, \qquad (12.5.2)$$

这是因为 $v\mathbf{L}u-u\mathbf{M}v$ 确是"散度"$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}$，其中

$$\begin{cases} X=a_{11}(vu_x-uv_x)+a_{12}(vu_y-uv_y) \\ \qquad +\left(b_1-\frac{\partial a_{11}}{\partial x}-\frac{\partial a_{12}}{\partial y}\right)uv, \\ Y=a_{12}(vu_x-uv_x)+a_{22}(vu_y-uv_y) \\ \qquad +\left(b_2-\frac{\partial a_{12}}{\partial x}-\frac{\partial a_{22}}{\partial y}\right)uv. \end{cases} \qquad (12.5.3)$$

设在 xy 平面上有区域 T，其境界线为 Σ，只要函数 u 和 v 在区域 T 充分光滑，按照高斯定理，

$$\iint\limits_T (v\mathbf{L}u-u\mathbf{M}v)\mathrm{d}S=\int_\Sigma [X\cos(\boldsymbol{n},x)+Y\cos(\boldsymbol{n},y)]\mathrm{d}s, \qquad (12.5.4)$$

其中 $\cos(\boldsymbol{n},x)$和 $\cos(\boldsymbol{n},y)$是外法向 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦.(12.5.4)就是**推广的格林公式**.

下面，分椭圆型、抛物型、双曲型三种类型导出一般二阶线性偏微分方程解的积分表式.

(一) 椭圆型方程

$$\mathbf{L}u\equiv u_{xx}+u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu=f(x,y). \qquad (12.5.5)$$

边界条件可写为

$$\mathbf{R}u|_\Sigma=\varphi(M), \qquad (12.5.6)$$

其中 R 为定义在区域边界上的线性算符，L 的伴随算符 M 由下式给出

$$\mathbf{M}v\equiv v_{xx}+v_{yy}-(b_1v)_x-(b_2v)_y+cv. \qquad (12.5.7)$$

取 v 为伴随算符 M 的格林函数 G，则

$$\mathbf{M}G=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0). \qquad (12.5.8)$$

以 G 乘(12.5.5)，$u(r)$乘(12.5.8)，相减，然后在区域 T 中求积分

$$\iint\limits_T (G\mathbf{L}u-u\mathbf{M}G)\mathrm{d}S=\iint\limits_T Gf\mathrm{d}S-\iint\limits_T u\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\mathrm{d}S \qquad (12.5.9)$$

应用格林公式(12.5.4)将上式左边的面积分化成线积分.但是在 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0$点，MG 具有 δ 函数的奇异性，格林公式不能用.解决的办法与§12.1中相同.先

从 T 中挖去包含 r_0 在内的小圆 K_ε，K_ε 的边界为 Σ_ε，对剩下的区域 $T-K_\varepsilon$ 应用格林公式，

$$\iint\limits_{T-K_\varepsilon}(\mathrm{G}Lu-uM\mathrm{G})\mathrm{d}S$$

$$=\oint_{\Sigma+\Sigma_\varepsilon}[X\cos(\boldsymbol{n},x)+Y\cos(\boldsymbol{n},y)]\mathrm{d}s$$

$$=\oint_{\Sigma+\Sigma_\varepsilon}\left[\mathrm{G}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial n}+b_1\cos(\boldsymbol{n},x)u\mathrm{G}+b_2\cos(\boldsymbol{n},y)u\mathrm{G}\right]\mathrm{d}s \tag{12.5.10}$$

把(12.5.10)代入挖去 K_ε 的(12.5.9)．注意到 $r\neq r_0$ 故 $\delta(r-r_0)=0$，于是

$$\int_\Sigma\left[\mathrm{G}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial n}+b_1\cos(\boldsymbol{n},x)u\mathrm{G}+b_2\cos(\boldsymbol{n},y)u\mathrm{G}\right]\mathrm{d}s$$

$$+\int_{\Sigma_\varepsilon}\left[\mathrm{G}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial n}+b_1\cos(\boldsymbol{n},x)u\mathrm{G}+b_2\cos(\boldsymbol{n},y)u\mathrm{G}\right]\mathrm{d}s=\iint\limits_{T-K_\varepsilon}\mathrm{G}f\mathrm{d}S \tag{12.5.11}$$

再令 $\varepsilon\to 0$，仿照§12.1，有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Sigma_\varepsilon}\left[\mathrm{G}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial n}+b_1\cos(\boldsymbol{n},x)u\mathrm{G}+b_2\cos(\boldsymbol{n},y)u\mathrm{G}\right]\mathrm{d}s$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Sigma_\varepsilon}\left(-u\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial n}\right)\mathrm{d}s=u(\boldsymbol{r}_0). \tag{12.5.12}$$

（对于单位正点源，有 $-\int\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial n}\mathrm{d}s=1$）．这样，由(12.5.9)得

$$u(\boldsymbol{r}_0)=\iint\limits_T\mathrm{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)f(\boldsymbol{r})\mathrm{d}S-\int_\Sigma\Big[\mathrm{G}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial n}+b_1\cos(\boldsymbol{n},x)u\mathrm{G}$$

$$+b_2\cos(\boldsymbol{n},y)u\mathrm{G}\Big]\mathrm{d}s. \tag{12.5.13}$$

这是(12.1.11)的推广．

对于第一边值问题，选取 G，使满足

$$\mathrm{G}|_\Sigma=0, \tag{12.5.14}$$

从而

$$u(\boldsymbol{r}_0)=\iint\limits_T\mathrm{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)f(\boldsymbol{r})\mathrm{d}S+\int_\Sigma u\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial n}\mathrm{d}s \tag{12.5.15}$$

这就是方程(12.5.5)第一边值问题的解的积分表式．它是(12.1.12)的推广．

对于第二边值问题，选取 G，使满足

$$\left[\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial n}-b_1\cos(\boldsymbol{n},x)\mathrm{G}-b_2\cos(\boldsymbol{n},y)\mathrm{G}\right]_\Sigma=0, \tag{12.5.16}$$

从而(12.5.13)成为

$$u(\boldsymbol{r}_0)=\iint_T G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)f(\boldsymbol{r})\mathrm{d}S-\int_{\Sigma_1} G\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s. \qquad (12.5.17)$$

这就是方程(12.5.5)第二边值问题的解的积分表式. 如果满足(12.5.16)的格林函数存在.

第三边值问题可作类似处理.

例 研究三维空间中谐变源发出的振动.

解 波动方程可写为

$$U_{tt}-a^2\Delta_3 U=-f(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}.$$

以 $U(\boldsymbol{r},t)=u(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ 代入方程，得

$$Lu\equiv\Delta_3 u+\frac{\omega^2}{a^2}u=f(\boldsymbol{r}). \qquad (12.5.18)$$

算符 L 是自伴的，其伴随算符 M 的格林函数 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)$ 是

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)=\frac{1}{4\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega}{a}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}.$$

可见这个格林函数是对称的，$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)=G(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r})$. 按(12.5.13)，并利用 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)$ 的对称性，可得

$$u(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi}\iint_\Sigma\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega}{a}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial}{\partial n}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega}{a}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}\right]\mathrm{d}S$$
$$-\frac{1}{4\pi}\iiint_T\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega}{a}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}f\mathrm{d}V. \qquad (12.5.19)$$

这就是单色光衍射理论中著名的基尔霍夫公式.

方程(12.5.18)已是标准形式的椭圆型方程. 一般说来，如§9.1指出，多个自变数的方程不一定能在区域 T 上所有各点同时化为标准形式. 但在点 $\boldsymbol{r}_0$ 是可以化为标准形式的，也就是说，在内边界 Σ_ε 上可以化为标准形式，这使得仍然可以按上面的方式导出解的积分公式.

(二) 抛物型方程

$$Lu\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial y}=f \quad (y=a^2 t). \qquad (12.5.20)$$

算符 L 的伴随算符 M 是

$$M=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y}. \qquad (12.5.21)$$

在这里，推广的格林公式可具体地写成

$$\iint_T (vLu - uMv)\mathrm{d}S = \int_\Sigma [(vu_x - uv_x)\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{x}) - uv\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{y})]\mathrm{d}s. \tag{12.5.22}$$

既然 $y-a^2t$ 是时间变数，Σ 应由四条直线 $y=0, y=a^2t_0, x=x_1$ 和 x_2 构成（图12-5）. 初始条件在图12-5上也表现为边界 Σ 上的"边界条件".

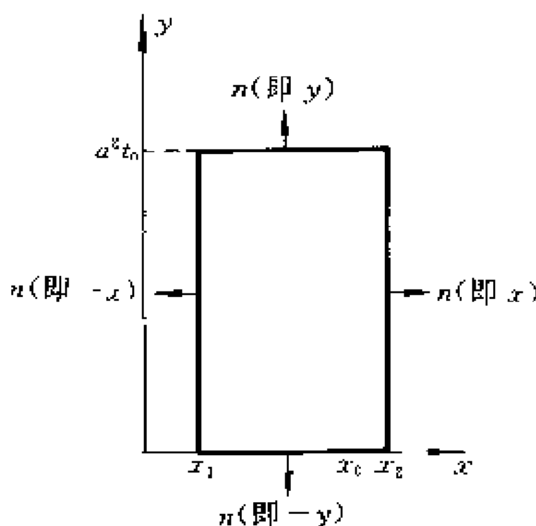


图 12-5

伴随算符 M 的格林函数 $G(x,t;x_0,t_0)$ 满足

$$MG \equiv \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{1}{a^2}\delta(x-x_0)\delta(t-t_0). \tag{12.5.23}$$

将(12.5.20)和(12.5.23)代入格林公式(12.5.13)，MG 的奇异性可如前处理，于是同样可得到

$$u(x_0,t_0) = \int_{x_1}^{x_2}\int_0^{a^2t_0} G(x,t;x_0,t_0)f(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_0^{a^2t_0}\left(G\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial G}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=x_1}^{x=x_2}\mathrm{d}y - \int_{x_1}^{x_2}(uG)\Bigg|_{y=0}^{y=a^2t_0}\mathrm{d}x. \tag{12.5.24}$$

对于第一类边值，选取 G，使满足

$$G|_{x=x_1} = 0, G|_{x=x_2} = 0.$$

这样(12.5.24)成为

$$u(x_0,t_0) = \int_{x_1}^{x_2}\int_0^{a^2t_0} G(x,t;x_0,t_0)f(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_0^{a^2t_0}\left(u\frac{\partial G}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=x_1}^{x=x_2}\mathrm{d}y - \int_{x_1}^{x_2}(uG)\Bigg|_{y=0}^{y=a^2t}\mathrm{d}x \tag{12.5.25}$$

对于第二类边值，选取 G，使满足

$$G_x|_{x=x_1} = 0, G_x|_{x=x_2} = 0.$$

这样，(12.5.24)成为

$$u(x_0,t_0) = \int_{x_1}^{x_2}\int_0^{a^2t_0} G(x,t;x_0,t_0)f(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$-\int_0^{a^2t_0}\left(G\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=x_1}^{x=x_2}dy-\int_{x_1}^{x_2}(uG)\Bigg|_{y=0}^{y=a^2t_0}dx. \tag{12.5.26}$$

(三）双曲型方程

$$Lu=u_{xx}-u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu=f. \tag{12.5.27}$$

算符 L 的伴随算符 M 由下式给出：

$$Mv=v_{xx}-v_{yy}-(b_1v)_x-(b_2v)_y+cv. \tag{12.5.28}$$

在这里，推广的格林公式可具体地写成

$$\iint_T(vLu-uMv)dS=\int_\Sigma[X\cos(n,x)+Y\cos(n,y)]ds, \tag{12.5.29}$$

其中

$$\begin{cases}X=vu_x-uv_x+b_1uv=(uv)_x-(2v_x-b_1v)u\\ \quad=-(uv)_x+(2u_x+b_1u)v,\\ Y=uv_y-vu_y+b_2uv=-(uv)_y+(2v_y+b_2v)u\\ \quad=(uv)_y-(2u_y-b_2u)v.\end{cases} \tag{12.5.30}$$

双曲型方程的定解条件往往是这样提的：在 xy 平面的某根曲线 l（图12-6）上给定 u 和 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 的值. l 的一个特例是直线 $y=0$，在这直线上的 u 和 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 即是 $u|_{y=0}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{y=0}$. 这正是以前常用的初始位移和初始速度.

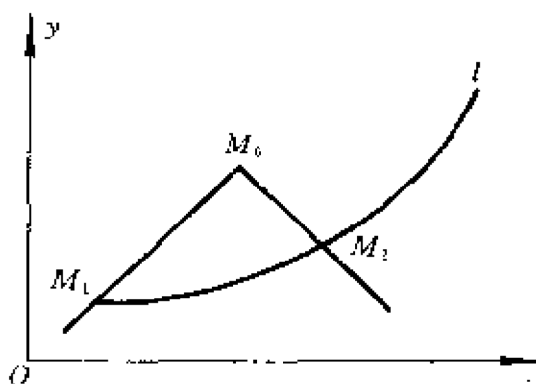


图 12-6

在 xy 平面上取一点 $M_0(x_0,y_0)$，我们希望找到 $u(x_0,y_0)$ 的积分公式. 过点 M_0 作两根特征线：

$$x-y=\text{常数},$$
$$x+y=\text{常数},$$

它们各自跟 l 相交于点 $M_1(x_1,y_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2)$.

把推广的格林公式(12.5.4)应用于曲线三角形 $M_0M_1M_2$. 考虑到 M_0M_1 段上的

$$\cos(n,x)=-\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \cos(n,y)=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$dx=-\frac{1}{\sqrt{2}}ds,\qquad dy=-\frac{1}{\sqrt{2}}ds,$$

因而

$$\int_{M_0M_1}[X\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{x})+Y\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{y})]\mathrm{d}s$$

$$=\int_{M_0M_1}\left\{[(uv)_x-(2v_x-b_1v)u]\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right.$$

$$\left.+[-(uv)_y+(2v_y+b_2v)u]\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}\mathrm{d}s$$

$$=\int_{M_0M_1}\left\{(uv)_x\mathrm{d}x-2v_xu\mathrm{d}x-\frac{b_1}{\sqrt{2}}vu\mathrm{d}s-(uv)_y(-\mathrm{d}y)\right.$$

$$\left.+2v_yu(-\mathrm{d}y)+\frac{b_2}{\sqrt{2}}uv\mathrm{d}s\right\}$$

$$=\int_{M_0M_1}\left\{\mathrm{d}(uv)-2\frac{\partial v}{\partial s}u\mathrm{d}s+\frac{b_2-b_1}{\sqrt{2}}vu\mathrm{d}s\right\}$$

$$=u(x_1,y_1)v(x_1,y_1)-u(x_0,y_0)v(x_0,y_0)$$

$$-\int_{M_0M_1}\left(2\frac{\partial v}{\partial s}-\frac{b_2-b_1}{\sqrt{2}}v\right)u\mathrm{d}s.$$

同理，

$$\int_{M_2M_0}[X\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{x})+Y\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{y})]\mathrm{d}s$$

$$=-u(x_0,y_0)v(x_0,y_0)+u(x_2,y_2)v(x_2,y_2)$$

$$+\int_{M_2M_0}\left(2\frac{\partial v}{\partial s}+\frac{b_2+b_1}{\sqrt{2}}v\right)u\mathrm{d}s.$$

因此，推广的格林公式应用于曲线三角形 $M_0M_1M_2$ 的结果是

$$\iint_{M_0M_1M_2}(vLu-uMv)\mathrm{d}S$$

$$=-u(x_0,y_0)v(x_0,y_0)+u(x_2,y_2)v(x_2,y_2)$$

$$+\int_{M_2M_0}\left(2\frac{\partial v}{\partial s}+\frac{b_2+b_1}{\sqrt{2}}v\right)u\mathrm{d}s+u(x_1,y_1)v(x_1,y_1)$$

$$-u(x_0,y_0)v(x_0,y_0)-\int_{M_0M_1}\left(2\frac{\partial v}{\partial s}-\frac{b_2-b_1}{\sqrt{2}}v\right)u\mathrm{d}s$$

$$+\int_{M_1M_2}[X\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{x})+Y\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{y})]\mathrm{d}s,$$

即

$$u(x_0,y_0)v(x_0,y_0)=\frac{1}{2}[u(x_1,y_1)v(x_1,y_1)+u(x_2,y_2)v(x_2,y_2)]$$

$$+\int_{M_2M_0}\left(\frac{\partial v}{\partial s}+\frac{b_2+b_1}{2\sqrt{2}}v\right)u\mathrm{d}s$$
$$-\int_{M_0M_1}\left(\frac{\partial v}{\partial s}-\frac{b_2-b_1}{2\sqrt{2}}v\right)u\mathrm{d}s$$
$$+\frac{1}{2}\int_{M_1M_2}[X\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{x})+Y\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{y})]\mathrm{d}s$$
$$-\frac{1}{2}\iint_{M_0M_1M_2}(vLu-uMv)\mathrm{d}S. \qquad (12.5.31)$$

这当然还不足以解决所提出的定解问题.

现在选取这样的函数 v,它是 $Mv=0$的解,而且

$$\begin{cases}\frac{\partial v}{\partial s}+\frac{b_2+b_1}{2\sqrt{2}}v=0 & (\text{在 } M_2M_0\text{上}),\\ \frac{\partial v}{\partial s}-\frac{b_2-b_1}{2\sqrt{2}}v=0 & (\text{在 } M_0M_1\text{上}),\\ v(x_0,y_0)=1.\end{cases}$$

换句话说,

$$\begin{cases}v=e^{\int_{s_0}^{s}\frac{b_2+b_1}{2\sqrt{2}}\mathrm{d}s} & (\text{在 } M_2M_0\text{上}),\\ v=e^{\int_{s_0}^{s}\frac{b_2-b_1}{2\sqrt{2}}\mathrm{d}s} & (\text{在 } M_0M_1\text{上}).\end{cases} \qquad (12.5.32)$$

这样的函数称为算符 L 的黎曼函数.以黎曼函数代入(12.5.31)即得

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2}[u(x_1,y_1)v(x_1,y_1)+u(x_2,y_2)v(x_2,y_2)]$$
$$+\frac{1}{2}\int_{M_1M_2}[X\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{x})+Y\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{y})]\mathrm{d}s$$
$$-\frac{1}{2}\iint_{M_0M_1M_2}v(x,y,z;x_0,y_0,z_0)f(x,y,z)\mathrm{d}S.$$
$$(12.5.33)$$

这就是所提出的定解问题的解的积分公式.

可以证明黎曼函数具有对称性:

$$v(x,y;x_0,y_0)=v(x_0,y_0;x,y).$$

为了阐明黎曼函数的物理意义,设"初始"位移 $u\Big|_l$ 和速度$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_l$ 都是零,而 $f=-2\delta(x-\xi)\delta(t-\tau)$,则(12.5.33)给出

$$u(x_0,y_0)=-\frac{1}{2}\iint -2v(x,t;x_0,t_0)\delta(x-\xi)\delta(t-\tau)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$=v(\xi,\tau;x_0,t_0)=v(x_0,t_0;\xi,\tau).$$

因此可以说,黎曼函数就是作用于一点的“单位”冲力的影响函数.

习　　题

1. 求解 $u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t),u|_{t=0}=\varphi(x),u_t|_{t=0}=\psi(x)$.

2. 求解 $x^2u_{xx}-t^2u_{tt}=0,u|_{t=1}=\varphi(x),u_t|_{t=1}=\psi(x)$.

第十三章　积分变换法

在第六章，我们曾用拉普拉斯变换方法求解常微分方程.经过变换，常微分方程变成了代数方程，解出代数方程，再进行反演就得到了原来常微分方程的解.

积分变换在数学物理方程（也包括积分方程、差分方程等）中亦具有广泛的用途.经过变换以后，方程变得简单了，例如偏微分方程变成了常微分方程，解出常微分方程，再进行反演，就得到了原来偏微分方程的解.利用积分变换，有时还能得到有限形式的解，而这往往是用分离变数法不能得到的.

本章主要介绍傅里叶变换、拉普拉斯变换在求解偏微分方程中的应用.

§13.1　傅里叶变换法

用分离变数法求解有界空间的定解问题时，所得到的本征值谱是分立的，所求的解可表为对分立本征值求和的傅里叶级数.对于无界空间，用分离变数法求解定解问题时，所得到的本征值谱一般是连续的，所求的解可表为对连续本征值求积分的傅里叶积分.因此，对于无界空间的定解问题，傅里叶变换是一种很适用的求解方法.本节将通过几个例子说明运用傅里叶变换求解无界空间（含一维半无界空间）的定解问题的基本方法，并给出几个重要的解的公式.

例1　求解无限长弦的自由振动

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0, & (-\infty<x<\infty) \\ u|_{t=0}=\varphi(x), u_t|_{t=0}=\psi(x). \end{cases}$$

解 应用傅里叶变换，即用 $e^{-ikx}/2\pi$ 遍乘方程及定解条件各项，并对空间变数 x 积分（时间变数 t 视作参数）。原来的定解问题变换成

$$U''+k^2a^2U=0,$$
$$U|_{t=0}=\Phi(k), U'|_{t=0}=\Psi(k).$$

其中 $\Phi(k)$、$\Psi(k)$ 分别是 $\varphi(x)$、$\psi(x)$ 的傅里叶变换。原来的定解问题变成了常微分方程及初值条件，其通解是

$$U(t,k)=A(k)e^{ikat}+B(k)e^{-ikat}.$$

代入初始条件可定出

$$A(k)=\frac{1}{2}\Phi(k)+\frac{1}{2a}\frac{1}{ik}\Psi(k),$$

$$B(k)=\frac{1}{2}\Phi(k)-\frac{1}{2a}\frac{1}{ik}\Psi(k).$$

这样

$$U(t,k)=\frac{1}{2}\Phi(k)e^{ikat}+\frac{1}{2a}\frac{1}{ik}\Psi(k)e^{ikat}$$
$$+\frac{1}{2}\Phi(k)e^{-ikat}-\frac{1}{2a}\frac{1}{ik}\Psi(k)e^{-ikat}.$$

最后，对 $U(t,k)$ 作逆傅里叶变换。应用延迟定理与积分定理，结果是

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi. \qquad (13.1.1)$$

这正是**达朗贝尔公式**(7.4.7)。

例 2 求解无限长细杆的热传导问题

$$\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}=0, & (-\infty<x<\infty) \\ u|_{t=0}=\varphi(x). \end{cases}$$

解 作傅里叶变换，定解问题变换为

$$\begin{cases} U'+k^2a^2U=0, \\ U|_{t=0}=\Phi(k). \end{cases}$$

这个常微分方程的初始值问题的解是

$$U(t,k)=\Phi(k)e^{-k^2a^2t}.$$

再进行逆傅里叶变换，

$$u(x,t)=\mathscr{F}^{-1}[U(t,k)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(k)e^{-k^2a^2t}e^{ikx}dk$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{-ik\xi}d\xi\right]e^{-k^2a^2t}e^{ikx}dk$$

交换积分次序

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{-k^2a^2t}e^{ik(x-\xi)}dk\right]d\xi.$$

引用积分公式 $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha^2k^2}e^{\beta k}dk=(\sqrt{\pi}/\alpha)e^{\beta^2/4\alpha^2}$①.

置 $\alpha=a\sqrt{t}$，$\beta=i(x-\xi)$以利用此积分公式，即得

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\left[\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\right]d\xi. \tag{13.1.2}$$

例 3 求解无限长细杆的有源热传导问题

$$\begin{cases}u_t-a^2u_{xx}=f(x,t), & (-\infty<x<\infty)\\ u|_{t=0}=0.\end{cases}$$

解 作傅里叶变换，问题变换成非齐次常微分方程与初始条件

$$\begin{cases}U'+k^2a^2U=F(t;k),\\ U|_{t=0}=0.\end{cases}$$

为求解这个非齐次常微分方程，用 $e^{k^2a^2t}$遍乘方程各项，得

$$\frac{d}{dt}\left[U(t;k)e^{k^2a^2t}\right]=F(t;k)e^{k^2a^2t}.$$

对 t 积分一次，计及零初始值，

$$U(t;k)=e^{-k^2a^2t}\int_0^t F(\tau;k)e^{k^2a^2\tau}d\tau$$

$$=\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi,\tau)e^{-ik\xi}e^{-k^2a^2t}e^{k^2a^2\tau}d\xi d\tau.$$

进行逆傅里叶变换，

---

① $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha^2k^2+\beta k}dk=e^{\beta^2/4\alpha^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha^2(k-\beta/2\alpha^2)^2}dk=2e^{\beta^2/4\alpha^2}\int_0^{\infty}e^{-\alpha^2\xi^2}d\xi$
$=\frac{2}{\alpha}e^{\beta^2/4\alpha^2}\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{2}{\alpha}e^{\beta^2/4\alpha^2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}e^{\beta^2/4\alpha^2}.$

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi,\tau)\mathrm{e}^{-k^2a^2(t-\tau)}\mathrm{e}^{-ik\xi}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau\right]\cdot\mathrm{e}^{ikx}\mathrm{d}k.$$

交换积分次序

$$u(x,t)=\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi,\tau)\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-k^2a^2(t-\tau)}\mathrm{e}^{ik(x-\xi)}\mathrm{d}k\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau.$$

引用例 2 的积分公式计算[ ]内的积分，最后结果是

$$u(x,t)=\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi,\tau)\left[\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau. \tag{13.1.3}$$

与§12.4 例 3 用格林函数法求得的结果相同.

例 4　限定源扩散. 半导体扩散工艺的硼、磷扩散是慢扩散，杂质扩散深度远远小于硅片厚度. 研究杂质穿过硅片的一面向里扩散问题时，完全可以不管另一面的存在，把硅片看作无限厚，虽然实际上还不到一毫米厚. 这就是说，把硅片的内部当作半无界空间. 在限定源扩散中，是只让硅片表层已有的杂质向硅片内部扩散，但不让新的杂质穿过硅片表面进入硅片. 这里，所求解的是半无界空间 $x>0$ 中的定解问题

$$\begin{cases}u_t-a^2u_{xx}=0,\\ u_x|_{x=0}=0,\\ u|_{t=0}=\Phi_0\delta(x-0)\quad(x>0),\end{cases}$$

其中 Φ_0 是每单位面积硅片表层原有的杂质总量.

解　没有杂质穿过硅片表面即 $u_x|_{x=0}=0$ 是第二类齐次边界条件. 读者已经熟悉，这种边界条件意味着偶延拓，即求解无界空间中的定解问题

$$\begin{cases}u_t-a^2u_{xx}=0,\\ u|_{t=0}=\begin{cases}\Phi_0\delta(x-0)\quad(x>0)\\ \Phi_0\delta(x+0)\quad(x<0).\end{cases}\end{cases}$$

这个初始条件其实也就是 $u|_{t=0}=2\Phi_0\delta(x)$. 这样，问题成为

$$\begin{cases}u_t-a^2u_{xx}=0,\\ u|_{t=0}=2\Phi_0\delta(x)(-\infty<x<\infty)\end{cases}$$

引用(13.1.2)式,得到答案

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}2\Phi_0\delta(\xi)\left[\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\right]d\xi$$

$$=\frac{\Phi_0}{2a\sqrt{t}}\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2/4a^2t}.$$

$(2/\sqrt{\pi})e^{-x^2/4a^2t}$称为**高斯函数**,它的数值有表格可查,参看附录三.

图 13-1 描画了杂质浓度 $u(x,t)$在硅片中的分布情况. 曲线 1 对应于某个较早时刻,曲线 2、3 依次对应于越来越迟的时刻. 杂质浓度趋于均匀的趋势很明显. 每根曲线下的面积都等于 Φ_0,这反映了杂质总量不变. 每根曲线在跟纵轴相交处的切线都是水平的,即硅片表面的浓度梯度为零,这反映了没有新的杂质进入硅片.

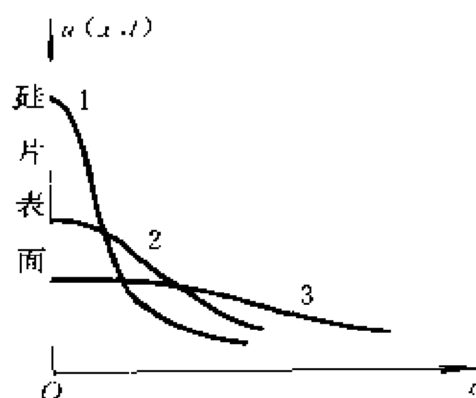


图 13-1

例 5 恒定表面浓度扩散. 在恒定表面浓度扩散中,包围硅片的气体中含有大量杂质原子,它们源源不断穿过硅片表面并向硅片内部扩散. 由于气体中杂质原子供应充分,硅片表面杂质浓度得以保持某个常数 N_0. 这里,所求解的是半无界空间 $x>0$ 中的定解问题

$$\begin{cases}u_t-a^2u_{xx}=0,\\ u|_{x=0}=N_0,\\ u|_{t=0}=0.\end{cases}$$

解 首先应把非齐次边界条件化为齐次的. 为此,令

$$u(x,t)=N_0+w(x,t),$$

就把 u 的定解问题转化为 w 的定解问题

$$\begin{cases} w_t - a^2 w_{xx} = 0, \\ w|_{x=0} = u|_{x=0} - N_0 = 0, \\ w|_{t=0} = u|_{t=0} - N_0 = -N_0. \end{cases}$$

这里是第一类齐次边界条件.读者已经熟悉,这种边界条件意味着奇延拓,即求解无界空间中的定解问题

$$\begin{cases} w_t - a^2 w_{xx} = 0, \\ w|_{t=0} = \begin{cases} -N_0 (x>0) \\ +N_0 \quad (x<0). \end{cases} \end{cases}$$

引用(13.1.2)式,得到答案

$$w(x,t) = \int_{-\infty}^{0} N_0 \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi - \int_0^{\infty} N_0 \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi$$

在右边第一个积分中令 $z=(x-\xi)/2a\sqrt{t}$, $dz=-d\xi/2a\sqrt{t}$;在右边第二个积分中令 $z=(\xi-x)/2a\sqrt{t}$, $dz=d\xi/2a\sqrt{t}$. 于是,

$$\begin{aligned} w(x,t) &= -\frac{N_0}{\sqrt{\pi}}\int_{\infty}^{x/2a\sqrt{t}} e^{-z^2} dz - \frac{N_0}{\sqrt{\pi}}\int_{-x/2a\sqrt{t}}^{\infty} e^{-z^2} dz \\ &= -\frac{N_0}{\sqrt{\pi}}\int_{-x/2a\sqrt{t}}^{x/2a\sqrt{t}} e^{-z^2} dz. \end{aligned}$$

由于被积函数是偶函数,所以

$$w(x,t) = -N_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x/2a\sqrt{t}} e^{-z^2} dz.$$

通常把 $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-z^2} dz$ 叫做**误差函数**,记作 $\text{erf}x$,它的数值有表格可查,参看附录二.这样,

$$w(x,t) = -N_0 \text{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right),$$

所求的解

$$u(x,t) = N_0 + w(x,t) = N_0\left[1 - \text{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right].$$

$1-\text{erf}x$ 叫作**余误差函数**(error function complement),记作 $\text{erfc}x$

这样.

$$u(x,t)=N_0\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right).$$

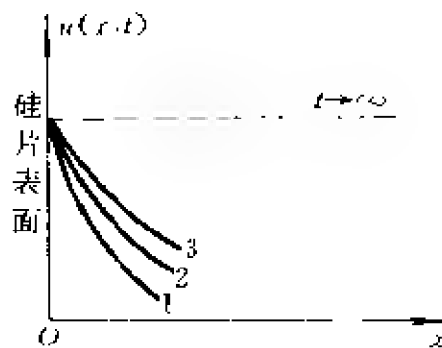


图 13-2

图 13-2 描画了杂质浓度 $u(x,t)$在硅片中分布情况. 曲线 1 对应于某个较早时刻, 曲线 2 对应于较迟时刻, 曲线 3 对应于又迟一些的时刻. 杂质浓度趋于均匀的趋势很明显. 如果扩散持续进行下去, 浓度分布最终将为常数 N_0, 如图中虚线所示.

例 6 泊松公式. 求解三维无界空间中的波动问题

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2\Delta_3 u=0,\\ u|_{t=0}=\varphi(\boldsymbol{r}),U_t|_{t=0}=\psi(\boldsymbol{r}).\end{cases}$$

解 作傅里叶变换, 问题变换为常微分方程的初始值问题

$$\begin{cases}U''+k^2a^2U=0,\\ U|_{t=0}=\Phi(\boldsymbol{k}),U'|_{t=0}=\Psi(\boldsymbol{k}).\end{cases}$$

这个问题的解是

$$U(t,\boldsymbol{k})=\frac{1}{2}\Phi(\boldsymbol{k})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kat}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kat})+\frac{1}{2a}\frac{1}{\mathrm{i}k}\Psi(\boldsymbol{k})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kat}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kat}).$$

再进行逆傅里叶变换,

$$u(\boldsymbol{r},t)=\iiint_{-\infty}^{\infty}\left[\Phi(\boldsymbol{k})\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kat}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kat})\right.$$

$$\left.+\Psi(\boldsymbol{k})\frac{1}{2a}\frac{1}{\mathrm{i}k}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kat}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kat})\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}k_1\,\mathrm{d}k_2\,\mathrm{d}k_3$$

$$=\frac{1}{4\pi a}\iiint_{-\infty}^{\infty}\varphi(\boldsymbol{r}')\left[\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{a}{4\pi^2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kat}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kat})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}\mathrm{d}k_1\,\mathrm{d}k_2\,\mathrm{d}k_3\right]\mathrm{d}V'$$

$$+\frac{1}{4\pi a}\iiint_{-\infty}^{\infty}\psi(\boldsymbol{r}')$$

$$\left[\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{ik}(e^{ikat}-e^{-ikat})e^{ik\cdot(r-r')}dk_1\,dk_2\,dk_3\right]dV'$$

$$=\frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{-\infty}^{\infty}\varphi(\boldsymbol{r}')$$

$$\left[\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{ik}(e^{ikat}-e^{-ikat})e^{ik\cdot(r-r')}dk_1\,dk_2\,dk_3\right]dV'$$

$$+\frac{1}{4\pi a}\iiint_{-\infty}^{\infty}\psi(\boldsymbol{r}')$$

$$\left[\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{ik}(e^{ikat}-e^{-ikat})e^{ik\cdot(r-r')}dk_1\,dk_2\,dk_3\right]dV'.$$

引用§5.3例1结果，

$$u(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{-\infty}^{\infty}\varphi(\boldsymbol{r}')\iiint_{-\infty}^{\infty}\mathscr{F}$$

$$\left[\frac{1}{r}\delta(r-at)e^{ik\cdot(r-r')}dk_1\,dk_2\,dk_3\right]dV'$$

$$+\frac{1}{4\pi a}\iiint_{-\infty}^{\infty}\psi(\boldsymbol{r}')\iiint_{-\infty}^{\infty}\mathscr{F}$$

$$\left[\frac{1}{r}\delta(r-at)e^{ik\cdot(r-r')}dk_1\,dk_2\,dk_3\right]dV'.$$

应用延迟定理，

$$u(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-at)dV'$$

$$+\frac{1}{4\pi a}\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-at)dV'$$

由于被积式中出现 $\delta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-at)$，对 $\boldsymbol{r}'$ 的积分只需在球面 S_{at}^r 上进行，S_{at}^r 以点 $\boldsymbol{r}$（确切地说，径矢为 $\boldsymbol{r}$ 的点）为球心而半径为 at.

$$u(r,t)=\frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint_{S_{at}^r}\frac{\varphi(\boldsymbol{r}')}{at}dS'+\frac{1}{4\pi a}\iint_{S_{at}^r}\frac{\psi(\boldsymbol{r}')}{at}dS',\qquad(13.1.4)$$

式中 dS' 是球面 S_{at}^r 的面积元. 答案(13.1.4)叫作**泊松公式**.

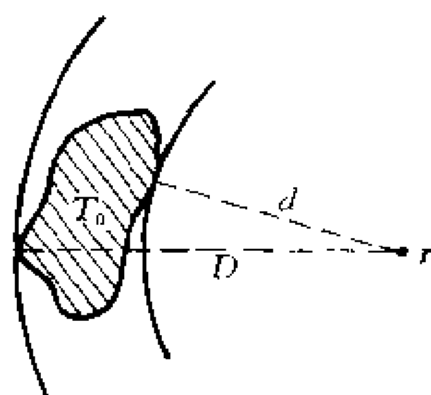


图 13-3

三维无界空间中的波动,只要知道它的初始状况,用泊松公式可以推算它在以后任一时刻的状况. 具体地说,为求时刻 t 在点 $\boldsymbol{r}$ 的 $u(\boldsymbol{r},t)$,应以点 $\boldsymbol{r}$ 为球心,以 at 为半径作球面 S_{at}^r,然后拿初始扰动 $\varphi(\boldsymbol{r}')$ 和 $\psi(\boldsymbol{r}')$ 按(13.1.4)在球面 S_{at}^r 上积分. 这是可以理解的,既然波动以速度 a 传播,只有跟点 $\boldsymbol{r}$ 相距 at 的那些点(即 S_{at}^r 上的点)的初始扰动恰好在时刻 t 传到点 $\boldsymbol{r}$.

为明显起见,设初始扰动只限于区域 T_0(图 13-3). 取定一点 $\boldsymbol{r}$,它与 T_0 最小距离是 d,最大距离是 D. 当 $t<d/a$,S_{at}^r 跟 T_0 不相交,按泊松公式,$u(\boldsymbol{r},t)=0$,这表示扰动的**前锋**尚未到达点 $\boldsymbol{r}$. 当 $d/a<t<D/a$,S_{at}^r 跟 T_0 相交,$u(\boldsymbol{r},t)\neq 0$,这表示扰动已到达点 $\boldsymbol{r}$. 当 $t>D/a$,S_{at}^r 包围了 T_0 但跟 T_0 不相交,$u(\boldsymbol{r},t)=0$,这表示扰动的**阵尾**已经过去.

例 7 推迟势. 求解三维无界空间中的受迫振动

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2\Delta_3 u=f(\boldsymbol{r},t), \\ u|_{t=0}=0, u_t|_{t=0}=0. \end{cases}$$

解 作傅里叶变换,问题变换为非齐次常微分方程的初始值问题

$$\begin{cases} U''+k^2a^2U=F(t;\boldsymbol{k}) \\ U|_{t=0}=0, U'|_{t=0}=0. \end{cases}$$

这个问题的解是(参见 §6.4 习题 7 答案)

$$U(t;\boldsymbol{k})=\frac{1}{2aik}\int_0^t F(\tau;\boldsymbol{k})[\mathrm{e}^{ika(t-\tau)}-\mathrm{e}^{-ika(t-\tau)}]\mathrm{d}\tau.$$

然后对 $U(t;\boldsymbol{k})$ 进行逆傅里叶变换.

$$u(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2aik}\int_0^t F(\tau;\boldsymbol{k})[\mathrm{e}^{ika(t-\tau)}-\mathrm{e}^{-ika(t-\tau)}]$$

$$\cdot e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}k_1\,\mathrm{d}k_2\,\mathrm{d}k_3$$

$$=\frac{1}{4\pi a}\iiint_{-\infty}^{\infty}\int_0^t f(\boldsymbol{r}',\tau)\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{2\pi}{\mathrm{i}k}[e^{\mathrm{i}ka(t-\tau)}-e^{-\mathrm{i}ka(t-\tau)}]$$

$$\cdot e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}\mathrm{d}k_1\,\mathrm{d}k_2\,\mathrm{d}k_3\mathrm{d}V'.$$

引用§5.3例1的结果，并应用延迟定理，

$$u(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi a}\iiint_{-\infty}^{\infty}\int_0^t f(\boldsymbol{r}',\tau)\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta[|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-a(t-\tau)]\mathrm{d}\tau\mathrm{d}V'.$$

再引用(5.3.5)以及关系式 $\delta(ax)=\delta(x)/|a|$，

$$u(\boldsymbol{r},t)-\frac{1}{4\pi a^2}\iiint_{-\infty}^{\infty}\int_0^t f(\boldsymbol{r}',t)\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta\left(t-\tau-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{a}\right)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}V'$$

$$=\frac{1}{4\pi a^2}\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\boldsymbol{r}',t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/a)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'.$$

本问题的 $f(\boldsymbol{r},t)$ 中的 $t\geqslant 0$，所以上面这个积分其实不必在无界空间进行，只需在条件 $t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/a\geqslant 0$ 下积分. 换句话说，对 $\boldsymbol{r}'$ 的积分只需在球体 T'_{at} 中进行，此球的球心的径矢为 $\boldsymbol{r}$，而半径为 at. 这样，

$$u(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi a^2}\iiint_{T'_{at}}\frac{f(\boldsymbol{r}',t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/a)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'. \tag{13.1.5}$$

值得注意的是 f 的宗量 t 换成了 $t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/a$. 这是可以理解的，既然扰动以速度 a 传播，从点 $\boldsymbol{r}'$ 出发的扰动，如果在时刻 t 对点 $\boldsymbol{r}$ 产生影响，必然是在时刻 $t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/a$ 出发的. 为了强调这种时间差异，通常把 $f(\boldsymbol{r}',t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/a)$ 记作 $[f]$. 于是(13.1.5)又可写成

$$u(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi a^2}\iiint_{T'_{at}}\frac{[f]}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' \tag{13.1.6}$$

这叫作**推迟势**.

例8　柱面波　降维法. 求解二维无界空间中的波动问题

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2\Delta_2 u=0,\\ u|_{t=0}=\varphi(x,y),\ u_t|_{t=0}=\psi(x,y).\end{cases}$$

解 当然可以像例 6 那样用傅里叶变换法求解.不过,我们知道,所谓二维空间即 xy 平面的波动其实还是三维空间中的波动,只是这波动跟坐标 z 无关而已.这样说来,二维无界空间中的波动问题的解也由泊松公式(13.1.4)给出.但既然问题跟坐标 z 无关,当然不希望泊松公式中出现 z.三维波动的泊松公式,消除了坐标 z,就成为二维波动的公式,这叫作**降维法**.

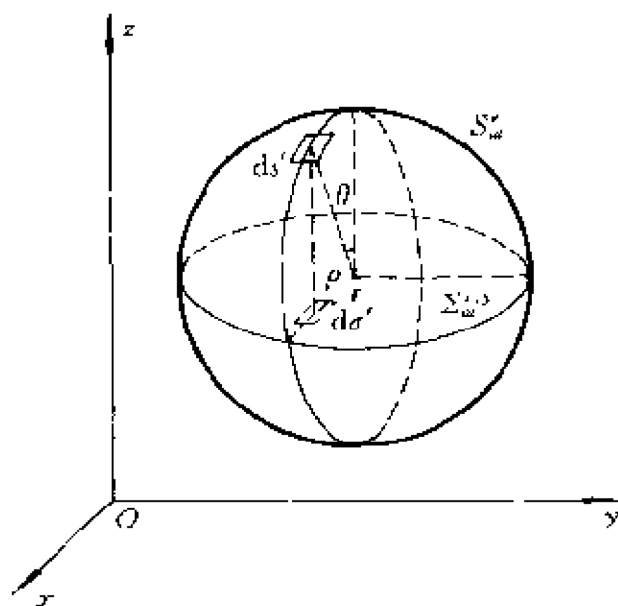


图 13-4

对于二维问题,球面 S_{at}^r 上的积分应代之以 xy 平面的圆 $\Sigma_{at}^{x,y}$ 上的积分.参看图 13-4,$\Sigma_{at}^{x,y}$ 上的面积元

$$
\begin{aligned}
d\sigma' &= dS'\cos\theta = dS'\frac{\sqrt{a^2t^2-\rho^2}}{at} \\
&= dS'\frac{\sqrt{a^2t^2-(x'-x)^2-(y'-y)^2}}{at},
\end{aligned}
$$

即

$$
dS' = d\sigma'\frac{at}{\sqrt{a^2t^2-(x'-x)^2-(y'-y)^2}}.
$$

又,球面 S_{at}^r 的上下两半都投影于同一圆,所以

$$
2dS' = 2d\sigma'\frac{at}{\sqrt{a^2t^2-(x'-x)^2-(y'-y)^2}}.
$$

于是，泊松公式在二维问题中成为

$$u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{\Sigma_{at}^{x,y}}\frac{\varphi(x',y')}{\sqrt{a^2t^2-(x'-x)^2-(y'-y)^2}}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{\Sigma_{at}^{x,y}}\frac{\psi(x',y')}{\sqrt{a^2t^2-(x'-x)^2-(y'-y)^2}}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'.$$

(13.1.7)

注意二维波动有所谓**后效**. 把图 13-3 当作二维的图来看，只要 $t>d/a$，$\Sigma_{at}^{x,y}$ 跟 T_0 总有重叠部分，积分值一般不等于零，故在 (x,y) 点总有扰动. 只有当 $t\to\infty$ 时，u 才趋于零[at 出现在 (13.1.7)的分母中]. 把二维波动看作是某种三维波动的横剖面就不难理解这种后效.

习　题

1. 求解无限长传输线上的电振荡传播问题. $G:C=R:L$ 的情况跟 $G:C\neq R:L$ 的情况有什么不同？

2. 研究半无限长细杆导热问题. 杆端 $x=0$ 温度保持为零. 初始温度分布为 $K(\mathrm{e}^{-\lambda x}-1)$.

3. 半无界杆，杆端 $x=0$ 有谐变热流 $B\sin\omega t$ 进入，求长时间以后的杆上温度分布 $u(x,t)$.

4. 应用泊松公式计算下述定解问题的解. $u_{tt}-a^2\Delta u=0$，初始速度为零，初始位移在某个单位球内为 1，在球外为零.

5. 应用泊松公式计算下述定解问题的解. $u_{tt}-a^2\Delta u=0$，初始速度为零，初始位移在球 $r=r_0$ 以内为 $A\cos(\pi r/2r_0)$，在球外为零.

6. 二维波动，初始速度为零，初始位移在圆 $\rho=1$ 以内为 1，在圆外为零. 试求 $u|_{\rho=0}$.

7. 求解三维无界空间中的输运问题 $u_t-a^2\Delta u=0$，$u|_{t=0}=\varphi(x,y,z)$.

8. 例 6 研究二维无界空间中的自由振动是从初始($t=0$)状况推算以后($t>0$)的状况. 试重新求解例 6，从初始状况反推以前($t<0$)的状况.

9. 求解一维半无界空间的输运问题 $u_t-a^2u_{xx}=0$，$u|_{x=0}=At$，$u|_{t=0}=0$.

10. 在一维半无界空间中求解 $u_t-a^2u_{xx}=0$，$u|_{x=0}=f(t)$，$u|_{t=0}=\varphi(x)$.

11. 在一维半无界空间中求解 $u_t-a^2u_{xx}=0, u_x|_{x=0}=q(t), u|_{t=0}=0$.

12. 例 7 研究三维无界空间中的受迫振动是从初始($t=0$)状况推算以后($t>0$)的状况. 试重新求解例 7,从初始($t=0$)状况反推以前($t<0$)的状况.

13. 试用降维法由泊松公式(13.1.4)推出一维波动的达朗贝尔公式(7.4.7).

§13.2 拉普拉斯变换法

拉普拉斯变换方法适于求解初值问题,不管方程及边界条件是否为齐次的.

例 1 求解硅片的恒定表面浓度扩散问题. 把硅片的厚度当作无限大,这是半无界空间的定解问题

$$\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}=0 \quad (x>0), \\ u|_{x=0}=N_0, \\ u|_{t=0}=0. \end{cases}$$

解 对泛定方程和边界条件施行拉普拉斯变换,至于初始条件则通过导数定理(6.2.12)而考虑到. 变换的结果是

$$\begin{cases} p\bar{u}-a^2\bar{u}_{xx}=0 \quad (x>0), \\ \bar{u}|_{x=0}=N_0\dfrac{1}{p}. \end{cases}$$

式中 $\bar{u}$ 是 x 的函数,p 则作为参数而进入 $\bar{u}$,即 $\bar{u}=\bar{u}(x;p)$

这个常微分方程的通解是

$$\bar{u}(x;p)=A\mathrm{e}^{-\sqrt{p}\,x/a}+B\mathrm{e}^{\sqrt{p}\,x/a}.$$

考虑到 $\lim\limits_{x\to\infty}\bar{u}$ 不应为无限大,积分常数 B 定为零. 又,利用边界条件定出积分常数 $A=N_0\dfrac{1}{p}$. 于是,

$$\bar{u}(x;p)=N_0\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-\sqrt{p}\,x/a}.$$

进行反演. 由附录二的公式 18,得

$$u(x;t)=N_0\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right).$$

本例即§13.1例5，可对照.

例2 求解无界弦的振动

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=0,\\ u|_{t=0}=\varphi(x), \quad u_t|_{t=0}=\psi(x).\end{cases}$$

解 对泛定方程施行拉普拉斯变换，初始条件通过二阶导数定理(6.2.12)而考虑到.变换的结果是

$$p^2\overline{u}-p\varphi-\psi-a^2\overline{u}_{xx}=0.$$

这个非齐次常微分方程的通解是

$$\overline{u}(x;p)=A\mathrm{e}^{px/a}+B\mathrm{e}^{-px/a}-\frac{1}{2a}\mathrm{e}^{px/a}\int^{(x)}\frac{\mathrm{e}^{-p\xi/a}}{p}[\psi(\xi)+p\varphi(\xi)]\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2a}\mathrm{e}^{-px/a}\int^{(x)}\frac{\mathrm{e}^{p\xi/a}}{p}[\psi(\xi)+p\varphi(\xi)]\mathrm{d}\xi.$$

考虑到$\lim\limits_{x\to\infty}\overline{u}$不应为无限大，积分常数$A$定为零；$\lim\limits_{x\to-\infty}\overline{u}$也不应为无限大，积分常数$B$也定为零.为了保证积分收敛，第一个积分的下限取为∞，第二个积分的下限则取为$-\infty$.这样，

$$\begin{aligned}\overline{u}(x;p)&=-\frac{1}{2a}\int_{\infty}^{x}\frac{\mathrm{e}^{-p(\xi-x)/a}}{p}[\psi(\xi)+p\varphi(\xi)]\mathrm{d}\xi\\&\quad+\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{x}\frac{\mathrm{e}^{-p(x-\xi)/a}}{p}[\psi(\xi)+p\varphi(\xi)]\mathrm{d}\xi\\&=\left[\frac{1}{2a}\int_{x}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-p(\xi-x)/a}}{p}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{x}\frac{\mathrm{e}^{-p(x-\xi)/a}}{p}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\right]\\&\quad+\left[\frac{1}{2a}\int_{x}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-p(\xi-x)/a}}{p}p\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi\right.\\&\quad\left.+\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{x}\frac{\mathrm{e}^{-p(x-\xi)/a}}{p}p\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi\right].\end{aligned}$$

第二个[ ]跟第一个[ ]相比较，$\varphi(\xi)$代替了$\psi(\xi)$，并且多一个因子p.因此，先对第一个[ ]进行反演，得到原函数之后，把ψ改为φ并对t求导就得第二个[ ]的原函数.

运用延迟定理于$\frac{1}{p}\doteqdot H(t)$，

$$\frac{e^{-p(\xi-x)/a}}{p} \doteq H\left(t-\frac{\xi-x}{a}\right)=\begin{cases}1 & (\xi<x+at),\\0 & (\xi>x+at).\end{cases}$$

于是，

$$\frac{1}{2a}\int_x^{\infty}\frac{e^{-p(\xi-x)/a}}{p}\psi(\xi)d\xi \doteq \frac{1}{2a}\int_x^{x+at}\psi(\xi)d\xi.$$

同理，

$$\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{x}\frac{e^{-p(x-\xi)/a}}{p}\psi(\xi)d\xi \doteq \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x}\psi(\xi)d\xi.$$

这样，完成反演

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi+\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi(\xi)d\xi\right]\\&=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi+\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)].\end{aligned}$$

这就是达朗贝尔公式(7.4.7).

例 3 求解无限长传输线上的电报方程

$$\begin{cases}RGU+(LG+RC)U_t+LCU_{tt}-U_{xx}=0,\\U|_{t=0}=\Phi(x),U_t|_{t=0}=\Psi(x).\end{cases}$$

解 像§7.3末尾那样，作函数变换

$$U(x,t)=e^{-\frac{LG+RC}{2LC}}u(x,t),$$

定解问题转化为

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}-b^2u=0,\\u|_{t=0}=\varphi(x),u_t|_{t=0}=\psi(x),\end{cases}$$

其中

$$a^2=\frac{1}{LC},b=\frac{1}{2}(LG-RC)a^2,\varphi(x)=\Phi(x),$$

$$\psi(x)=\Psi(x)+\frac{LG+RC}{2LC}\Phi(x).$$

对泛定方程施行拉普拉斯变换，初始条件通过导数定理(6.2.12)而考虑到. 变换的结果是

$$p^2\overline{u}-p\varphi-\psi-a^2\overline{u}_{xx}-b^2\overline{u}=0.$$

这个非齐次常微分方程的通解是

$$\bar{u}(x;p)=Ae^{x\sqrt{p^2-b^2}/a}+Be^{-x\sqrt{p^2-b^2}/a}$$
$$-\frac{1}{2a}\int^{(x)}\frac{e^{-\frac{\xi-x}{a}\sqrt{p^2-b^2}}}{\sqrt{p^2-b^2}}[\psi(\xi)+p\varphi(\xi)]d\xi$$
$$+\frac{1}{2a}\int^{(x)}\frac{e^{-\frac{x-\xi}{a}\sqrt{p^2-b^2}}}{\sqrt{p^2-b^2}}[\psi(\xi)+p\varphi(\xi)]d\xi.$$

考虑到$\lim\limits_{x\to\infty}\bar{u}$不应为无限大，积分常数 A 定为零；$\lim\limits_{x\to-\infty}\bar{u}$也不应为无限大，积分常数 B 也定为零. 为了保证积分收敛，第一个积分的下限取为∞，第二个积分的下限取为$-\infty$. 这样，

$$\bar{u}(x;p)=-\frac{1}{2a}\int_{\infty}^{x}\frac{e^{-\frac{\xi-x}{a}\sqrt{p^2-b^2}}}{\sqrt{p^2-b^2}}[\psi(\xi)+p\varphi(\xi)]d\xi$$
$$+\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{x}\frac{e^{-\frac{x-\xi}{a}\sqrt{p^2-b^2}}}{\sqrt{p^2-b^2}}[\psi(\xi)+p\varphi(\xi)]d\xi$$
$$=\left[\frac{1}{2a}\int_{x}^{\infty}\frac{e^{-\frac{\xi-x}{a}\sqrt{p^2-b^2}}}{\sqrt{p^2-b^2}}\psi(\xi)d\xi+\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{x}\frac{e^{-\frac{x-\xi}{a}\sqrt{p^2-b^2}}}{\sqrt{p^2-b^2}}\psi(\xi)d\xi\right]$$
$$+\left[\frac{1}{2a}\int_{x}^{\infty}\frac{e^{-\frac{\xi-x}{a}\sqrt{p^2-b^2}}}{\sqrt{p^2-b^2}}p\varphi(\xi)d\xi\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{x}\frac{e^{-\frac{x-\xi}{a}\sqrt{p^2-b^2}}}{\sqrt{p^2-b^2}}p\varphi(\xi)d\xi\right].$$

第二个[ ]跟第一个[ ]相比较，$\varphi(\xi)$代替了 $\psi(\xi)$，并且多一个因子 p. 因此，先对第一个[ ]进行反演，得到原函数之后，把 ψ 改为 φ 并对 t 求导就得第二个[ ]的原函数.

由附录二的公式 30，

$$\frac{e^{-\frac{\xi-x}{a}\sqrt{p^2-b^2}}}{\sqrt{p^2-b^2}}\risingdotseq I_0\left(b\sqrt{t^2-\frac{(x-\xi)^2}{a^2}}\right)H\left(t-\frac{\xi-x}{a}\right)$$

于是，

$$\frac{1}{2a}\int_x^{\infty}\frac{e^{-\frac{\xi-x}{a}\sqrt{p^2-b^2}}}{\sqrt{p^2-b^2}}\psi(\xi)d\xi$$
$$\doteq\frac{1}{2a}\int_x^{x+at}I_0\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2t^2-(x-\xi)^2}\right)\psi(\xi)d\xi.$$

同理，

$$\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{x}\frac{e^{-\frac{x-\xi}{a}\sqrt{p^2-b^2}}}{\sqrt{p^2-b^2}}\psi(\xi)d\xi$$
$$\doteq\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x}I_0\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2t^2-(x-\xi)^2}\right)\psi(\xi)d\xi.$$

这样，完成反演

$$\begin{aligned}u(x,t)=&\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}I_0\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2t^2-(x-\xi)^2}\right)\psi(\xi)d\xi\\&+\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}I_0\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2t^2-(x-\xi)^2}\right)\varphi(\xi)d\xi\right]\\=&\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}I_0\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2t^2-(x-\xi)^2}\right)\psi(\xi)d\xi\\&+\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]\\&+\frac{bt}{2}\int_{x-at}^{x+at}\frac{1}{\sqrt{a^2t^2-(x-\xi)^2}}I_0'\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2t^2-(x-\xi)^2}\right)\\&\varphi(\xi)d\xi.\end{aligned}$$

习　　题

1. 求解一维无界空间中的扩散问题即 $u_t-a^2u_{xx}=0, u|_{t=0}=\varphi(x)$.

2. 求解硅片的限定源扩散问题. 把硅片的厚度当作无限大，这是半无界空间的定解问题 $u_t-a^2u_{xx}=0, u_x|_{x=0}=0, u|_{t=0}=\Phi_0\delta(x-0)$. [本题即§13.1例4，可对照.]

3. 求解一维无界空间的有源输运问题 $u_t-a^2u_{xx}=f(x,t), u|_{t=0}=0$. [本题即§13.1例3，可对照.]

4. 求解一维半无界空间的输运问题 $u_t-a^2u_{xx}=0, u|_{t=0}=0$，边界条件是 $u|_{x=0}=f(t)$. [本题为§13.1习题10的一部分，可对照.]

5. 求解无界弦的受迫振动 $u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t), u|_{t=0}=\varphi(x), u_t|_{t=0}=\psi(x)$.

第十四章　保角变换法

§1.5研究过用解析函数描写平面标量场的问题. 不过，在那里只是先任意提出一个解析函数，然后阐明它描写什么样的平面标量场，或者说，它是什么样的平面标量场的复势. 但实际上，更重要的问题却是根据给定的边界条件求出平面标量场的复势. 这当然可以考虑用分离变数法或利用解的积分公式来解决. 但是，如果边界的形状比较复杂，分离变数法或积分公式用起来都有困难. 本章提供一种化难为易的办法，把边界形状比较复杂的平面标量场转化为边界形状比较简单的平面标量场再去求解.

§14.1　保角变换的基本性质

用适当的变换

$$\zeta=\zeta(z),\quad z=z(\zeta) \tag{14.1.1}$$

即

$$\begin{cases}\xi=\xi(x,y),\\ \eta=\eta(x,y),\end{cases}\quad \begin{cases}x=x(\xi,\eta)\\ y=y(\xi,\eta)\end{cases} \tag{14.1.2}$$

可以将复杂的边界变成较简单的边界. 但是，还得研究一下经过这样的变换，描述平面标量场的拉普拉斯方程变成什么样子. 事实上，经过变换(14.1.1)，拉普拉斯方程

$$u_{xx}+u_{yy}=0 \tag{14.1.3}$$

化成

$$(\xi_x^2+\xi_y^2)u_{\xi\xi}+2(\xi_x\eta_x+\xi_y\eta_y)u_{\xi\eta}+(\eta_x^2+\eta_y^2)u_{\eta\eta}$$
$$+(\xi_{xx}+\xi_{yy})u_\xi+(\eta_{xx}+\eta_{yy})u_\eta=0. \tag{14.1.4}$$

如果新的自变数 ζ 在所研究的区域上是 z 的解析函数，则根据

(1.3.1),(1.3.2),(1.3.3),(1.4.1),(1.4.2)和(1.4.3),

$$\xi_x^2+\xi_y^2=|\zeta'(z)|^2, \qquad \eta_x^2+\eta_y^2=|\zeta'(z)|^2,$$

$$\xi_x\eta_x+\xi_y\eta_y=0, \xi_{xx}+\xi_{yy}=0, \eta_{xx}+\eta_{yy}=0,$$

而(14.1.4)就成为

$$|\zeta'(z)|^2(u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta})=0 \tag{14.1.5}$$

这是说,如果 $\zeta(z)$ 是解析函数,则除了 $\zeta'(z)=0$ 的点之外,z 平面某个区域上的调和函数经过代换(14.1.1)即(14.1.2)之后成为 ζ 平面相应区域上的调和函数.

这个办法也可用来求解二维泊松方程

$$u_{xx}+u_{yy}=f(x,y) \tag{14.1.6}$$

的边值问题.事实上,在解析函数 $\zeta=\zeta(z)$ 的代换(14.1.1)下,泊松方程(14.1.6)变为

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=\frac{1}{|\zeta'(z)|^2}f[x(\xi,\eta),y(\xi,\eta)]. \tag{14.1.7}$$

仍然是泊松方程,只是"源"的强度(对于静电场来说,即电荷密度)变为 $1/|\zeta'(z)|^2$ 倍.注意这个倍数一般说来不是常数而是逐点而异的.

现在着重研究一下由解析函数 $\zeta=\zeta(z)$ 所表征的自变数代换的基本性质.

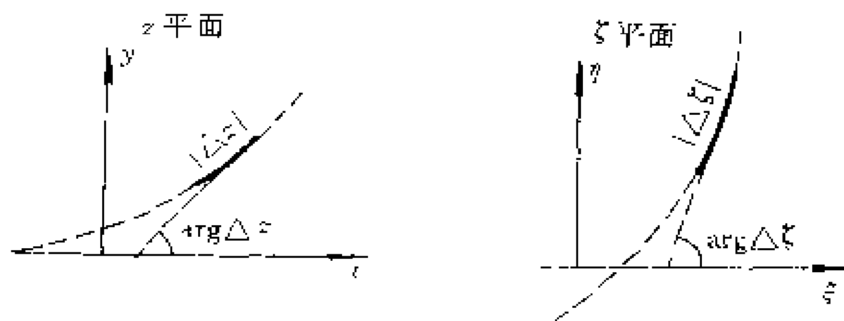


图14-1

在 z 平面上每给定一点,ζ 平面必有一点 $\zeta=\zeta(z)$ 跟它相对应.这样,在 z 平面上每给定一根曲线,ζ 平面必有一根对应的曲线(图14-1).在相应的两曲线上各截取相应的一小段 $(z,z+\Delta z)$ 和 $(\zeta,\zeta+\Delta\zeta)$,则有

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta\zeta}{\Delta z}=\frac{d\zeta}{dz}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{|\Delta\zeta|}{|\Delta z|}e^{i(\arg\Delta\zeta-\arg\Delta z)}. \qquad (14.1.8)$$

由此可见，解析函数的导数具有如下几何意义：它的模代表的是，经过该解析函数所表示的变换，无穷小线段元 dz 变为 ζ 平面上的无穷小线段元 $d\zeta$，其长度**伸缩比**（或称**放大率**）；导数的辐角则代表 $d\zeta$ 相对于 dz 逆时针方向转过的角度.

由于 $d\zeta/dz$ 的值与 $\Delta z\to 0$的方式无关，因此，如果在 z 平面上有两根曲线相交于点 z，则在 ζ 平面上也有相应的两根曲线相交于相应的点 ζ. 从 z 平面到 ζ 平面，两曲线都是逆时针方向旋转 $\arg\zeta'(z)$，所以两曲线交角不变. 因此，解析函数 $\zeta=\zeta(z)$所表征的代换叫作**保角变换**，或**保角映象**.

在 $\zeta'(z)=0$的点，$\arg\zeta'(z)$失去意义，也就谈不上交角不变.

如果 ζ 是 z^* 的解析函数，则两曲线的交角大小也保持不变，但由于 z^* 是 z 对 x 轴的反映，交角的方向反转，顺时针变为逆时针，逆时针变为顺时针. 通常把这类变换称为**第二类保角变换**.

设在 z 平面上有闭曲线 l，在保角变换下，闭曲线 l 变为 ζ 平面上的闭曲线 λ. 在这两个闭曲线上沿着相应的方向前进，则左侧的区域 B 对应于左侧的区域 β，右侧的区域 C 对应于右侧的区域 γ，如图14-2.

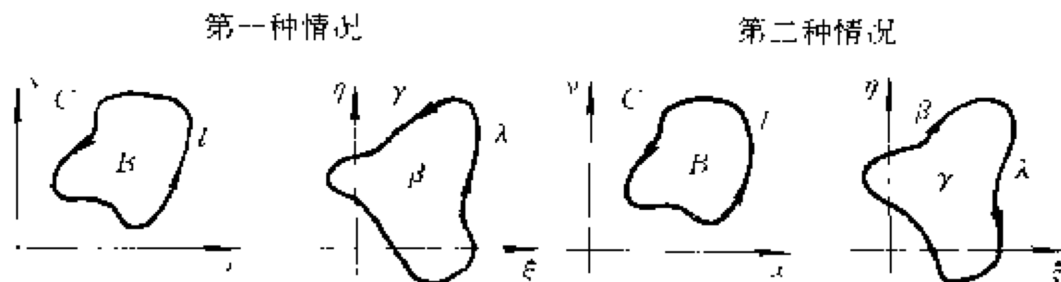


图14-2

利用辐角原理（§2.4）还可以证明，如果 $\zeta(z)$是区域 B 上的解析函数，则发生图14-2的第一种情况，即 l 的内域 B 变为 λ 的内域 β，l 的外域 C 变为 λ 的外域 γ；如 $\zeta(z)$是区域 B 上的解析函数，但要除去一个孤立的一阶极点，则发生图14-2的第二种情况，即 l 的内域 B 变为 λ 的外域 β，l 的外域 C 变为 λ 的内域 γ. 其实，只要

在区域 B 内任取一点 z，按照 $\zeta=\zeta(z)$ 算出相应的点 ζ，就可判断究竟发生第一种情况还是第二种情况.

可以证明，任意一个单通区域必可通过某个保角变换变为另一个任意给定的单通区域，这叫作**黎曼定理**. 不过，对我们说来，更重要的是，在各个具体问题中找到适当的保角变换. 下一节将介绍某些常用的保角变换.

§14.2 某些常用的保角变换

（一）线性变换

线性函数

$$\zeta(z)=az+b \quad (a\text{ 和 }b\text{ 是复常数}) \tag{14.2.1}$$

的导数

$$\zeta'(z)=a$$

是常数. 这是说，长度放大率是常数，图形的各个部分按同样比例放大因而形状不变.

事实上，

$$\zeta(z)=az+b=a\left(z+\frac{b}{a}\right)=|a|e^{i\arg a}\left(z+\frac{b}{a}\right),$$

这可以分解为

$$z_1=z+\frac{b}{a},\quad z_2=e^{i\arg a}z_1,\quad \zeta=|a|z_2.$$

从 z 平面到 z_1 平面，图象作为整体而平移，位移矢量对应于复数 b/a；从 z_1 平面到 z_2 平面，图象绕原点旋转 $\arg a$；从 z_2 平面到 ζ 平面，图象放大到 $|a|$ 倍. 形状确实保持不变，或者说，线性变换只是把图象变为它的相似形.

既然图象在线性变换下保持形状不变，那么线性变换如果单独使用，对于研究平面场并无帮助. 但线性变换跟其他保角变换联合使用可能还是有作用的(参看例2).

（二）幂函数和根式

幂函数

$$\zeta(z)=z^n \tag{14.2.2}$$

的导数

$$\zeta'(z)=nz^{n-1}.$$

在原点，导数 $\zeta'(0)=0$，交角并不保持不变. 事实上，

$$\arg\zeta=\arg(z^n)=n\arg z,$$

这是说，在原点的交角放大为 n 倍. 在原点以外任一有限远点，交角保持不变.

根式

$$\zeta(z)=\sqrt[n]{z} \tag{14.2.3}$$

是(14.2.2)的逆变换，在原点的交角缩小为$1/n$倍.

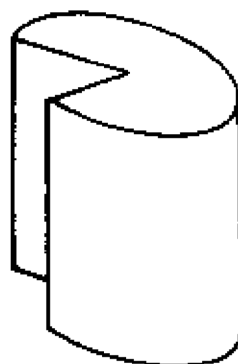


图 14-3

例 1 一个甚大金属导体，挖去一个二面角，角的大小为60°(图14-3). 让导体充电到电势V_0，试求二面角内电场中的电势分布.

解 把导体看作无限长，只须研究一个横截面，把这横截面叫作 z 平面. 在 z 平面上，二面角表现为顶角 $\pi/3$的角域(图14-4).

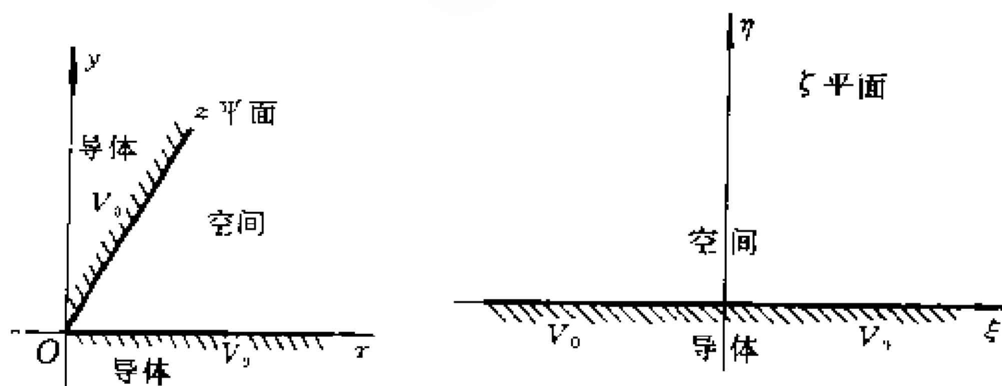


图 14-4

把顶角放大到三倍则成为 π，而顶角为 π 的角域即半平面，问题容易解得多.

由此可见，应作变换 $\zeta=z^3$. 在 ζ 平面，下半平面是导体，上半平面是空间. 在上半平面的电势分布易于解出为

$$u=V_0+C\eta,$$

常数 C 取决于导体表面的电荷面密度. 回到 z 平面，角域中的电势分布是

$$u=V_0+C\eta=V_0+C\mathrm{Im}\zeta=V_0+C\mathrm{Im}z^3=V_0+C(3x^2y-y^3).$$

例 2 研究平底水槽中的水的流动，槽底有一竖立的薄片阻挡水流(图14-5a).

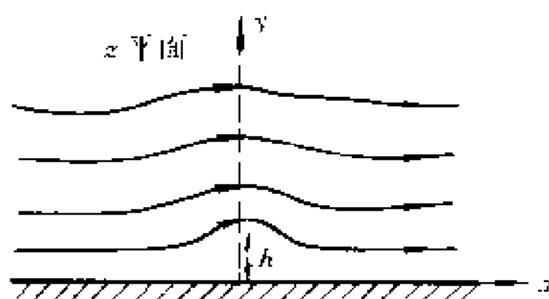


图 14-5 a

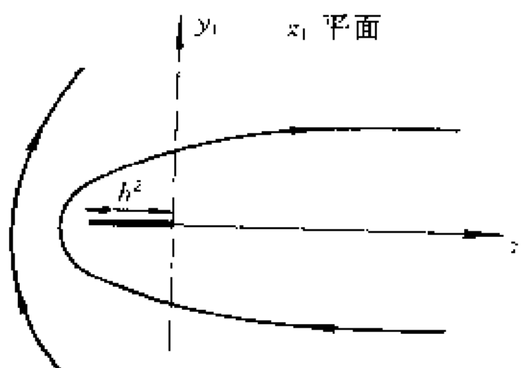


图 14-5 b

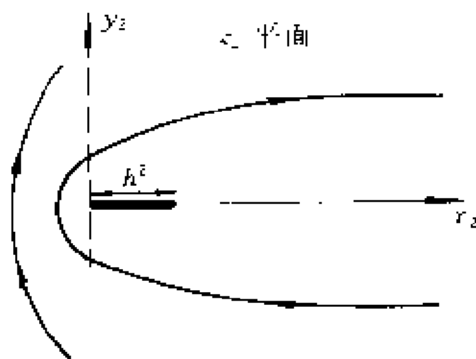


图 14-5 c

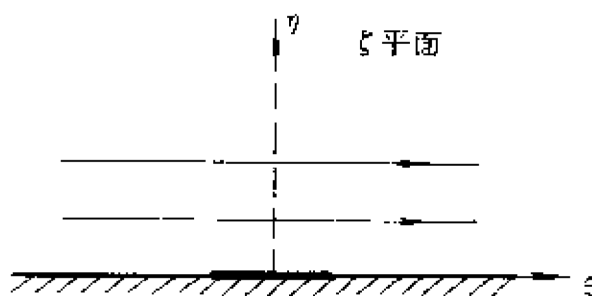


图 14-5 d

解 这个问题的困难来自槽底的薄片，它的特征是两边各有一个直角. 作变换

$$z_1=z^2,$$

直角加倍成为平角(即 π)，如图14-5b. 整个水槽底加上竖立的薄片变为 z_1平面的实轴上从 $-h^2$经原点向 $+\infty$去的割线两岸，这样，问题就容易得多.

z_1平面的割线端点不在原点，这不大方便.作变换

$$z_2=z_1+h^2,$$

割线端点移到原点(图14-5c).

割线两岸可说是夹角为2π的两根直线.作变换

$$\zeta=\sqrt{z_2},$$

夹角变为1/2倍，等于π，这是说，割线两岸成为ζ平面的实轴(图14-5d).

ζ平面上的速度势u显然是

$$u=C\xi=\mathrm{Re}(C\zeta),$$

回到原来的自变数，

$$\begin{aligned}u&=\mathrm{Re}(C\sqrt{z_2})=\mathrm{Re}(C\sqrt{z_1+h^2})=\mathrm{Re}(C\sqrt{z^2+h^2})\\&=\mathrm{Re}(C\sqrt{(x^2-y^2+h^2)+\mathrm{i}2xy})\\&=C\sqrt{\frac{(x^2-y^2+h^2)+\sqrt{(x^2-y^2+h^2)^2+4x^2y^2}}{2}}\end{aligned}$$

至于在各点的流速$\boldsymbol{v}=\nabla u$不难从u算出，但这计算较繁.利用复势$w(z)=C\sqrt{z^2+h^2}$来计算可能方便些，这是因为对应于流速矢量$\boldsymbol{v}$的复数是

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}&=\frac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}=(w')^*=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}C\sqrt{z^2+h^2}\right)^*\\&=\left(\frac{Cz}{\sqrt{z^2+h^2}}\right)^*=\frac{Cz^*}{\sqrt{(z^*)^2+h^2}}.\end{aligned}$$

既已求得流速，运用流体力学中的伯努利原理还可以计算压强p.

为了阐明常数C的意义，考察远离竖立的薄片的地方的流速$\boldsymbol{v}$.对应于$\boldsymbol{v}$的复数是

$$\lim_{z\to\infty}\frac{Cz^*}{\sqrt{(z^*)^2+h^2}}=\lim_{z\to\infty}\frac{C}{\sqrt{1+(h/z^*)^2}}=C.$$

这是说，流速的x分量v_x和y分量v_y分别是

$$v_x=C,\quad v_y=0.$$

这样，远离竖立的薄片的地方，水是平行于槽底而流动的，流速就

是 C.

（三）指数函数和对数函数

指数函数

$$\zeta(z)=\mathrm{e}^{z}=\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}. \tag{14.2.4}$$

这是说，$|\zeta|=\mathrm{e}^{x}$，$\mathrm{Arg}\zeta=y$. 这样，z 平面上平行于实轴的直线“$y=$常数”变为 ζ 平面上的“$\mathrm{Arg}\zeta=$常数”，即通过原点的射线. z 平面上平行于虚轴的直线“$x=$常数”变为 ζ 平面上的“$|\zeta|=$常数”，即以原点为圆心的圆.

指数函数(14.2.4)具有纯虚数周期 $\mathrm{i}2\pi$，z 平面上 x 相同而 y 相差2π 的整倍数的那些点变为 ζ 平面上同一点. z 平面上任何一个平行于实轴而宽度为2π 的带域变为 ζ 的全平面. 带域上的直角坐标网变为 ζ 平面上的极坐标网.

对数函数

$$\zeta(z)=\ln z=\ln(|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{Arg}z})=\ln|z|+\mathrm{i}\mathrm{Arg}z \tag{14.2.5}$$

是(14.2.4)的逆变换. (14.2.5)亦即 $\mathrm{Re}\zeta=\ln|z|$，$\mathrm{Im}\zeta=\mathrm{Arg}z$，这样，$z$ 平面上以原点为圆心的圆“$|z|=$常数”变为 ζ 平面上的“$\mathrm{Re}\zeta=$常数”，即平行于虚轴的直线. z 平面上通过原点的射线“$\mathrm{Arg}z=$常数”变为 ζ 平面上的“$\mathrm{Im}\zeta=$常数”，即平行于实轴的直线. z 平面上的极坐标网变为 ζ 平面上的直角坐标网. 点 z 的辐角 $\mathrm{Arg}z$ 可以加减2π 的任意整数倍数，所以 ζ 是 z 的多值函数. 沿 z 平面的正实轴作割线，把 $\mathrm{Arg}z$ 限制在0与2π 之间，就是说，取 ζ 的**主值**，则 z 的全平面变为 ζ 平面上$0\leqslant\mathrm{Im}\zeta\leqslant2\pi$ 的带域.

例 3 两个同轴圆柱构成柱形电容器，内外圆柱的半径分别是 R_1和 R_2. 计算每单位长度圆柱电容器的电容量.

解 圆柱电容器的横截面见图14-6a. 等势线和电力线构成极坐标网. 这提示我们采用对数变换 $\zeta=\ln z=\ln|z|+\mathrm{i}\mathrm{Arg}z$. 对数函数是多值函数，它把内圆柱变为直线 $\xi=\ln R_1$，其主值是$0\leqslant\eta\leqslant2\pi$ 的一段；它把外圆柱变为直线 $\xi=\ln R_2$，其主值也是$0\leqslant\eta\leqslant2\pi$ 的一段. 这样，圆柱形电容器变为平板电容器，两极板的宽度为2π，相距

$\ln R_2 - \ln R_1 = \ln(R_2/R_1)$，如图14-6b.

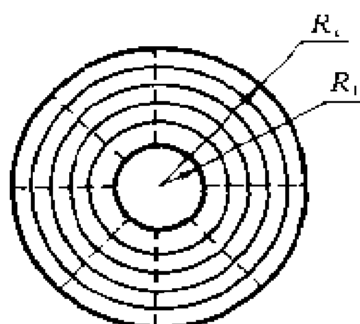


图 14-6a

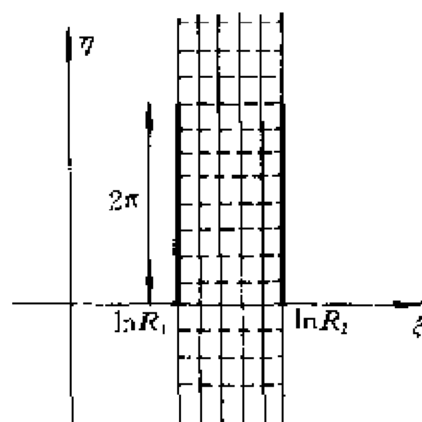


图 14-6b

用国际单位制，平板电容器的电容量为 $\epsilon_0 A/d$，其中 A 是极板的面积.（如用高斯单位制，则电容量为 $A/4\pi d$.）以单位长度计算，极板的面积 $A = 2\pi \times 1 = 2\pi$，电容量

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} = \frac{\epsilon_0 2\pi}{\ln(R_2/R_1)}.$$

这也就是每单位长度圆柱电容器的电容量.

附（同轴线的电感） 把同轴圆柱作为同轴传输线使用，它不仅具有上面算出的电容，而且还有电感. 这里计算每单位长度的电感 L.

作为同轴线使用，电流方向垂直于图14-6的图面，设内圆柱上的电流 I 向外，外圆柱上的电流 I 向内. 图14-6的同心圆就是磁力线（方向为逆时针的）. 在这些同心圆之中取半径为 ρ 的作为代表. 运用电磁学的安培回路定律，

$$H 2\pi\rho = I,$$

$$H = \frac{I}{2\pi}\frac{1}{\rho}.$$

磁感应强度

$$B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{\rho}.$$

每单位长度传输线内外圆柱之间的磁通量

$$\Phi = \int_{R_1}^{R_2} B \mathrm{d}\rho = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{\rho}\mathrm{d}\rho = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}.$$

于是，每单位长度的电感

$$L=\frac{\Phi}{I}=\frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}.$$

§7.1导出理想传输线的电报方程(7.1.14)后，注明$1/LC$=光速平方．这里就是一个例证，因为对于同轴传输线来说，

$$\frac{1}{LC}=\frac{1}{(\mu_0/2\pi)\ln(R_2/R_1)}\frac{\ln(R_2/R_1)}{\varepsilon_0 2\pi}=\frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}$$

$$=\frac{10^7}{4\pi}\cdot\frac{36\pi 10^9}{1}=9\times10^{16}=(3\times10^8\text{m/s})^2=(\text{光速})^2.$$

（四）反演变换

变换

$$\zeta=\frac{R^2}{z}\qquad(R\text{ 为实常数})\tag{14.2.6}$$

称为反演变换．采用指数式 $z=\rho e^{i\varphi}$，则

$$\zeta=\frac{R^2}{\rho}e^{-i\varphi}.\tag{14.2.7}$$

这可以分解为前后相继的两变换

$$z_1=\frac{R^2}{\rho}e^{i\varphi}\left(=\frac{R^2}{z^*}\right),\tag{14.2.8}$$

$$\zeta=z_1^*.\tag{14.2.9}$$

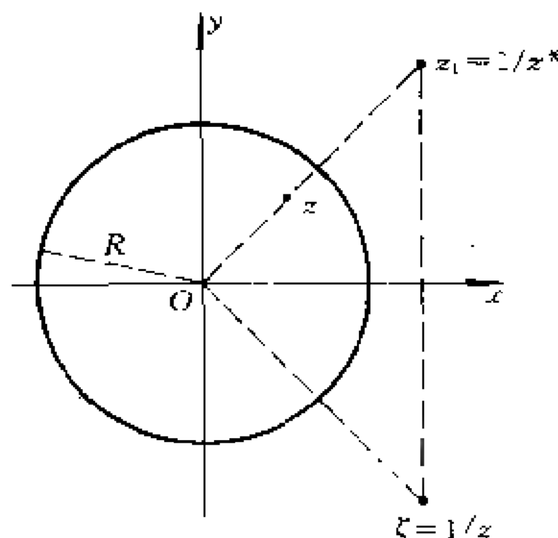


图 14-7

变换(14.2.8)将 z 变为 z_1.（图14-7）中 z_1与 z 辐角相同，这是说，

两者位于从原点出发的同一条射线上；z_1与z的模之积

$$|z_1|\cdot|z|=\frac{R^2}{\rho}\rho=R^2. \qquad (14.2.10)$$

这是说，z_1与z之中，一个在圆$|z|=R$的内部，另一在此圆外部. 变换(14.2.9)又将z_1变为ζ，而ζ与z_1相对于实轴对称. 这样，反演(14.2.6)将圆$|z|=R$的内部变为外部，而外部则变为内部.

反演变换在全平面包括无限远点在内都是保角的，读者不妨自行证明.

(五) 分式线性变换

变换

$$\zeta=\frac{az+b}{cz+d} \qquad (ad-bc\neq 0) \qquad (14.2.11)$$

的分子分母都是线性的，因而称为分式线性变换. 条件$ad-bc\neq 0$十分必要，否则$a/c=b/d$，而$\zeta=(az+b)/(cz+d)=a/c=b/d$是常数，于是$z$平面上所有的点都变为同一点$\zeta=a/c$，这样的变换没有意义.

反演(14.2.6)是分式线性变换(14.2.11)的特例，其中$a=0$，$d=0$，$b/c=$实常数.

变换(14.2.11)可化为

$$\zeta=\frac{a}{c}+\frac{b-ad/c}{cz+d}=\frac{a}{c}+\frac{(bc-ad)/c^2}{z+d/c},$$

这是说，它可以分解成相继的三个变换：

$$z_1=z+\frac{d}{c}, z_2=\frac{(bc-ad)/c^2}{z_1}, \zeta=z_2+\frac{a}{c}.$$

上面已经说明，线性变换及反演变换都是在全平面上保角的变换，因而分式线性变换亦是在包括∞在内的全平面上保角的变换.

分式线性变换的重要特点是**圆保持为圆**(直线作为圆的特例看待). 变换$z_1=z+d/c$和$\zeta=z_2+a/c$都是整体的平移，圆保持为圆是不成问题的. 需要证明的是变换$z_2=f/z_1$(常数f即上面的$(bc-ad)/c^2$)使圆保持为圆. 设有任意给定的圆

$$A(x_1^2+y_1^2)+2Bx_1+2Cy_1+D=0,$$

圆心在$(-B/A,-C/A)$，半径是$\sqrt{B^2+C^2-AD}/A$. 用复变数$z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，这个圆的方程可写成

$$Az_1z_1^*+(B+\mathrm{i}C)z_1^*+(B-\mathrm{i}C)z_1+D=0,$$

记$B+\mathrm{i}C$为E，则

$$Az_1z_1^*+E^*z_1+Ez_1^*+D=0.$$

作变换(14.2.6)，

$$A\frac{f}{z_2}\frac{f^*}{z_2^*}+E^*\frac{f}{z_2}+E\frac{f^*}{z_2^*}+D=0,$$

即

$$Dz_2z_2^*+(Ef^*)z_2+(E^*f)z_2^*+Aff^*=0.$$

与变换前的方程类型相同，因而仍然是圆. 跟变换前的方程比较，可看出这个圆的圆心在$(-\mathrm{Re}(E^*f)/D,-\mathrm{Im}(E^*f)/D)$，半径是$|f|\sqrt{|E|^2-AD}/D$.

分式线性变换不仅使圆保持为圆，而且**对于圆的对称点保持为对称点**.

所谓对于圆的**对称点**可参看图14-8. 已给圆C，半径为R. 有两点A和B，其连线通过圆C的圆心O，而且$\overline{OA}\ \overline{OB}=R^2$，则$A$和$B$两点就叫作对于圆$C$为对称点. 读者想必还记得§12.2的电像法. 点电荷和它的电像两者的位置正是互为对称点. 对称点的一个特例是圆心和无限远点.

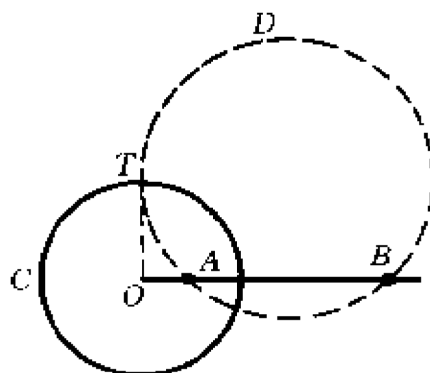


图14-8

过对称点A和B任作一圆D，从圆C的圆心O作圆D的切线OT，T是切点. 从几何学知道$\overline{OT}=\sqrt{\overline{OA}\ \overline{OB}}=\sqrt{R^2}=R$，可见$T$正好在圆$C$的圆周上，即$T$是圆$C$和$D$的交点. OT既是圆D的切线，又是圆C的半径，这说明圆C和圆D是正交的. 因此，对

于圆 C 的对称点也可定义为：过对称点的任一圆 D 必跟圆 C 正交.

现在来证明对称点保持为对称点. 事实上，在分式线性变换下，z 平面上的圆 C 和 D、点 A 和 B(图14-8)分别变为 ζ 平面上的圆 C' 和 D'，点 A' 和 B'. 由于变换的保角性质，圆 C' 和 D' 正交. 这是说，通过 A' 和 B' 的任一圆 D' 必跟圆 C' 正交，即 A' 和 B' 对于圆 C' 为对称点.

掌握"对称点保持为对称点"这个性质，有助于寻找适当的分式线性变换.

例 4 有一甚大接地导体平面，另有一甚长导线平行于导体平面，相距为 a. 如导线均匀带电，每单位长电量为 Q. 求此电场中的电势.

解 取横截面. 从横截面看，接地平面成为实轴，导线则成为虚轴上的点 $\mathrm{i}a$(图14-9). 设想把实轴变为圆，点 $\mathrm{i}a$ 变为该圆的圆心，问题就容易解得多.

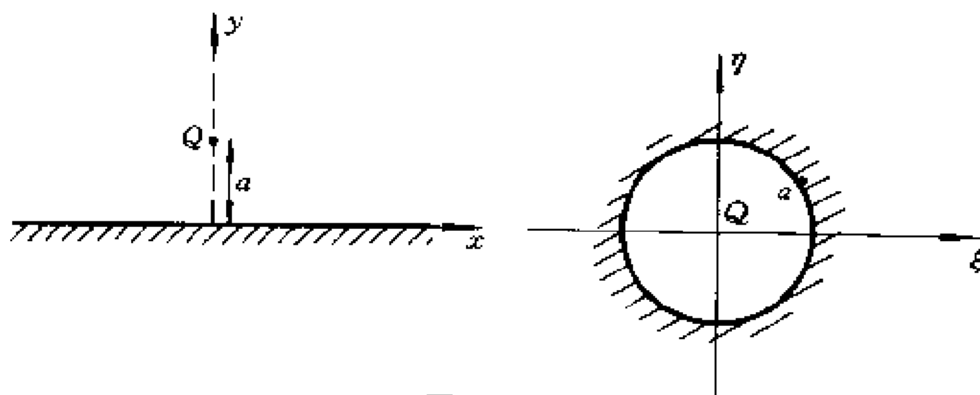


图14-9

在 z 平面上，电势 u 满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\delta(y-a)\delta(x),\\ u|_{y=0}=0.\end{cases}$$

这个定解问题可用电像法求解，并不复杂，但这里用保角变换法求解，以便相互印证.

设想把 z 平面的实轴变为 ζ 平面的圆 $|\zeta|=R$，而 z 平面的点

$z=\mathrm{i}a$ 变为 ζ 平面的圆心 $\zeta=0$，问题就容易解得多. 现在来寻找合乎要求的分式线性变换.

分式线性变换(14.6.11)可以改写成

$$\zeta=k\,\frac{z-\alpha}{z-\beta},$$

我们需要确定 k,α,β 这三个参数.

首先，$z=\mathrm{i}a$ 变为 $\zeta=0$，由此知 $\alpha=\mathrm{i}a$.

其次，$z=\mathrm{i}a$ 相对于实轴的对称点(即 $z=-\mathrm{i}a$)应该变为 $\zeta=0$ 相对于圆 $|\zeta|=R$ 的对称点(即 $\zeta=\infty$)，由此可知 $\beta=-\mathrm{i}a$.

我们的设想已经实现，因而不妨随意地置 $k=1$. 这样，

$$\zeta=\frac{z-\mathrm{i}a}{z+\mathrm{i}a}.$$

不过，圆 $|\zeta|=R$ 的半径 R 是多大呢？既然它是由 z 平面的实轴 $y=0$ 变来，我们以 $y=0$ 代入 ζ 的表达式并计算 ζ 的模，

$$|\zeta|=\frac{|x-\mathrm{i}a|}{|x+\mathrm{i}a|}=\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}}=1.$$

这样，$R=1$. z 平面的实轴变成了 ζ 平面的单位圆 $|\zeta|=1$.

变换后，定解问题成为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=-\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_a}\delta(\zeta)\delta(\eta),\\ u\big|_{|\zeta|=1}=0.\end{cases}$$

它代表这样一个物理问题：一个半径等于1的空心圆柱，其轴线上有一均匀带电的导线. 柱内电势易知为

$$u=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1}{\rho}=-\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\rho=-\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\ln|\zeta|.$$

回到 z 平面

$$u=-\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left|\frac{z-\mathrm{i}a}{z+\mathrm{i}a}\right|=-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{x^2+(y-\mathrm{i}a)^2}{x^2+(y+\mathrm{i}a)^2}.$$

例 5 两个平行圆柱，半径分别是 R_1 和 R_2，柱轴相距 $L(>R_1+R_2)$. 试求每单位长度的电容量.

解 设法把这两圆柱变为同轴圆柱，就可引用例3而解决问题.

取横截面. 从横截面看，两圆柱成为两个圆 C_1 和 C_2（图14-10）.

为把 C_1 和 C_2 变为同心圆，先要找 a 和 b 两点，它们对于圆 C_1 是对称点，对于圆 C_2 也是对称点.

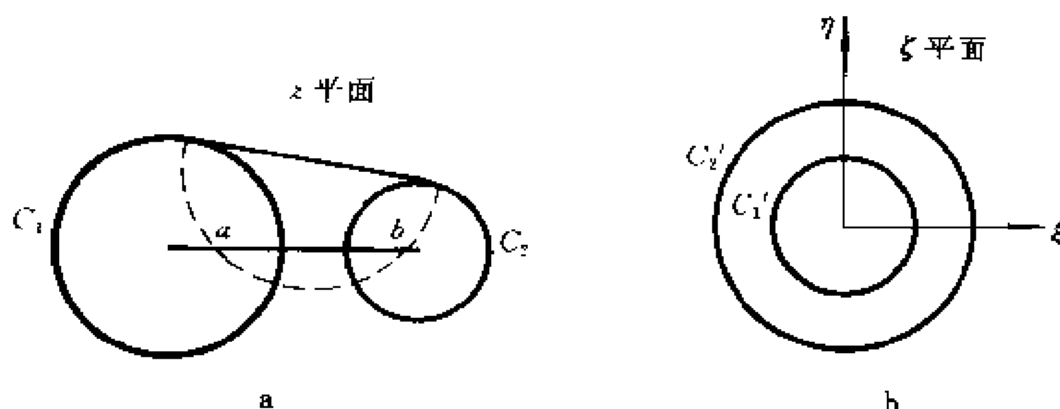


图14-10

a 和 b 可用几何方法找到. 先作圆 C_1 和 C_2 的公切线，以公切线为直径作圆，这圆与 C_1 和 C_2 的连心线的两个交点就是 a 和 b.

a 和 b 也可用代数方法找到. 取圆 C_1 的圆心为 z 平面的原点，取连心线为 x 轴. 把 a 和 b 的坐标分别记作 x_1 和 x_2. 由对称点的定义，得

$$\begin{cases} x_1 x_2 = R_1^2, \\ (L - x_1)(L - x_2) = R_2^2. \end{cases}$$

从这两个方程解得

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2L}\left[(L^2 + R_1^2 - R_2^2) - \sqrt{(L^2 + R_1^2 - R_2^2)^2 - 4R_1^2 L^2} \right], \\ x_2 = \dfrac{1}{2L}\left[(L^2 + R_1^2 - R_2^2) + \sqrt{(L^2 + R_1^2 - R_2^2)^2 - 4R_1^2 L^2} \right]. \end{cases}$$

根号下的式子即 $L^4 + R_1^4 + R_2^4 - 2L^2 R_1^2 - 2L^2 R_2^2 - 2R_1^2 R_2^2$，它又可改写为

$$(L^4 + R_1^4 + R_2^4 - 2L^2 R_1^2 - 2L^2 R_2^2 + 2R_1^2 R_2^2) - 4R_1^2 R_2^2$$

$$=(L^2-R_1^2-R_2^2)^2-(2R_1R_2)^2$$
$$=(L^2-R_1^2+2R_1R_2-R_2^2)(L^2-R_1^2-2R_1R_2-R_2^2)$$
$$=[L^2-(R_1-R_2)^2][L^2-(R_1+R_2)^2]$$
$$=(L+R_1-R_2)(L-R_1+R_2)(L+R_1+R_2)(L-R_1-R_2).$$

作分式线性变换

$$\zeta(z)=\frac{z-x_1}{z-x_2}.$$

这把点 a 变为 ζ 平面的原点 $\zeta=0$，点 b 变为 ζ 平面的无限远点 $\zeta=\infty$. 圆 C_1 变为 ζ 平面上的圆 C_1'. 点 a 和 b 对于圆 C_1 是对称点；因而 $\zeta=0$ 和 $\zeta=\infty$ 对于圆 C_1' 为对称点. 换句话说，圆 C_1' 以原点 $\zeta=0$ 为圆心. 同理，圆 C_2 变为 ζ 平面上的圆 C_2'，而圆 C_2' 也是以原点 $\zeta=0$ 为圆心. 这样，圆 C_1' 和 C_2' 是同心圆.

为了计算电容量，还必须知道圆 C_1' 和 C_2' 的半径 R_1' 和 R_2'. 在 z 平面的圆 C_1 上取一点 $z=-R_1$，它变为 ζ 平面的圆 C_1' 上的

$$\zeta=\frac{-R_1-x_1}{-R_1-x_2}=\frac{R_1+x_1}{R_1+x_2}.$$

于是

$$R_1'=\left|\frac{R_1+x_1}{R_1+x_2}\right|$$
$$=\frac{(L+R_1)^2-R_2^2-\sqrt{(L^2-R_1^2-R_2^2)^2-4R_1^2R_2^2}}{(L+R_1)^2-R_2^2+\sqrt{(L^2-R_1^2-R_2^2)^2-4R_1^2R_2^2}}.$$

同理，在 z 平面的圆 C_2 上取一点 $z=L+R_2$，它变为 ζ 平面的圆 C_2' 上的

$$\zeta=\frac{L+R_2-x_1}{L+R_2-x_2}.$$

于是，

$$R_2'=\left|\frac{L+R_2-x_1}{L+R_2-x_2}\right|$$
$$=\frac{(L+R_2)^2-R_1^2+\sqrt{(L^2-R_1^2-R_2^2)^2-4R_1^2R_2^2}}{(L+R_2)^2-R_1^2-\sqrt{(L^2-R_1^2-R_2^2)^2-4R_1^2R_2^2}}.$$

引用例3的答案，每单位长度的电容量

$$C=\frac{\varepsilon_0 2\pi}{\ln(R_2'/R_1')}.$$

这需要先计算 R_2'/R_1'，

$$\frac{R_2'}{R_1'}=\frac{[(L+R_2)^2-R_1^2+\sqrt{(L^2-R_1^2-R_2^2)^2-4R_1^2R_2^2}]}{[(L+R_2)^2-R_1^2-\sqrt{(L^2-R_1^2-R_2^2)^2-4R_1^2R_2^2}]}$$

$$\times\frac{[(L+R_1)^2-R_2^2+\sqrt{(L^2-R_1^2-R_2^2)^2-4R_1^2R_2^2}]}{[(L+R_1)^2-R_2^2-\sqrt{(L^2-R_1^2-R_2^2)^2-4R_1^2R_2^2}]}$$

$$=\frac{[(L+R_2)^2-R_1^2][(L+R_1)^2-R_2^2]+2L(L+R_1+R_2)}{[(L+R_2)^2-R_1^2][(L+R_1)^2-R_2^2]-2L(L+R_1+R_2)}$$

$$\frac{\sqrt{(L^2-R_1^2-R_2^2)^2-4R_1^2R_2^2}+[(L^2-R_1^2-R_2^2)^2-4R_1^2R_2^2]}{\sqrt{(L^2-R_1^2-R_2^2)^2-4R_1^2R_2^2}+[(L^2-R_1^2-R_2^2)^2-4R_1^2R_2^2]}$$

$$=\frac{(L+R_1-R_2)(L-R_1+R_2)+\sqrt{(L^2-R_1^2-R_2^2)^2-4R_1^2R_2^2}}{(L+R_1-R_2)(L-R_1+R_2)-\sqrt{(L^2-R_1^2-R_2^2)^2-4R_1^2R_2^2}}$$

分子和分母分别乘以分母的共轭根式，即得

$$\frac{R_2'}{R_1'}=\frac{L^2-R_1^2-R_2^2}{2R_1R_2}+\sqrt{\left(\frac{L^2-R_1^2-R_2^2}{2R_1R_2}\right)^2-1}.$$

因此，每单位长度的电容量

$$C=\frac{\varepsilon_0 2\pi}{\ln\left[\frac{L^2-R_1^2-R_2^2}{2R_1R_2}+\sqrt{\left(\frac{L^2-R_1^2-R_2^2}{2R_1R_2}\right)^2-1}\right]}.$$

这也可以写为

$$C=\frac{\varepsilon_0 2\pi}{\operatorname{arc\,ch}[(L^2-R_1^2-R_2^2)/2R_1R_2]}.$$

对于通常的双线传输线，$R_1=R_2=R$，每单位长度电容量

$$C=\frac{\varepsilon_0 2\pi}{\ln\left[\frac{L^2}{2R^2}-1+\sqrt{\frac{L^4}{4R^4}-\frac{L^2}{R^2}}\right]}.$$

例 6 半径为 R_1 的空心圆柱套着半径为 R_2 的圆柱. 两柱的轴平行而相距 $L(<R_1-R_2)$. 试求每单位长度的电容量.

解 取横截面. 从横截面看,两圆柱成为圆 C_1和 C_2(图14-11a). 现在设法把这两个圆变为同心圆. 为此,先要找 a 和 b 两点,它们对于圆 C_1是对称点,对于圆 C_2也是对称点.

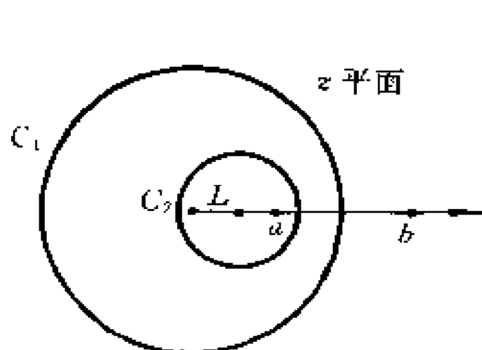


图14-11a

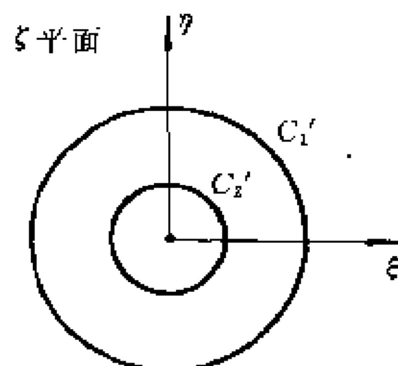


图14-11b

取圆 C_1的圆心为 z 平面的原点,取连心线为 x 轴. 把 a 和 b 的坐标分别记作 x_1和 x_2. 由对称点的定义,得

$$\begin{cases} x_1x_2=R_1^2, \\ (x_1-L)(x_2-L)=R_2^2. \end{cases}$$

这两个方程跟上例相同,因而可引用上例. 不过考虑到 $L<R_1-R_2$, $R_1'>R_2'$,演算需适当修改. 答案是

$$C=\frac{\varepsilon_0 2\pi}{\ln\left[\dfrac{R_1^2+R_2^2-L^2}{2R_1R_2}+\sqrt{\left(\dfrac{R_1^2+R_2^2-L^2}{2R_1R_2}\right)^2-1}\right]}$$

$$=\frac{\varepsilon_0 2\pi}{\text{arc ch}[(R_1^2+R_2^2-L^2)/2R_1R_2]}.$$

例 7 实轴上有半圆形突起(图14-12a),圆的半径为1. 试找一保角变换,把它变为无突起的实轴.

解 这个图象可看作由两段圆弧组成,一个是通过 -1(A 点),i(B 点)和 $+1$(C 点)的半圆,另一个是通过 $+1$(C 点),无限远点和 -1(A 点)的圆弧(其实是直线段).

分式线性变换

$$z_1=\frac{z-1}{z+1}$$

把两段圆弧的交点 $z=+1$变为 $z_1=0$,把另一交点 $z=-1$变为 z_1

$=\infty$，因而 z 平面上的两段圆弧变为 z_1 平面上通过0和 ∞ 的圆弧，即通过原点的射线，它们之间的夹角保持为 $\pi/2$（图14-12b）.

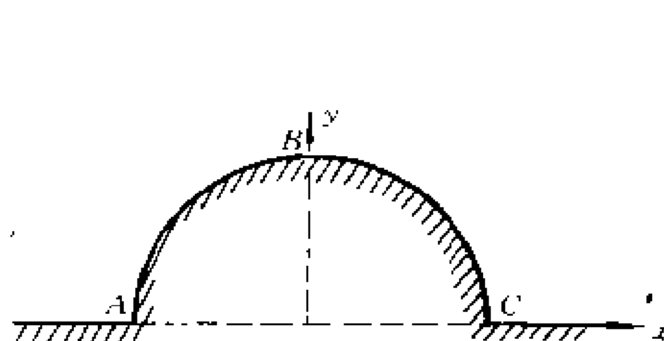


图14-12a

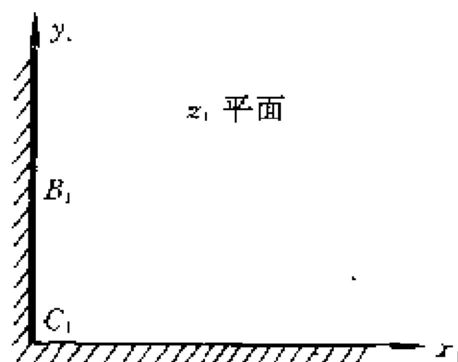


图14-12b

幂函数

$$z_2=z_1^2$$

又把这两射线变为正负实轴（图14-12c）. 对应于 z 平面上 $z=-1$（A 点），i（B 点），$+1$（C 点）的各点是 $z_2=\infty$，-1（B_2点），0（C_2 点）.

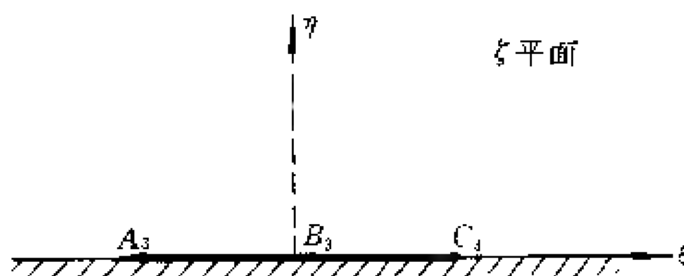


图14-12c

为了便于跟原来的图象（图14-12a）对照，再作分式线性变换

$$\zeta-\frac{az_2+b}{cz_2+d}$$

把 $z_2=\infty$，-1，0各点分别变为 $\zeta=-1$，0，$+1$各点（图14-12c）. 根据这些点的对应关系，不难确定系数 $a=b=d=-c$，即

$$\zeta=\frac{z_2+1}{-z_2+1}.$$

拿图14-12d 跟图14-12a 对照. 半圆形突起已被消除，成为实

轴上的-1到$+1$的直线段.

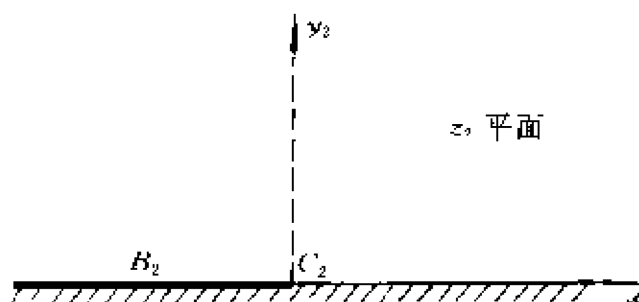


图14-12d

总结起来看,从 z 平面到 ζ 平面的变换是

$$\zeta=\frac{z_2+1}{-z_2+1}=\frac{z_1^2+1}{-z_1^2+1}=\frac{(z-1)^2/(z+1)^2+1}{-(z-1)^2/(z+1)^2+1}$$

$$=\frac{(z-1)^2+(z+1)^2}{-(z-1)^2+(z+1)^2}=\frac{z^2+1}{2z}=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right).$$

函数 $\zeta=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ 叫作**儒阔夫斯基函数**.

(六) 儒阔夫斯基变换

儒阔夫斯基函数

$$\zeta(z)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) \tag{14.2.12}$$

的实部和虚部分别是

$$\begin{cases}\xi=\frac{1}{2}\left(x+\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\cos\varphi,\\ \eta=\frac{1}{2}\left(y-\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)\sin\varphi.\end{cases}$$

z 平面上的同心圆族 $|z|=\rho_0$(图14-13a)变为 ζ 平面上的

$$\begin{cases}\xi=\frac{1}{2}\left(\rho_0+\frac{1}{\rho_0}\right)\cos\varphi,\\ \eta=\frac{1}{2}\left(\rho_0-\frac{1}{\rho_0}\right)\sin\varphi.\end{cases}$$

这是参数方程式. 消去参数 φ,得

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}=1,$$

其中 $a=\frac{1}{2}\left(\rho_0+\frac{1}{\rho_0}\right)$，$b=\frac{1}{2}\left|\rho_0-\frac{1}{\rho_0}\right|$. 这是椭圆族（图14-13b），其长、短半轴分别是 a 和 b. $\sqrt{a^2-b^2}=1$，这是说，椭圆族是共焦点的，焦点在 $\zeta=\pm1$.

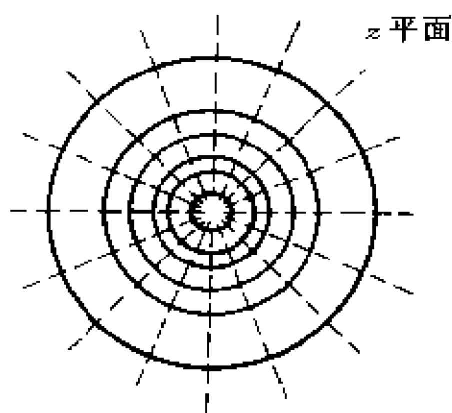


图14-13a

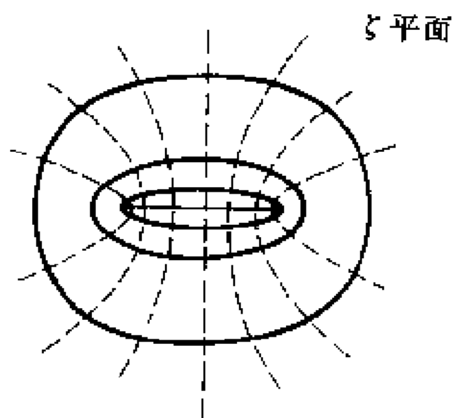


图14-13b

ρ_0从1开始而无限增大，则 a 和 b 随着无限增大. 这样，z 平面单位圆外部变为 ζ 的全平面，只是从 -1 到 $+1$ 沿着实轴有一割线.（例7就是把 z 平面单位圆外部的上半部分变为 ζ 平面的上半平面.）

ρ_0从1开始而逼近于零，则 a 和 b 也无限增大. 这样，z 平面单位圆内部也变为 ζ 的全平面，从 -1 到 $+1$ 沿着实轴有割线.

z 平面上的射线族 $\arg z=\varphi_0$（图14-13a）变为 ζ 平面上的

$$\begin{cases}\xi=\frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\cos\varphi_0,\\ \eta=\frac{1}{2}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)\sin\varphi_0.\end{cases}$$

这是参数方程式. 消去参数 ρ，得

$$\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{\eta^2}{b^2}=1,$$

其中 $a=|\cos\varphi_0|$，$b=|\sin\varphi_0|$. 这是双曲线族（图14-13b），实和虚半轴分别是 $|\cos\varphi_0|$ 和 $|\sin\varphi_0|$. $\sqrt{a^2+b^2}=1$，这是说，双曲线族是共焦点的，焦点在 $\zeta=\pm1$.

儒阔夫斯基函数把圆变为椭圆，射线变为双曲线，同心圆族变

为共焦点椭圆族，共点射线族变为共焦点双曲线族，这是有助于求解椭圆或双曲线边值问题的.

例 8 水流本来是均匀的，流速为 v_0. 放进长椭圆柱，柱轴垂直于水流速度方向，横截面的椭圆长轴平行于本来的流速方向. 试解这个绕椭圆柱水流问题(图14-14a).

解 绕椭圆柱水流的速度势 u 的问题是定解问题

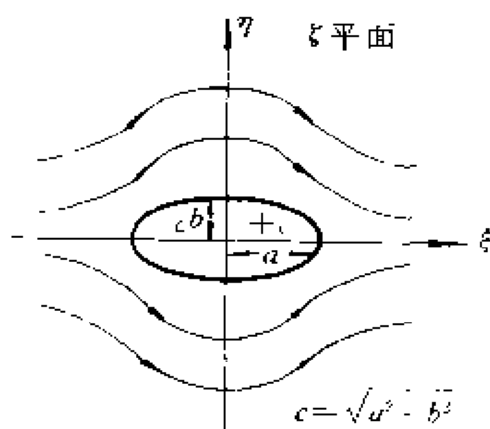


图14-14a

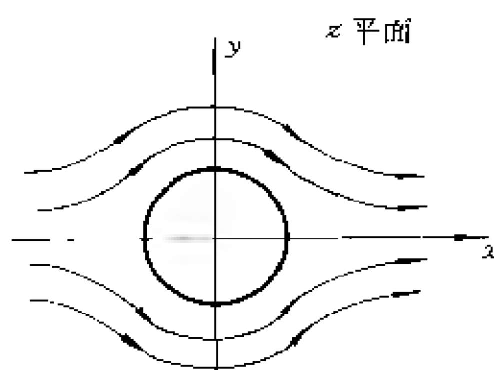


图14-14b

$$\begin{cases}\Delta_2 u=0 \quad (\zeta \text{ 平面}),\\ \lim\limits_{\zeta\to\infty} u=v_0\xi,\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\text{椭圆柱面上}}=0.\end{cases}$$

利用儒阔夫斯基函数

$$\frac{\zeta}{c}=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),$$

把问题化为绕圆柱水流问题(图14-14b)

$$\begin{cases}\Delta_2 u=0 \quad (z \text{ 平面}),\\ \lim\limits_{z\to\infty} u=\lim\limits_{z\to\infty} v_0\dfrac{c}{2}\left(\rho+\dfrac{1}{\rho}\right)\cos\varphi=\dfrac{c}{2}v_0\rho\cos\varphi,\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho=(a+b)/c}=0.\end{cases}$$

绕圆柱水流的解(参看§8.1习题27的答案)是

$$u=\frac{1}{2}cv_0\rho\cos\varphi+\frac{1}{2}v_0\frac{(a+b)^2}{c}\frac{1}{\rho}\cos\varphi+\frac{\Gamma}{2\pi}\varphi$$
$$=\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}cv_0z+\frac{1}{2}v_0\frac{(a+b)^2}{c}\frac{1}{z}+\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z\right),$$
其中 Γ 为任意常数，它代表绕柱的环流量.

回到 ζ 平面，

$$u=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}cv_0\left(\frac{1}{c}\zeta+\frac{1}{c}\sqrt{\zeta^2-c^2}\right)+\frac{1}{2}v_0\frac{(a+b)^2}{c}\cdot\right.$$
$$\left.\frac{1}{\frac{1}{c}\zeta+\frac{1}{c}\sqrt{\zeta^2-c^2}}+\frac{\Gamma}{2\pi\mathrm{i}}\ln\left(\frac{1}{c}\zeta+\frac{1}{c}\sqrt{\zeta^2-c^2}\right)\right]$$
$$=\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}v_0(\zeta+\sqrt{\zeta^2-c^2})+\frac{1}{2}v_0(a+b)^2(\zeta-\sqrt{\zeta^2-c^2})\right.$$
$$\left.+\frac{\Gamma}{2\pi\mathrm{i}}\ln\left(\frac{1}{c}\zeta+\frac{1}{c}\sqrt{\zeta^2-c^2}\right)\right].$$
这就是绕椭圆柱水流的速度势. 环流在图14-14b 里没有画出.

既解出速度势 u，就可以计算流速 $\boldsymbol{v}$ 和压强 p. 沿着柱面把 p 积分，可算出水流施于椭圆柱的作用力 $\boldsymbol{F}$. 这个计算，读者可自己进行或查考流体力学书籍，其结果是

$$F_\eta=-v_0\Gamma,F_\xi=0.$$
这是说，如果没有环流，流水对柱并无作用力. 当然，这里还没有把粘滞性所引起的作用力计算进去.

儒阔夫斯基函数还能作出重要的变换，就是**把圆变为机翼剖面**（图14-15），这可阐述如下.

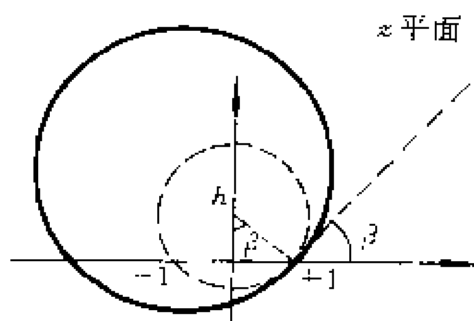


图14-15a

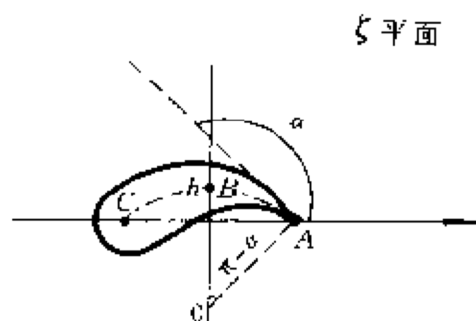


图14-15b

首先研究 z 平面上以 ih 为圆心并通过 ±1的圆即图14-15a 的

虚线圆.分式线性变换

$$z_1=\frac{z-1}{z+1}$$

把 z 平面的 $+1$ 和 -1 分别变为 z_1 平面的0和 ∞，因而把 z 平面的虚线圆变为通过0和 ∞ 的圆，实际上即通过原点 $z_1=0$ 的直线(图14-15c). z 平面的虚线圆在 $z=+1$ 跟实轴夹角为 $\beta=\pi/2-\text{arc tg}h$，而 z 平面的实轴变到 z_1 平面仍为实轴，所以虚线圆在 z_1 平面上的图象(即前述直线)跟实轴夹角亦为 $\beta=\pi/2-\text{arc tg}h$.

再研究 ζ 平面上从 $+1$ 经 ih 到 -1 的圆弧即图14-15b 的虚线弧.分式线性变换

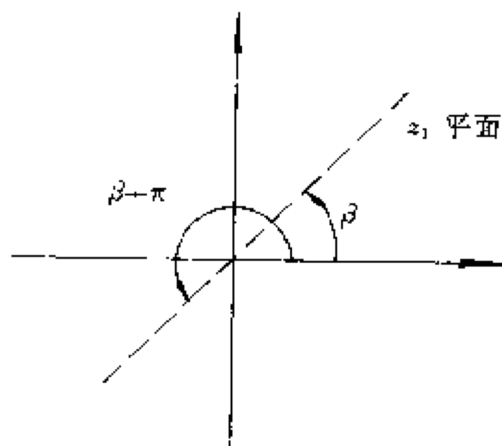


图14-15c

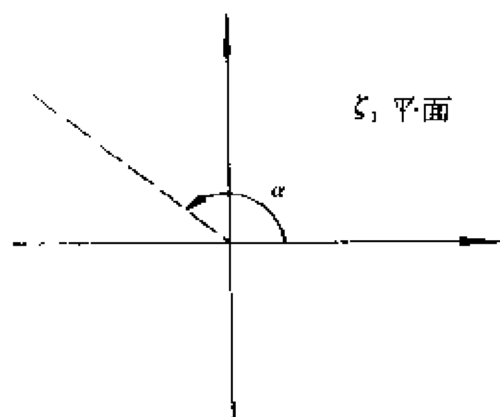


图14-15d

$$\zeta_1=\frac{\zeta-1}{\zeta+1}$$

把 ζ 平面的 $+1$ 和 -1 分别变为 ζ_1 平面的0和 ∞，因而把 ζ 平面的虚线弧变到从原点 $\zeta_1=0$ 指向 $\zeta_1=\infty$ 的射线，它跟实轴夹角应等于 ζ 平面虚线弧在 $+1$ 跟实轴的夹角 α. 现在计算 α. 在 ζ 平面取虚线弧的圆心 O，联 AO，一方面，$\angle BOA=\pi-\alpha$；另一方面，$\angle BOA$ 是 AB 弧所张圆心角，它等于 $2\times AB$ 弧所张圆周角，即 AC 弧所张圆周角，即 $2\text{arc tg}h$. 这样，$\pi-\alpha=2\text{arc tg}h$，即

$$\alpha=\pi-2\text{arc tg}h=2\beta.$$

显然，幂函数变换

$$\zeta_1=z_1^2$$

把图14-15c 的直线变为图14-15d 的射线的来回.

总结起来，z 平面的虚线圆变为 ζ 平面的虚线弧的来回，这个变换是 $\zeta_1=z_1^2$，即

$$\frac{\zeta-1}{\zeta+1}=\frac{(z-1)^2}{(z+1)^2},$$

即

$$\zeta=\frac{(z+1)^2+(z-1)^2}{(z+1)^2-(z-1)^2}=\frac{z^2+1}{2z}=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),$$

正是儒阔夫斯基变换.

既然 z 平面的虚线圆变为 ζ 平面的虚线弧，那么，z 平面上凡是跟虚线圆切于 $+1$ 的圆（图14-15a 实线圆）变到 ζ 平面应跟虚线来回弧段相切（图14-15b 实线描出），就成为机翼剖面图. 儒阔夫斯基提出的求各种机翼剖面（儒阔夫斯基剖面）的方法就以此为基础.

（七）施瓦兹-克利斯多菲变换（多角形变换）

在不少情况下，平面场涉及多角形区域. 现在研究多角形区域和上半平面之间的变换.

设在 z 平面有 n 角形（图14-16a）. 沿着多角形周界的正方向行进（就是说，多角形区域始终在左侧），在各个顶点转过的角即是外角 $\theta_1, \theta_2, \cdots \theta_n$. 这些角以逆时针的为正，顺时针的为负. 行进一周，总共转过的角应为 2π，因而 $\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n=2\pi$.

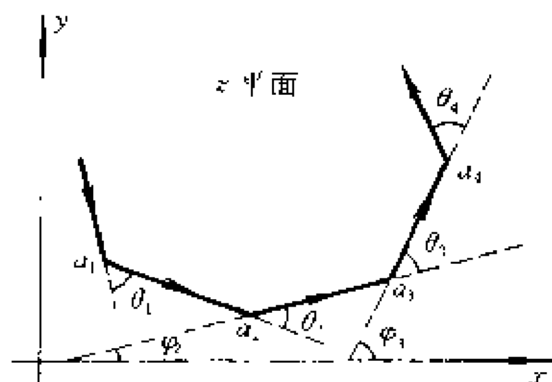


图14-16a

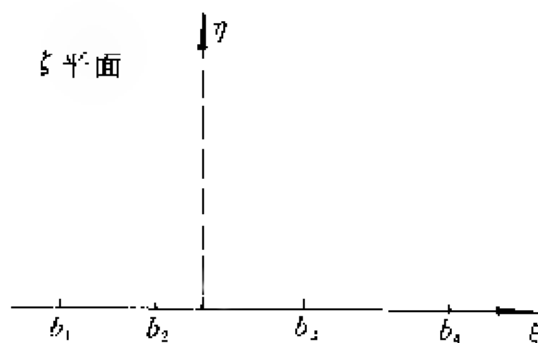


图14-16b

试把这多角形变为ζ的上半平面，多角形的顶点$a_1, a_2, \cdots, a_n$分别变为ζ平面实轴上的$b_1, b_2, \cdots, b_n$.

z平面上多角形的各个顶角，变换到ζ平面上全成为π，并不具有保角的性质，可见$\zeta'(z)$在这些点为零或∞. 现在研究$\zeta'(z)$或$z'(\zeta)$在这些点的性质. 以a_3和b_3作为代表而加以考察. 试在其前后各取一小段，由(14.1.8)知

$$\varphi_2 = \arg\frac{dz}{d\zeta}\bigg|_{\zeta=b_3-0}, \varphi_3 = \arg\frac{dz}{d\zeta}\bigg|_{\zeta=b_3+0}.$$

因此，

$$\theta_3 = \varphi_3 - \varphi_2 = \arg\frac{dz}{d\zeta}\bigg|_{\zeta=b_3+0} - \arg\frac{dz}{d\zeta}\bigg|_{\zeta=b_3-0}.$$

这是说，当ζ经过b_3的时候，$z'(\zeta)$的辐角有一跃变，其跃度为θ_3. 另一方面，从图14-16b 明显看出，当ζ经过b_3的时候，函数$\zeta - b_3$的辐角也有一跃变，其跃度为$-\pi$. 因此，

$$z'(\zeta) \sim A(\zeta - b_3)^{-\theta_3/\pi}(\text{于 } \zeta \sim b_3) \qquad (14.2.13)$$

考虑到所有的顶点，可以断定

$$z'(\zeta) = A(\zeta - b_1)^{-\theta_1/\pi}(\zeta - b_2)^{-\theta_2/\pi}\cdots(\zeta - b_n)^{-\theta_n/\pi}. \qquad (14.2.14)$$

积分一次，

$$z = z_0 + A\int(\zeta - b_1)^{-\theta_1/\pi}(\zeta - b_2)^{-\theta_2/\pi}\cdots(\zeta - b_n)^{-\theta_n/\pi}d\zeta. \qquad (14.2.15)$$

(14.2.14)即(14.2.15)叫作**施瓦兹-克利斯多菲变换**.

如果某个b_k，比方说b_1，是无限远点，相应的(14.2.13)是

$$z'(\zeta) \sim A\zeta^{\theta_1/\pi}(\text{于 } \zeta \sim b_1 = \infty). \qquad (14.2.16)$$

而(14.2.14)右边除了跟b_1有关的那个因子以外的乘积

$$A(\zeta - b_2)^{-\theta_2/\pi}(\zeta - b_3)^{-\theta_2/\pi}\cdots(\zeta - b_n)^{-\theta_n/\pi}$$
$$\sim A\zeta^{-(\theta_2+\theta_3+\cdots+\theta_n)/\pi} = A\zeta^{-(2\pi-\theta_1)/\pi} = A\zeta^{(\theta_1-2\pi)/\pi}(\text{于 } \zeta \sim b_1 = \infty).$$

辐角$\theta_1 - 2\pi$与θ_1本来是一回事，所以上式已经满足(14.2.16)的

要求.这样说来,如 $b_1=\infty$,则(14.2.14)里的因子$(\zeta-b_1)^{-\theta_1/\pi}$应略去,

$$z'(z)=A(\zeta-b_2)^{-\theta_2/\pi}(\zeta-b_3)^{-\theta_3/\pi}\cdots(\zeta-b_n)^{-\theta_n/\pi}. \tag{14.2.17}$$

积分一次,就得到这种情况下的施瓦兹-克利斯多菲变换

$$z=z_0+A\int(\zeta-b_2)^{-\theta_2/\pi}(\zeta-b_3)^{-\theta_3/\pi}\cdots(\zeta-b_n)^{-\theta_n/\pi}\mathrm{d}\zeta. \tag{14.2.18}$$

施瓦兹-克利斯多菲变换(14.2.15)可看作前后相继的两个变换

$$z_1=\int(\zeta-b_1)^{-\theta_1/\pi}(\zeta-b_2)^{-\theta_2/\pi}\cdots(\zeta-b_n)^{-\theta_n/\pi}\mathrm{d}\zeta,$$

$$z=z_0+Az_1.$$

前一变换把 ζ 的上半平面变为 z_1平面上的多角形,其外角为 θ_1, $\theta_2,\cdots,\theta_n$,各个顶点则是由 ζ 平面实轴上的点 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 变换过来的.尽管这个多角形的各个外角数值是对的,却不见得就是我们所要的多角形.后一变换是线性变换,它把前一变换所得的多角形变为其相似形.但我们所要的多角形跟前一变换所得多角形并不见得相似,如果 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是任意指定的话.不过,三角形只要三个顶角相同,必是相似形.因此,对于三角形,施瓦兹-克利斯多菲变换的 b_1,b_2和 b_3可以任意指定.对于 $n>3$的多角形,不能任意指定 $b_1,b_2,\cdots,b_n$.多角形任意三个顶点可联成三角形,所以 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 之中可以指定任意三个的数值,其余的则不可指定,它们必须在写出施瓦兹-克利斯多菲变换公式之后根据顶点的对应关系加以确定.

例 9 用施瓦兹-克利斯多菲变换求解例2(图14-5a)

解 图14-5a 的水流所充满的区域可说是"四角形"$a_1a_2a_3a_4$, a_1在 $z-\infty$,a_2在 $z=0$,a_3在 $z=\mathrm{i}h$,a_4在 $z=0$,偏转角 $\theta_2=+\pi/2$,$\theta_3=-\pi$,$\theta_4=+\pi/2$.我们希望把这区域变为 ζ 的上半平面(图14-5d).指定 b_1在 $\zeta=\infty$,b_2在 $\zeta=-h$,b_3在 $\zeta=0$.由于对称性,b_4必在 ζ

$=+h$.

应用施瓦兹-克利斯多菲变换(14.2.18),

$$z=z_0+A\int(\zeta+h)^{-1/2}\zeta^{+1}(\zeta-h)^{-1/2}\mathrm{d}\zeta=z_0+A\int\frac{\zeta\mathrm{d}\zeta}{\sqrt{\zeta^2-h^2}}$$

$$=z_0+A\sqrt{\zeta^2-h^2}.$$

常数 z_0和 A 还有待确定.

由 a_2和 b_2的对应,$0=z_0+A0$,即 $z_0=0$. 又由 a_3和 b_3的对应,$ih=z_0+Aih$,即$2A=1$. 这样,需要进行的变换是

$$z^2=\zeta^2-h^2.$$

例2的三个相继的变换(幂函数、平移、根式)的"积"正是这个变换.

ζ 平面上的速度势 $u=C\zeta=\mathrm{Re}(C\zeta)$. 回到原来的自变数,

$$u=\mathrm{Re}(C\sqrt{z^2+h^2})$$

$$=C\sqrt{\frac{(x^2-y^2+h^2)+\sqrt{(x^2-y^2+h^2)^2+4x^2y^2}}{2}},$$

C 是远离薄片地方的流速.

例 10 研究平行板电容器的边缘效应.

解 研究某一端的边缘效应,不妨把另一端看作伸展到无限远.

电容器的静电场所占据的空间可看作图14-17a 的"四角形"$ABCD$(AB 和 BC 是重合的,即电容器的极板;CD 和 DA 也是重合的,即电容器的另一极板). 在顶点 B,C 和 D 的偏转角分别是 $-\pi$,$+\pi$ 和 $-\pi$.

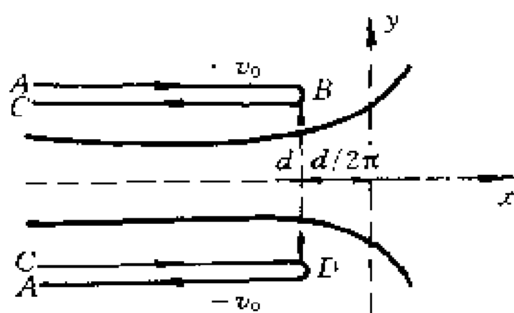


图14-17a

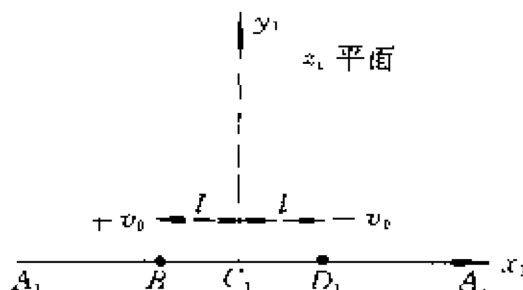


图14-17b

先把这四角形变为 z_1 的上半平面(图14-17b). 指定 A_1 在 $z_1=\infty$, B_1 在 $z_1=-1$, C_1 在 $z_1=0$. 由于对称性, D_1 必在 $z_1=+1$.

应用施瓦兹-克利斯多菲变换(14.2.18),

$$z=z_0+A\int(z_1+1)^{+1}z_1^{-1}(z_1-1)^{+1}\mathrm{d}z_1=z_0+A\int\frac{z_1^2-1}{z_1}\mathrm{d}z_1$$

$$=z_0+A\int\left(z_1-\frac{1}{z_1}\right)\mathrm{d}z_1=z_0+\frac{1}{2}Az_1^2-A\ln z_1.$$

由于 B 和 B_1 对应, D 和 D_1 对应,

$$\begin{cases}-\dfrac{d}{2\pi}+\mathrm{i}\,\dfrac{d}{2}=z_0+\dfrac{A}{2}-A\mathrm{i}\pi,\\ -\dfrac{d}{2\pi}-\mathrm{i}\,\dfrac{d}{2}=z_0+\dfrac{A}{2}.\end{cases}$$

从这组联立代数方程解得

$$A=-\frac{d}{\pi},\ z_0=-\mathrm{i}\,\frac{d}{2}.$$

这样, z 平面和 z_1 平面之间的变换是

$$z=-\mathrm{i}\,\frac{d}{2}-\frac{d}{2\pi}z_1^2+\frac{d}{\pi}\ln z_1. \qquad (14.2.19)$$

把平行板电容器两极板的电势记作 $+v_0$ 和 $-v_0$, 则 z_1 平面的正实轴和负实轴分别具有电势 $-v_0$ 和 $+v_0$, 这问题仍然不便于求解. 利用对数函数

$$z_2=2\ln z_1, \qquad (14.2.20)$$

可把 z_1 平面的正、负实轴变为 z_2 平面上的两条平行线 $y=0$ 和 $y=2\pi$(图14-17c), 这代表两方都伸展到无限远的平板电容器。为了使图形更对称, 又作平移得图14-17d.

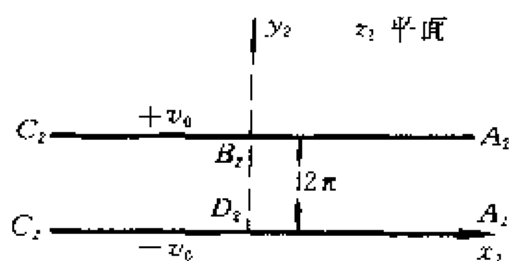


图14-17c

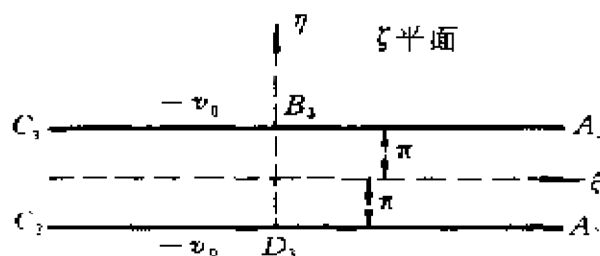


图14-17d

$$\zeta = z_2 - \mathrm{i}\pi, \qquad (14.2.21)$$

综合(14.2.19)～(14.2.21)，从 z 平面到 ζ 平面的变换是

$$z = -\mathrm{i}\,\frac{d}{2} - \mathrm{e}^{z_2}\frac{d}{2\pi} + z_2\frac{d}{2\pi} = -\mathrm{i}\,\frac{d}{2} - \mathrm{e}^{(\zeta+\mathrm{i}\pi)}\frac{d}{2\pi} + (\zeta+\mathrm{i}\pi)\frac{d}{2\pi}$$

$$= (\mathrm{e}^{\zeta}+\zeta)\frac{d}{2\pi}. \qquad (14.2.22)$$

ζ 平面的平行板电容器的静电场中的电势 v 显然是

$$v = \frac{v_0}{\pi}\eta = \mathrm{Im}\left(\frac{v_0}{\pi}\zeta\right),$$

复势 $w = u + \mathrm{i}v = \frac{v_0}{\pi}\zeta$. 以此代入(14.2.22)得

$$z = \left(\mathrm{e}^{\pi w/v_0} + \frac{\pi}{v_0}w\right)\frac{d}{2\pi}. \qquad (14.2.23)$$

这里，复势 w 作为坐标 z 的函数是以隐函数的形式表出的.

考察电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的大小 E，

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(-\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2}.$$

根据(1.3.1)和(1.3.3)，这是说，$E = |\mathrm{d}w/\mathrm{d}z|$. 因此，

$$E = \frac{1}{\left|\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w}\right|} = \frac{1}{|\mathrm{e}^{\pi w/v_0}+1|}\frac{2v_0}{d}. \qquad (14.2.24)$$

先看 z 平面的电容器深处，即远离边缘的地方，亦即 $x \to -\infty$ 而 $|y| < d/2$. 这对应于 ζ 平面的 $\xi \to -\infty$ 而 $|\eta| < \pi$，相应的复势 $w \to -\infty + \mathrm{i}\,\frac{v_0}{\pi}\eta$. 代入(14.2.24)，

$$E = \frac{1}{|0+1|}\frac{2v_0}{d} = \frac{2v_0}{d},$$

这正是通常忽略边缘效应所得的场强.

再看靠近边缘 B 和 D 的地方. 这对应于 ζ 平面上靠近 B_3 和 D_3 的地方，即 $\xi \approx 0$ 而 $\eta \approx \pm\pi$，相应的复势 $w \approx \pm \mathrm{i}v_0$. 代入(14.2.24)，

$$E \to \frac{1}{|-1+1|}\frac{2v_0}{d} = \infty$$

在平板电容器边缘，极板的曲率可说为无限大，尖端效应极为强烈，场强 E 亦表现为无限大.

研究电击穿问题时，必须注意**边缘效应**. 当电容器中部的场强还远远低于击穿电压时，电容器边缘的场强却已达到击穿电压从而把电容器两极板间的电介质击穿.

为更细致地考察场强在空间中的分布情况，需要把(14.2.24)写得更具体一些，

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{1}{|e^{\pi u/v_0+i\pi v/v_0}+1|}\frac{2v_0}{d} \\
&= \frac{1}{\left|e^{\pi u/v_0}\left(\cos\frac{\pi v}{v_0}+i\sin\frac{\pi v}{v_0}\right)+1\right|}\frac{2v_0}{d} \\
&= \frac{1}{\sqrt{e^{2\pi u/v_0}+2e^{\pi u/v_0}\cos\frac{\pi v}{v_0}+1}}\frac{2v_0}{d}.
\end{aligned}
\tag{14.2.25}
$$

考察场强的大小，需着重考察根号下的式子

$$
e^{2\pi u/v_0}+2e^{\pi u/v_0}\cos\frac{\pi v}{v_0}+1. \tag{14.2.26}
$$

现在研究沿着一定的等势线(v=常数)的场强分布. 为此，研究对于给定的 v 和 u，(14.2.26)式的值如何变化. 按照通常研究极值的方法，很容易得到如下结论：随着 u 的增大，

$$
\begin{cases}
\text{如}\ |v|>v_0/2\text{，(14.2.26)达到极小值后又上升；} \\
\text{如}\ |v|\leqslant v_0/2\text{，(14.2.26)单调上升，从而(14.2.25)单调下降.}
\end{cases}
$$

这样，如果把电容器极板做成图14-17a 粗线所示形状 ($v=\pm v_0/2$)，那么，场强从电容器中部向边缘单调下降，这就保证了不致由于边缘效应而引起击穿. 这种电容器叫作**洛果夫斯基电容器**.

例 11 宽度为 b 的两条导体薄带，平行地放置在同一平面里，相近的两边之间的间隔为$2a$. 试求每单位长度的电容量.

解 取横截面. 这两条薄带的截口是从 $-(a+b)$ 到 $-a$ 和从 a 到 $a+b$ 的两段直线(图14-18a)，作变换

$$\zeta_1=\frac{1}{a}\zeta,$$

两条薄带的截口变为 ζ_1 平面上的直线段 b_1b_2 和 b_3b_4（图14-18b），图中的 $k=a/(a+b)<1$. 这样，b_1b_2 和 b_3b_4 各为等势线，b_2b_3 和 $b_4\infty b_1$ 则是电力线.

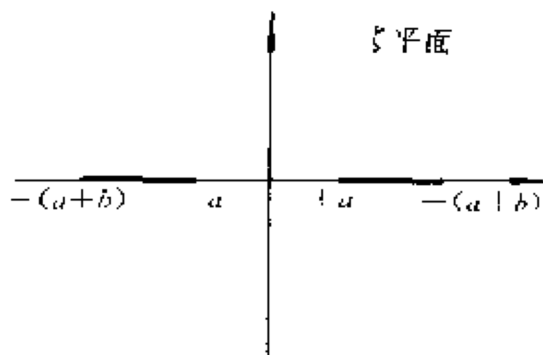


图14-18a

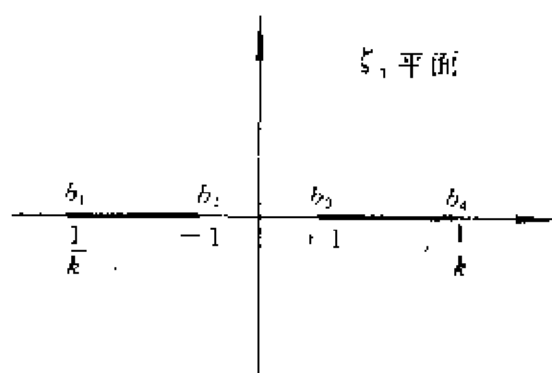


图14-18b

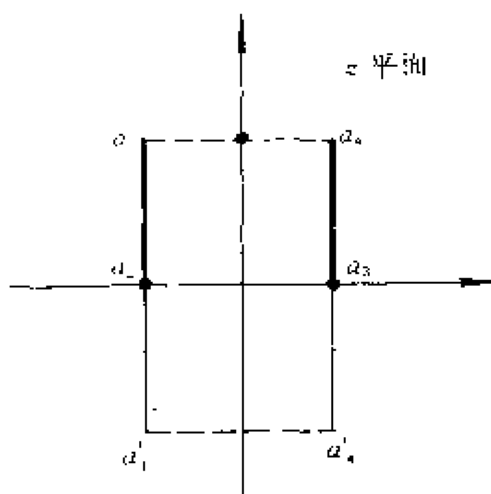


图14-18c

利用施瓦兹-克利斯多菲变换(14.2.18)，可把 ζ_1 的上半平面变为 z 平面的四角形 $a_1a_2a_3a_4$ 的内部. 在四角形的每个顶点，偏转角都是 $+\pi/2$. 因此，

$$\begin{aligned} z &= z_0+A\int\left(\zeta_1+\frac{1}{k}\right)^{-\frac{1}{2}}(\zeta_1+1)^{-\frac{1}{2}}(\zeta_1-1)^{-\frac{1}{2}}\left(\zeta_1-\frac{1}{k}\right)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\zeta \\ &= z_0+Ak\int\frac{\mathrm{d}\zeta_1}{\sqrt{(1-\zeta_1^2)(1-k^2\zeta_1^2)}}. \end{aligned}$$

常数 z_0 和 A 取决于四角形的大小和方位. 这里，我们对于四角形的大小和方位，并未提出特定的要求，不妨取 $z_0=0$，$Ak=1$. 于是

$$z=\int_0^{\zeta_1}\frac{\mathrm{d}\zeta_1}{\sqrt{(1-\zeta_1^2)(1-k^2\zeta_1^2)}}. \qquad (14.2.27)$$

这个积分不能用初等函数表出，它叫作**第一类椭圆积分**. 椭圆积分的数值有表格可查，这种表格在普通的数学手册里都能找到. 椭圆

积分的数值也可表为级数

$$\int_0^{\zeta_1}\frac{d\zeta_1}{\sqrt{(1-\zeta_1^2)(1-k^2\zeta_1^2)}}$$
$$=\frac{2}{\pi}K\mathrm{arc\,sin}\zeta_1$$
$$-\zeta_1\sqrt{1-\zeta_1^2}\left[\frac{1\cdot 1}{2\cdot 1}k^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}A_4k^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}A_6k^6+\cdots\right],$$
(14.2.28)

其中 K 见下面的(14.2.29)式，$A_4=\frac{1}{4}\zeta_1^2+\frac{3}{2\cdot 4}$，$A_6=\frac{1}{6}\zeta_1^4+\frac{5}{6.4}\zeta_1^2+\frac{5\cdot 3}{6\cdot 4\cdot 2}$，$A_8=\frac{1}{8}\zeta_1^6+\frac{7}{8\cdot 6}\zeta_1^4+\frac{7\cdot 5}{8\cdot 6\cdot 4}\zeta_1^2+\frac{7\cdot 5\cdot 3}{8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}$，….

现在确定 z 平面上 a_1、a_2、a_3和 a_4的坐标. 先看 a_3，它对应于 ζ_1 平面的 b_3即 $\zeta_1=+1$. 以 $\zeta_1=+1$代入(14.2.27)，得

$$z=\int_0^1\frac{d\zeta_1}{\sqrt{(1-\zeta_1^2)(1-k^2\zeta_1^2)}}.$$

这叫作**第一类完全椭圆积分**，通常记作 $K(k)$. $K(k)$的数值在椭圆积分表中可以查出，或者用下列级数表示

$$K(k)=\frac{\pi}{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2k^4+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2k^6+\cdots\right].$$
(14.2.29)

这样，a_3的坐标是 $z=K(k)$. 同理，a_2的坐标是 $z=-K(k)$. 再看 a_4，它对应于 ζ_1平面的 b_4即 $\zeta_1=1/k$. 以 $\zeta_1=1/k$ 代入(14.2.27)，得

$$z=\int_0^{1/k}\frac{d\zeta_1}{\sqrt{(1-\zeta_1^2)(1-k^2\zeta_1^2)}}$$
$$=K(k)+\int_1^{1/k}\frac{d\zeta_1}{\sqrt{(1-\zeta_1^2)(1-k^2\zeta_1^2)}}.$$

在最后那个积分中，作积分变数的代换

$$\zeta_1=\frac{1}{\sqrt{1-k'^2t^2}}\qquad(k'^2=1-k^2),$$

则

$$z=K(k)\pm\mathrm{i}\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}}=K(k)+\mathrm{i}K(k').$$

(14.2.30)

在±号中取+号，即得a_4的坐标$z=K(k)+\mathrm{i}K(k')$. 通常还把$K(k')$记作$K'(k)$，所以a_4的坐标是$z=K+\mathrm{i}K'$. 同理，a_1的坐标是$z=-K+\mathrm{i}K'$.

到这里，我们已把ζ_1的上半平面变为z平面的四角形$a_1a_2a_3a_4$的内部，并且确定了四个顶点的坐标.

由于对称性，ζ_1的下半平面当然变为z平面的四角形$a_1'a_2a_3a_4'$的内部，而a_4'的坐标可在(14.2.30)的±号中取−号得到，即$z=K-\mathrm{i}K'$. 同理，a_1'的坐标是$z=-K-\mathrm{i}K'$.

这样，ζ_1全平面上的静电场变为z平面上$a_1a_1'a_4'a_4$四角形的内部. a_1a_1'和a_4a_4'是等势线，a_1a_4和$a_1'a_4'$是电力线. z平面的图象是平行板电容器(注意这里没有边缘效应)，极板宽度为$2K'$，极板之间距离为$2K$，因而每单位长度的电容量

$$C=\frac{\varepsilon_0 2K'}{2K}=\frac{\varepsilon_0 K(k')}{K(k)}=\frac{\varepsilon_0 K\left(\frac{\sqrt{(a+b)^2-a^2}}{a+b}\right)}{K\left(\frac{a}{a+b}\right)}.$$

这也就是原来那两条薄带每单位长度的电容量. 式中$K(k)$是第一类完全椭圆积分，它的数值需查椭圆积分数值表或用级数(14.2.29)计算.

习　题

1. 例1的二面角的二等分面上有一带电细导线，平行于二面角的顶角线，相距为a，导线每单位长度带电量为Q. 试求电势分布.

2. 接地甚长空心金属圆柱半径为a，柱内有细导线，平行于柱轴，相距b. 导线每单位长度带电量为Q. 试求圆柱内电势分布.

3. 甚长金属圆柱的轴平行于甚大金属平板，两者相距b，平板接地. 圆柱半径为a. 试求每单位长度的电容量.

4. 甚大金属平面上有柱形隆起，其横截面为弓形. 弓形在0和 a 之间，弓形的弧的半径为 a. 求解带电后的静电场.

5. 长金属柱，其横截面由两段圆弧围成，这两段圆弧是相等的，其半径为 a，交点在0和 a. 求解金属柱带电后的周围静电场.

6. 试把下列区域保角变换为圆.

(1) 弓形 $\mathrm{Im}z \geqslant 1, |z| \leqslant 2$，　　(2) 圆 $|z|=2$ 外，除去第一象限.

(3) 两个相切的圆 $|z| \leqslant 2$ 和 $|z-3| \leqslant 1$ 以外的区域.

(4) 圆 $|z| \leqslant 3$ 外，除去突起 $\begin{cases} \mathrm{Im}z = 0, \\ 3 \leqslant \mathrm{Re}z \leqslant 4. \end{cases}$

(5) 圆 $|z| \leqslant 1$ 内，带有割线 $\begin{cases} \mathrm{Im}z = 0, \\ 0 \leqslant \mathrm{Re}z \leqslant 1. \end{cases}$

(6) 心脏线的内部 $|z| \leqslant \cos^2\left[\dfrac{1}{2}\arg z\right]$.

(7) 双纽线一支 $|z| \leqslant \sqrt{\cos[2\arg z]}$.

7. 研究甚长带电导体薄带周围的静电场，带宽为 $2a$.

8. 研究甚长带电椭圆导体柱周围的静电场，椭圆半长轴为 a，半短轴为 b.

9. 两个椭圆柱构成柱形电容器，横截面是两个共焦点椭圆，半长轴分别是 a_1 和 a_2，半短轴分别是 b_1 和 b_2. 试求每单位长度的电容量.

10. 求解二维稳恒水流通过宽度为 $2a$ 的闸门的情形.

11. 图14-19是六角"星"，六个臂彼此相隔60°，各自长度为1. 试把"星"的外部变为 ζ 平面的单位圆外部.

[提示：$z_1 = z^3, \zeta_1 = \zeta^3$，再找 z_1 和 ζ_1 之间的变换.]

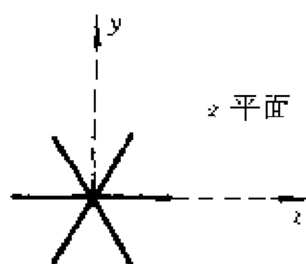


图14-19

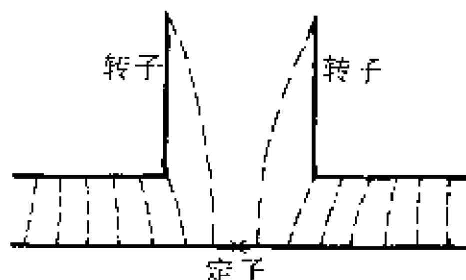


图14-20

12. 研究电机的转子和定子之间(图14-20)的磁场. 求最大磁场和最小磁场之比.

13. 求 z 平面的半无界长条 $0 < \mathrm{Re}z < a, \mathrm{Im}z > 0$ 上的调和函数，边界条件

是$u|_{x=0}=0, u|_{x=a}=0, u|_{y=0}=u_0$.

14. 把可变电容器中的静电场所占空间(图14-21)变为上半平面.

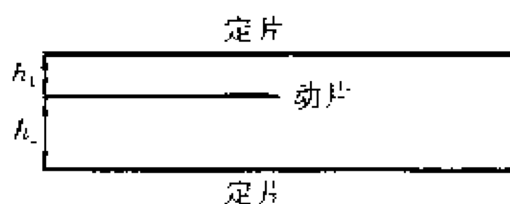


图14-21

15. 研究回旋加速器D形盒(图14 22)的静电场. 可把D形盒的侧壁当作在无限远.

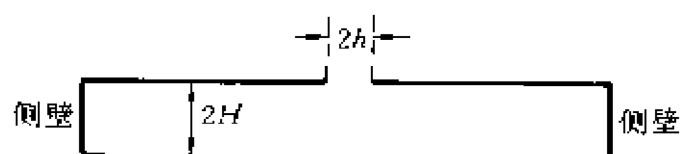


图14-22

第十五章　近似方法简介

许多定解问题，或由于边界形状较为复杂，或由于泛定方程较为复杂，或由于其他各种原因，难以严格解出. 因此，又发展了近似方法. 只要近似程度足以满足实际工作的要求，近似解的价值一点也不低于严格解. 其实，认真说来，推导数学物理方程时不免要作一些简化假定，定解条件本身也带有或多或少的近似性，所谓严格解说到底也还是近似的.

因此，近似方法具有重大意义.

如果某个定解问题不能严格解出，但另一个跟它相差很小的定解问题已严格解出，就可运用微扰法求近似解. 量子力学教科书和参考书都要讲到微扰法，本书就省略不讲，以免重复. 不过，应当指出，微扰法是一个普遍方法，并不是只能用于求解量子力学的薛定谔方程. 事实上，微扰法起源于天体力学，在那里它叫作摄动法.（“微扰”和“摄动”在英文里是同一个词 perturbation，在俄文里也是同一个词 возмущение.）

另一种常用的近似方法是**变分方法**，把定解问题转化为变分问题. 再求变分问题的近似解.

电子计算机的使用日见普及，用电子计算机求定解问题的数值解是很方便的. 用**有限差分法**把定解问题转化为代数方程组，就可由电子计算机计算了.

还可以用一定的物理模型来模拟所研究的定解问题，而在模型上实地测量解的数值.

§15.1　作为近似方法的变分法

既然变分问题可以转化为相应的欧勒方程（常微分方程或偏微分方程），反过来说，定解问题里的泛定方程也就可以看作是某个变分问题的欧勒方程，而变分问题可以按瑞利-里兹方法求得近似解.

例　用变分方法求解圆形域 $|\rho|\leqslant a$ 上的二维亥姆霍兹方程的边值问题

$$\begin{cases}\Delta_2 u+\lambda u=0,\\ u|_{\rho=a}=0\end{cases}$$

的各向对称解.

本例的各向对称解可严格解出，它是 $u=J_0(2.4048\rho/a)$，本征值是 $\lambda=(2.4048)^2=5.7831$. 试拿变分法所得近似解跟这严格解进行比较.

解 不难验证，泛定方程是泛函

$$J=\iint(u_x^2+u_y^2-\lambda u^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{15.1.1}$$

的极值问题的欧勒方程.

用瑞利-里兹方法来解这个变分问题. 选取满足边界条件 $u|_{\rho=a}=0$ 的尝试函数

$$u=c_1(a^2-\rho^2)+c_2(a^2-\rho^2)^2, \tag{15.1.2}$$

其中常数 c_1 和 c_2 是有待确定的. 确定它们的条件是泛函 J 取极值. 以(15.1.2)代入(15.1.1)，

$$\begin{aligned}J&=\int_{\rho=0}^{a}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2-\lambda u^3\right]\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho\\
&=2\pi\int_0^a\left[\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)^2-\lambda u^2\right]\rho\mathrm{d}\rho\\
&=\pi\int_0^a\Big\{c_1^2[4\rho^2-\lambda(a^2-\rho^2)^2]\\
&\quad+c_1c_2[16\rho^2(a^2-\rho^2)-2\lambda(a^2-\rho^2)^3]\\
&\quad+c_2^2[16\rho^2(a^2-\rho^2)^2-\lambda(a^2-\rho^2)^4]\Big\}\mathrm{d}(\rho^2)\\
&=\pi\left[c_1^2\left(2a^4-\frac{1}{3}a^6\lambda\right)+c_1c_2\left(\frac{8}{3}a^6-\frac{1}{2}a^8\lambda\right)\right.\\
&\quad\left.+c_2^2\left(\frac{4}{3}a^8-\frac{1}{5}a^{10}\lambda\right)\right].\end{aligned}$$

既然 J 取极值，应有 $\partial J/\partial c_1=0$ 和 $\partial J/\partial c_2=0$，即

$$\begin{cases}\left(4-\frac{2}{3}a^2\lambda\right)c_1+\left(\frac{8}{3}a^2-\frac{1}{2}a^4\lambda\right)c_2=0,\\ \left(\frac{8}{3}-\frac{1}{2}a^2\lambda\right)c_1+\left(\frac{8}{3}a^2-\frac{2}{5}a^4\lambda\right)c_2=0.\end{cases}$$

对 c_1 和 c_2 而言，这是齐次代数方程组. 齐次代数方程组有非零解的条件是系数行列式为零，由此解得本征值 λ. 这样解出的 λ 有两个，其中较小的一个是 $5.7841/a^2$. 取这个 λ，得到

$$c_2/c_1=0.638/a^2.$$

这样，近似本征值和近似本征函数是

$$\lambda=5.7841,u=[a^2(a^2-\rho^2)+0.638(a^2-\rho^2)^2]/1.638.$$

跟严格解比较，近似本征值5.7841略大于严格本征值5.7831，准确到$10^{-2}\%$. 至于本征函数的比较见下表

ρ/a	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
近似本征函数	$0.987a^4$	$0.945a^4$	$0.879a^4$	$0.789a^4$	$0.677a^4$
严格本征函数	$0.986a^4$	$0.943a^4$	$0.875a^4$	$0.783a^4$	$0.671a^4$

ρ/a	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
近似本征函数	$0.550a^4$	$0.413a^4$	$0.270a^4$	$0.130a^4$	0
严格本征函数	$0.545a^4$	$0.410a^4$	$0.270a^4$	$0.133a^4$	0

读者可以看到，用(15.1.2)那样简单的尝试函数，得到的近似解是相当准确的，本征值的准确程度更是优于本征函数的准确程度. 本征值的准确度优于本征函数的准确度，这是变分法的特点.

尝试函数(15.1.2)是待定常数c_1和c_2的线性函数. 这并不是必须的，尝试函数完全可以选取为待定常数的非线性函数.

如果边界的形状比较复杂，变分法更能显示优越性. 例如，边界是两个相切的圆$x^2+y^2-a^2=0$和$x^2-ax+y^2=0$(图15-1)，求亥姆霍兹方程边值问题的严格解相当困难. 而如果采用变分方法，对于第一类齐次边界条件，只要选取

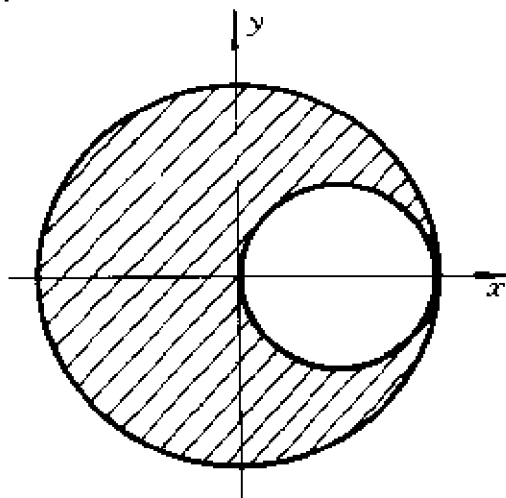


图15-1

$$u(x,y)=(x^2+y^2-a^2)(x^2-ax+y^2)f(x,y)$$

形式的尝试函数就能满足边界条件，其中$f(x,y)$的选取还有很大的灵活性.

§15.2 模 拟 法

我们知道，有许多物理本质完全不同的物理问题，"翻译"成数学问题竟是一样的，就是说，在数学上表示为同一个定解问题. 因此，为了研究某个物理问题而求解相应的定解问题时，完全可以用另一个物理问题的实验研究来代替定解问题的求解. 例如，研究某个不规则形状的物体里的稳定温度分布问题，在数学上这是拉普拉斯方程的边值问题. 由于物体形状不规则，这个边值问题的严格解很困难. 考虑到静电场或稳恒电流场中的电势也遵守拉普拉斯方程，对相应的静电场或稳恒电流场进行实验研究，测定场中各处的电势，也就解决了稳定温度场中的温度分布. 这就是用静电场或稳恒电流场模拟稳定温度场，或者说，用静电场或稳恒电流场作拉普拉斯方程的**物理模型**.

物理模型并不限于电学的模型，但电学的测量比较方便而准确，所以电学的模型是常用的.

§15.3 有限差分法

大家都知道，表示函数的方法有公式法、表格法和图象法. 如果能够用函数表的形式给出定解问题的解的数值，虽然没有给出公式，还是可以说定解问题已经解出. 其实，不少实际工作需要的正是这种数值表.

数值解法将有专门的课程加以论述，这里只对**有限差分法**作简略的介绍. 有限差分法的基本概念是用差商代替微商.

导数或叫微商

$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}$$

是无限小的微分 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y$ 除以无限小的微分 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x$ 的商. 它可以近似为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\approx\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}, \tag{15.3.1}$$

即有限小的差分 Δy 除以有限小的差分 Δx 的商，这叫作**差商**. 按照同样的想法，导数 y' 还可近似为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\approx\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y(x)-y(x-\Delta x)}{\Delta x}, \tag{15.3.2}$$

或近似为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\approx\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y(x+\Delta x)-y(x-\Delta x)}{2\Delta x} \tag{15.3.3}$$

近似式(15.3.1)和(15.3.2)相当于把泰勒级数

$$y(x+\Delta x)=y(x)+(\Delta x)y'+\frac{1}{2!}(\Delta x)^2y''+\cdots,$$

$$y(x-\Delta x)=y(x)-(\Delta x)y'+\frac{1}{2!}(\Delta x)^2y''+\cdots$$

截断于$(\Delta x)y'$项，把$(\Delta x)^2$项以及更高幂次的项全部略去.(15.3.3)则相当于把泰勒级数

$$y(x+\Delta x)-y(x-\Delta x)=2(\Delta x)y'+\frac{2}{3!}(\Delta x)^3y'''+\cdots$$

截断于$2(\Delta x)y'$项，把$(\Delta x)^3$项以及更高幂次的项全部略去.因此，(15.3.3)的截断误差小于(15.3.1)和(15.3.2).

二阶导数可近似为差商的差商，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}&\approx\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x+\Delta x}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x}\right]\\&\approx\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}-\frac{y(x)-y(x-\Delta x)}{\Delta x}\right]\\&=\frac{1}{(\Delta x)^2}[y(x+\Delta x)+y(x-\Delta x)-2y(x)].\end{aligned} \tag{15.3.4}$$

这相当于把泰勒级数

$$\begin{aligned}&y(x+\Delta x)+y(x-\Delta x)\\&\quad=2y(x)+(\Delta x)^2y''+\frac{2}{4!}(\Delta x)^4y^{[4]}+\cdots\end{aligned}$$

截断于$(\Delta x)^2y''$项，把$(\Delta x)^4$项以及更高幂次的项全部略去.

偏导数也可仿照(15.3.1)～(15.3.4)近似为差商.这样一来，偏微分方程就成了**差分方程**.

例如，在闭曲线C所围区域S上(图15-2)求解二维拉普拉斯方程

$$u_{xx}+u_{yy}=0$$

的边值问题.用方格网覆盖在xy平面上，方格每边长ξ，把方格的结点坐标记作(x_i,y_k).仿照(15.3.4)，二维拉普拉斯方程可近似为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\xi^2}[u(x_{i+1},y_k)+u(x_{i-1},y_k)-2u(x_i,y_k)]\\&+\frac{1}{\xi^2}[u(x_i,y_{k+1})+u(x_i,y_{k-1})-2u(x_i,y_k)]=0,\end{aligned}$$

即

$$u(x_i, y_k)$$
$$=\frac{1}{4}[u(x_{i+1}, y_k)+u(x_{i-1}, y_k)-u(x_i, y_{k+1})+u(x_i, y_{k-1})]. \qquad (15.3.5)$$

就是说,u 在每一结点的值等于 u 在四邻结点的值的平均. 于是,把边界线 C 近似为折线 C_k,区域 S 近似为 S_k. 函数 u 在 C_k 上结点 M_k 的值可近似地认为就等于 u 在 C 上最邻近的点 M 的值,后者根据边界条件是已知的. 至于 u 在 S_k 内各结点的值则是待求的未知数. 对于每一个这样的结点,按照(15.3.5)可写出一个代数方程. 这样,我们得到代数方程组,方程的个数等于 S_k 内结点数,也就等于未知数的个数. 用电子计算机求解这种代数方程组是很方便的.

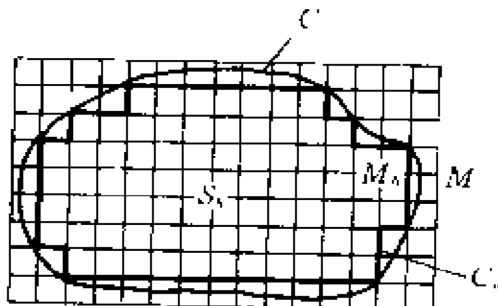


图15-2

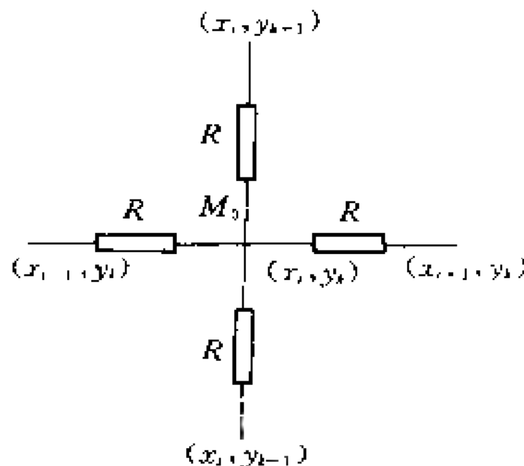


图15-3

曾经有人用模拟法来解这种代数方程组. 办法是用电阻相等的电阻器组成方格网(图15-3)按照电路的基尔霍夫定律,流向结点 M_0的电流的代数和为零,即

$$j_1+j_2+j_3+j_4=0.$$

按照欧姆定律,上式即

$$\frac{v(x_{i+1}, y_k)-v(x_i, y_k)}{R}+\frac{v(x_i, y_{k+1})-v(x_i, y_k)}{R}$$
$$+\frac{v(x_{i-1}, y_k)-v(x_i, y_k)}{R}+\frac{v(x_i, y_{k-1})-v(x_i, y_k)}{R}=0,$$

亦即

$$v(x_i, y_k)-\frac{1}{4}[v(x_{i+1}, y_k)+v(x_{i-1}, y_k)$$
$$+v(x_i, y_{k+1})+v(x_i, y_{k-1})],$$

跟(15.3.5)完全相同.因此,只要在边界的结点加上已知的电势,测量区域内各结点的电势,就解决了二维拉普拉斯方程边值问题.

又如,在区间$(0,l)$上求解一维输运方程

$$u_t = a^2 u_{xx}.$$

把整个区间分为J个"步子",每一步的长度$\xi = l/J$.于是,自变数x以步长ξ跳跃,它的取值是$x_i = i\xi (i=0,1,2,\cdots,J)$.又把时间的步长取为$\tau$,即自变数$t$取值$t_k = k\tau (k=0,1,2,3,\cdots)$.仿照(15.3.1)和(15.3.4),一维输运方程可近似为

$$\frac{u(x_i,t_{k+1})-u(x_i,t_k)}{\tau} = a^2\frac{u(x_{i+1},t_k)+u(x_{i-1},t_k)-2u(x_i,t_k)}{\xi^2},$$

即

$$u(x_i,t_{k+1}) = \left(1-2\frac{a^2\tau}{\xi}\right)u(x_i,t_k) + \frac{a^2\tau}{\xi}[u(x_{i+1},t_k)+u(x_{i-1},t_k)]. \tag{15.3.6}$$

这是说,只要知道了某个时刻t_k的u在各个地点x_i的值$u(x_i,t_k)$,代入(15.3.6)的右边,就得到下一时刻t_{k+1}的u在各个地点x_i的值$u(x_i,t_{k+1})$.这样,从初始时刻的值$u(x_i,t_0)$出发,不难依次递推出$t_1,t_2,\cdots,t_k,\cdots$各个时刻的$u$的值.

但是,人们发现,时间t的步子不能跨得太大,必须满足条件

$$\frac{a^2\tau}{\xi} \leqslant \frac{1}{2}, \tag{15.3.7}$$

否则某一步算出的数值的某项舍入误差(由四舍五入造成的误差)会在其后各步的计算中发挥越来越大的影响,以致使算出的数值完全失去意义.

偏导数u_t不一定要仿照(15.3.1)近似为差商,也可以仿照(15.3.2)近似为差商,这就使一维输运方程近似为

$$\frac{u(x_i,t_k)-u(x_i,t_{k-1})}{\tau} = a^2\frac{u(x_{i-1},t_k)+u(x_{i-1},t_k)-2u(x_i,t_k)}{\xi^2},$$

即

$$\frac{a^2\tau}{\xi}u(x_{i+1},t_k)-\left(1+2\frac{a^2\tau}{\xi}\right)u(x_i,t_k)$$

$$+\frac{a^2\tau}{\xi}u(x_{i-1},t_k)=-u(x_i,t_{k-1}). \qquad (15.3.8)$$

人们发现,这样作可取消对步长 τ 的限制.但是,知道某个时刻 t_k 的 u 在各个地点 x_i 的值 $u(x_i,t_k)$后,并不能由(15.3.8)直接得到下一时刻 t_{k+1}的 $u(x_i,t_{k+1})$,却必须把 $i=1,2,3,\cdots,J-1$的(15.3.8)共计 $J-1$个方程联立起来求解 $u(x_1,t_{k+1}),u(x_2,t_{k+1}),\cdots,u(x_{J-1},t_{k+1})$.这种联立代数方程用电子计算机求解还是很方便的.

较好的近似是仿照(15.3.3)把偏导数 u_t 近似为

$$u_t(x_i,t_{k+\frac{1}{2}})=\frac{u(x_i,t_{k+1})-u(x_i,t_k)}{\tau},$$

从而一维输运方程近似为

$$\frac{u(x_i,t_{k+1})-u(x_i,t_k)}{\tau}$$

$$=a^2\frac{u(x_{i+1},t_{k+1/2})+u(x_{i-1},t_{k+1/2})-2u(x_i,t_{k+1/2})}{\xi^2}.$$

式中 $u(x_i,t_{k-1/2})$可理解为$[u(x_i,t_{k+1})+u(x_i,t_k)]/2$,于是,上列差分方程即为

$$\frac{a^2\tau}{2\xi^2}u(x_{i+1},t_{k+1})-\left(1+\frac{a^2\tau}{\xi^2}\right)u(x_i,t_{k+1})+\frac{a^2\tau}{2\xi^2}u(x_{i-1},t_{k+1})$$

$$=-\frac{a^2\tau}{2\xi^2}u(x_{i+1},t_k)-\left(1-\frac{a^2\tau}{\xi^2}\right)u(x_i,t_k)-\frac{a^2\tau}{2\xi^2}u(x_{i-1},t_k). \qquad (15.3.9)$$

知道某个时刻 t_k 的 u 在各个地点 x_i 的值 $u(x_i,t_k)$后,必须把 $i=1,2,3,\cdots,J-1$的(15.3.9)共计 $J-1$个方程联立起来求解 $u(x_1,t_{k+1}),u(x_2,t_{k+1}),\cdots,u(x_{J-1},t_{k+1})$.这联立代数方程用电子计算机求解是方便的.对时间的步长 τ 也有限制,但比(15.3.7)要宽些,

$$\frac{a^2\tau}{\xi}\leqslant 1. \qquad (15.3.10)$$

再如,在区间$(0,l)$上求解一维波动方程

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=0.$$

把整个区间分为 J 个"步子",每一步长度 $\xi=l/J$.取时间的步长为 τ.仿照(15.3.4),一维波动方程可近似为

$$\frac{u(x_i,t_{k+1})+u(x_i,t_{k-1})-2u(x_i,t_k)}{\tau^2}$$

$$=a^2\frac{u(x_{i+1},t_k)+u(x_{i-1},t_k)-2u(x_i,t_k)}{\xi^2},$$

即

$$u(x_i, t_{k+1}) = 2\left(1 - \frac{a^2\tau^2}{\xi^2}\right)u(x_i, t_k) + \frac{a^2\tau^2}{\xi^2}[u(x_{i+1}, t_k) + u(x_{i-1}, t_k) - u(x_i, t_{k-1})]. \tag{15.3.11}$$

这是说，只要知道某个时刻 t_k 及其以前时刻的 u 在各个地点 x_i 的值，代入(15.3.10)的右边，就得到下一时刻 t_{k+1} 的 u 在各个地点 x_i 的值 $u(x_i, t_{k+1})$. 对时间的步长 τ 的限制是

$$\frac{a\tau}{\xi} \leqslant 1. \tag{15.3.12}$$

附　　录

一、傅里叶变换函数表

No	原函数 $f(x)$	像函数 $F(\omega)$
	$\left\{f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega x}d\omega\right\}$	$\left\{F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)[e^{i\omega x}]^{*}dx\right\}$
1	$\exp(-a^2x^2)$	$\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\exp(-\omega^2/4a^2)$
2	$\exp(-a\|x\|)$	$\frac{1}{\pi a}\frac{a^2}{a^2+\omega^2}$
3	$H(x)\exp(-ax)$	$\frac{1}{2\pi}\frac{a-i\omega}{a^2+\omega^2}$
4	$\mathrm{sgn}x\exp(-a\|x\|)$	$-\frac{i}{\pi}\frac{\omega}{a^2+\omega^2}$
5	$\exp(i\omega_0x-a\|x\|)$	$\frac{1}{\pi a}\frac{a^2}{a^2+(\omega-\omega_0)^2}$
6	$H(x)\exp(i\omega_0x-ax)$	$\frac{1}{2\pi}\frac{a+i(\omega_0-\omega)}{a^2+(\omega_0-\omega)^2}$
7	$\begin{cases}1 & (\|x\|<L)\\ 0 & (\|x\|>L)\end{cases}$	$\frac{1}{\pi}\frac{\sin\omega L}{\omega}$
8	$\begin{cases}\exp(i\omega_0x) & (\|x\|<L)\\ 0 & (\|x\|>L)\end{cases}$	$\frac{1}{\pi}\frac{\sin(\omega_0-\omega)L}{\omega_0-\omega}$
9	$\begin{cases}\cos\omega_0x & (\|x\|<L)\\ 0 & (\|x\|>L)\end{cases}$	$\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(\omega-\omega_0)L}{\omega-\omega_0}+\frac{\sin(\omega+\omega_0)L}{\omega+\omega_0}\right]$
10	$\begin{cases}\sin\omega_0x & (\|x\|<L)\\ 0 & (\|x\|>L)\end{cases}$	$\frac{i}{2\pi}\left[\frac{\sin(\omega+\omega_0)L}{\omega+\omega_0}-\frac{\sin(\omega-\omega_0)L}{\omega-\omega_0}\right]$

No	原函数 $f(x)$	像函数 $F(\omega)$
11	$\begin{cases}1-\dfrac{\|x\|}{L} & \|x\|<L\\ 0 & \|x\|>L\end{cases}$	$\dfrac{L}{2\pi}\left\{\dfrac{\sin(\omega L/2)}{\omega L/2}\right\}^2$
12	$\begin{cases}\dfrac{x}{L} & \|x\|<L\\ 0 & \|x\|>L\end{cases}$	$\dfrac{\mathrm{i}}{\pi\omega}\left\{\cos\omega L-\dfrac{\sin\omega L}{\omega L}\right\}$
13	$\begin{cases}\dfrac{\|x\|}{L} & \|x\|<L\\ 0 & \|x\|>L\end{cases}$	$\dfrac{L}{\pi}\left\{\dfrac{\sin\omega L}{\omega L}-2\left(\dfrac{\sin(\omega L/2)}{\omega L}\right)^2\right\}$
14	$\exp(\pm\mathrm{i}a^2x^2)$	$\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2\pi}}\dfrac{(1\pm\mathrm{i})}{a}\exp(\mp\mathrm{i}\omega^2/4a^2)$
15	$\dfrac{\sin\omega_0 x}{x}$	$\begin{cases}\dfrac{1}{2} & \|\omega\|<\omega_0\\ 0 & \|\omega\|>\omega_0\end{cases}$
16	$\dfrac{1}{\|x\|}\quad(x\neq0)$	$\dfrac{1}{\|\omega\|}\quad(\omega\neq0)$
17	$\dfrac{1}{\|x\|^\nu}\quad(0<\mathrm{Re}\nu<1)$	$\dfrac{1}{\pi}\sin\dfrac{\nu\pi}{2}\dfrac{\Gamma(1-\nu)}{\|\omega\|^{1-\nu}}$
18	$\dfrac{\mathrm{sh}ax}{\mathrm{sh}\pi x}\quad(-\pi<a<\pi)$	$\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\sin a}{\mathrm{ch}\omega+\cos a}$
19	$\dfrac{\mathrm{ch}ax}{\mathrm{ch}\pi x}\quad(-\pi<a<\pi)$	$\dfrac{1}{\pi}\dfrac{\cos\dfrac{a}{2}\cos\dfrac{\omega}{2}}{\mathrm{ch}\omega+\cos a}$
20	$\exp(\mathrm{i}\omega_0 x)$	$\delta(\omega-\omega_0)$
21	$\cos\omega_0 x$	$\dfrac{1}{2}\{\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\}$
22	$\sin\omega_0 x$	$\dfrac{i}{2}\{\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)\}$
23	$\cos^2\omega_0 x$	$\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{2}\delta(\omega+2\omega_0)+\delta(\omega)+\dfrac{1}{2}\delta(\omega-2\omega_0)\right\}$
24	$\sin^2\omega_0 x$	$\dfrac{1}{2}\left\{-\dfrac{1}{2}\delta(\omega+2\omega_0)+\delta(\omega)-\dfrac{1}{2}\delta(\omega-2\omega_0)\right\}$

续表

No	原函数 $f(x)$	像函数 $F(\omega)$
25	$\lvert\cos\omega_0 x\rvert$	$\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{2}{\pi}\left\{\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2-\omega^2}\right\}\cdot\cos\left(\frac{\pi\omega}{2\omega_0}\right)\delta(\omega-2n\omega_0)$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$
26	$\delta(x)$	$\frac{1}{2\pi}$
27	$\delta(x-x_0)$	$\frac{1}{2\pi}\exp(-\mathrm{i}\omega x_0)$
28	$\delta(x-x_0)+\delta(x+x_0)$	$\frac{1}{\pi}\cos\omega x_0$
29	$\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(x-nx_0)$	$\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x_0}\delta\left(\omega-n\frac{2\pi}{x_0}\right)$
30	1	$\delta(\omega)$
31	$\mathrm{sgn}x$	$-\frac{\mathrm{i}}{\pi\omega}$
32	$H(x)$	$\frac{1}{2\pi}\left\{\pi\delta(\omega)-\frac{\mathrm{i}}{\omega}\right\}$
33	$H(x)\{1-\exp(-ax)\}$	$\frac{1}{2\pi}\left\{\pi\delta(\omega)-\frac{a}{a^2+\omega^2}-\mathrm{i}\frac{a^2}{\omega(a^2+\omega^2)}\right\}$
34	$\begin{cases}1 & \lvert x\rvert>L\\ 0 & \lvert x\rvert<L\end{cases}$	$\frac{1}{\pi}\left\{\pi\delta(\omega)-\frac{\sin\omega L}{\omega}\right\}$
35	$\cos(a\sin\omega_0 x+bx)$	$\frac{1}{2}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\{J_n(a)\delta(\omega-b-n\omega_0)+J_n(a)\delta(\omega+b+n\omega_0)\}$
36	$\cos(a\cos\omega_0 x+bx)$	$\frac{1}{2}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\{\mathrm{i}^n J_n(a)\delta(\omega-b-n\omega_0)+(-\mathrm{i})^n J_n(a)\delta(\omega+b+n\omega_0)\}$
37	$\sin(a\sin\omega_0 x+bx)$	$\frac{\mathrm{i}}{2}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\{-J_n(a)\delta(\omega-b-n\omega_0)+J_n(a)\delta(\omega+b+n\omega_0)\}$

续表

No	原函数 $f(x)$	像函数 $F(\omega)$
38	$\sin(a\cos\omega_0 x + bx)$	$\frac{i}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\{-i^n J_n(a)\delta(\omega-b-n\omega_0)$ $+(-i)^n J_n(a)\delta(\omega+b+n\omega_0)\}$
39	$\exp(-a\cos\omega_0 x)$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n J_n(a)\delta(\omega-n\omega_0)$
40	$\exp(-a\sin\omega_0 x)$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(a)\delta(\omega-n\omega_0)$

二、拉普拉斯变换函数表

No	原函数	像函数
1	1	$\frac{1}{p}$
2	t^n(n 为整数)	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
3	$t^a(a>-1)$	$\frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}$
4	$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{p-\lambda}$
5	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
6	$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
7	$\mathrm{sh}\,\omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
8	$\mathrm{ch}\,\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
9	$e^{-\lambda t}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$
10	$e^{-\lambda t}\cos\omega t$	$\frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$
11	$e^{-\lambda t}t^a$	$\frac{\Gamma(a+1)}{(p+\lambda)^{a+1}}$

续表

No	原函数	像函数
12	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{p}}$
13	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-a^2/4t}$	$\dfrac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}$
14	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{2a\sqrt{t}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{p}}e^{\frac{a^2}{p}}\mathrm{erfc}\left(\dfrac{a}{\sqrt{p}}\right)$
15	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi a}}\sin 2\sqrt{at}$	$\dfrac{1}{p\sqrt{p}}e^{-\frac{a}{p}}$
16	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos 2\sqrt{at}$	$\dfrac{1}{\sqrt{p}}e^{-\frac{a}{p}}$
17	$\mathrm{erf}(\sqrt{at})$	$\dfrac{\sqrt{a}}{p\sqrt{p+a}}$
18	$\mathrm{erfc}\left(\dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\dfrac{1}{p}e^{-a\sqrt{p}}$
19	$e^t\mathrm{erfc}(\sqrt{t})$	$\dfrac{1}{p+\sqrt{p}}$
20	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}-e^t\mathrm{erfc}(\sqrt{t})$	$\dfrac{1}{1+\sqrt{p}}$
21	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-at}+\sqrt{a}\,\mathrm{erf}\sqrt{at}$	$\dfrac{\sqrt{p+a}}{p}$
22	$J_0(t)$	$\dfrac{1}{\sqrt{p^2+1}}$
23	$J_n(t)$	$\dfrac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}$
24	$\dfrac{J_n(at)}{t}$	$\dfrac{1}{na^n}(\sqrt{p^2+a^2}-p)^n$

续表

No	原函数	像函数
25	$e^{-at}I_0(bt)$	$\frac{1}{\sqrt{(p+a)^2-b^2}}$
26	$\lambda^n e^{-\lambda t}I_n(\lambda t)$	$\frac{\{\sqrt{p^2+2\lambda p}-(p+\lambda)\}^n}{\sqrt{p^2+2\lambda p}}$
27	$t^n J_n(t)\left(n>-\frac{1}{2}\right)$	$\frac{2^n\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{(p^2+1)^{n+\frac{1}{2}}}$
28	$J_0(2\sqrt{t})$	$\frac{2}{p}e^{-\frac{1}{p}}$
29	$t^{\frac{n}{2}}J_n(2\sqrt{t})$	$\frac{1}{p^{n+1}}e^{-\frac{1}{p}}$
30	$J_0(a\sqrt{t^2-\tau^2})H(t-\tau)$	$\frac{1}{\sqrt{p^2+a^2}}e^{-\tau\sqrt{p^2+a^2}}$
31	$\frac{J_1(a\sqrt{t^2-\tau^2})}{\sqrt{t^2-\tau^2}}H(t-\tau)$	$\frac{e^{-\tau p}-e^{-\tau\sqrt{p^2+a^2}}}{a\tau}$
32	$\int_t^{\infty}\frac{J_0(t)}{t}dt$	$\frac{1}{p}\ln(p+\sqrt{1+p^2})$
33	$\frac{e^{bt}-e^{at}}{t}$	$\ln\frac{p-a}{p-b}$
34	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\sin\frac{1}{2t}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-\sqrt{p}}\sin\sqrt{p}$
35	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos\frac{1}{2t}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-\sqrt{p}}\cos\sqrt{p}$
36	$\mathrm{si}t$ 即 $-\int_t^{\infty}\frac{\sin\tau}{\tau}d\tau$	$\frac{\pi}{2p}-\frac{\mathrm{arctg}p}{p}$
37	$\mathrm{ci}t$ 即 $-\int_t^{\infty}\frac{\cos\tau}{\tau}d\tau$	$\frac{1}{p}\ln\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$

续表

No	原函数	像函数
38	$S(t)$即$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^t \sin\tau^2 d\tau$	$\frac{1}{2p\sqrt{2}}\frac{\sqrt{p+i}-\sqrt{p-i}}{\sqrt{p^2+1}}$
39	$C(t)$即$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^t \cos\tau^2 d\tau$	$\frac{1}{2p\sqrt{2}}\frac{\sqrt{p+i}-\sqrt{p-i}}{\sqrt{p^2+1}}$
40	$-\mathrm{ei}(-t)$即$\int_t^{\infty}\frac{e^{-\tau}}{\tau}d\tau$	$\frac{1}{p}\ln(1+p)$

三、高斯函数和误差函数

为计算高斯函数$(2/\sqrt{\pi})e^{-x^2}$的数值，可利用它的麦克劳林级数

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[1-\frac{1}{1!}x^2+\frac{1}{2!}x^4-\frac{1}{3!}x^6+\frac{1}{4!}x^8-\cdots\right].$$

为计算误差函数 $\mathrm{erf}x=(2/\sqrt{\pi})\int_0^x e^{-z^2}dz$，可把被积函数展开为麦克劳林级数，然后逐项积分，即

$$\begin{aligned}\mathrm{erf}x&=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-z^2}dz\\&=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x\left[1-\frac{1}{1!}z^2+\frac{1}{2!}z^4-\frac{1}{3!}z^6+\frac{1}{4!}z^8-\cdots\right]dz\\&=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[x-\frac{1}{1!}\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2!}\frac{x^5}{5}-\frac{1}{3!}\frac{x^7}{7}+\frac{1}{4!}\frac{x^9}{9}-\cdots\right].\end{aligned}$$

这样算出的数值早已列成了表格.下面就是简略的“高斯函数表”和“误差函数表”.

x	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$	$\mathrm{erf}x$	x	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$	$\mathrm{erf}x$	x	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$	$\mathrm{erf}x$
0.0	1.1284	0.00000						
0.1	1.1172	0.11246	0.6	0.7872	0.60386	1.1	0.3365	0.88021
0.2	1.0841	0.22270	0.7	0.6913	0.67780	1.2	0.2673	0.91031
0.3	1.0313	0.32863	0.8	0.5950	0.74210	1.3	0.2082	0.93401
0.4	0.9615	0.42839	0.9	0.5020	0.79691	1.4	0.1589	0.95229
0.5	0.8788	0.52050	1.0	0.4151	0.84270	1.5	0.1189	0.96611

续表

x	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$	erf$x$	x	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$	erf$x$	x	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$	erf$x$
1.6	0.0872	0.97635	2.1	0.0137	0.99702	2.6	0.0013	0.99976
1.7	0.0627	0.98379	2.2	0.0089	0.99814	2.7	0.0008	0.99987
1.8	0.0442	0.98909	2.3	0.0057	0.99886	2.8	0.0004	0.99992
1.9	0.0305	0.99279	2.4	0.0036	0.99931	2.9	0.0003	0.99996
2.0	0.0207	0.99532	2.5	0.0022	0.99959	3.0	0.0001	0.99998
						∞	0.000	1.00000

四、勒让德方程的级数解(9.2.7)和(9.2.8)在 $x=\pm 1$ 发散

勒让德方程的级数解(9.2.7)和(9.2.8)在 $x=\pm 1$ 分别成为

$$y_0(\pm 1)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k,$$

$$u_k=\frac{(2k-2-l)(2k-4-l)\cdots(-l)(l+1)(l+3)\cdots(l+2k-1)}{(2k)!},\tag{1}$$

$$y_1(\pm 1)=\pm\sum_{k=0}^{\infty}v_k,$$

$$v_k=\frac{(2k-1-l)(2k-3-l)\cdots(-l)(l+2)(l+4)\cdots(l+2k)}{(2k+1)!}.\tag{2}$$

这里用高斯判别法证明级数(1)和(2)是发散的，而且勒让德方程的任一个解都不可能在 $x=-1$ 和 $x=+1$ 有限.

高斯判别法 正项级数 $\sum_k u_k$，如果 $\lim_{k\to\infty}|u_k/u_{k+1}|=1$，则比值判别法(达朗贝尔判别法)失效，可把前后邻项之比表为

$$\frac{u_k}{u_{k+1}}=1+\frac{\lambda}{k}+\frac{\omega_k}{k^p},\tag{3}$$

其中 $p>1$，而 ω_k 是有界的，

$$\text{如常数 }\lambda\begin{cases}>1\\ \leqslant 1,\end{cases}\text{则级数}\begin{cases}\text{收敛}\\ \text{发散}.\end{cases}$$

高斯判别法的证明请见关于级数的数学书籍.

级数(1)和(2)的比较后的项(k 比较大的项)具有相同的符号，可作正项级数看待. 现在对它们应用正项级数的高斯判别法.

先看(1)，

$$\frac{u_k}{u_{k+1}}=1\Big/\frac{(2k-l)(l+2k+1)}{(2k+2)(2k+1)}=\frac{4k^2+6k+2}{4k^2+2k-l(l+1)}$$

$$=1+\frac{4k+2+l(l+1)}{4k^2+2k-l(l+1)}$$

$$=1+\frac{1}{k}+\frac{l(l+1)(1+1/k)}{4k^2+2k-l(l+1)}$$

$$=1+\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}\left[\frac{l(l+1)(1+1/k)}{4+2/k-l(l+1)/k^2}\right].$$

这已是(3)的形式，其中 $\lambda=1$. 根据高斯判别法，级数是发散的.

再看(2)，

$$\frac{v_k}{v_{k+1}}=1\Big/\frac{(2k+1-l)(l+2k+2)}{(2k+3)(2k+2)}=\frac{4k^2+10k+6}{4k^2+6k-(l-1)(l+2)}$$

$$=1+\frac{4k+6+(l-1)(l+2)}{4k^2+6k-(l-1)(l+2)}$$

$$=1+\frac{1}{k}+\frac{(l-1)(l+1)(1+1/k)}{4k^2+6k-(l-1)(l+2)}$$

$$=1+\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}\left[\frac{(l-1)(l+1)(1+1/k)}{4+6/k-(l-1)(l+2)/k^2}\right].$$

这已是(3)的形式，其中 $\lambda=1$. 根据高斯判别法，级数是发散的.

五、连带勒让德函数

$$\mathrm{P}_l^m(x)=\frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}x^{l+m}}(x^2-1)^l$$

$$\mathrm{P}_l^{-m}(x)=\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(x)$$

$$\mathrm{P}_1^1(x)=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}=\sin\theta$$

$$\mathrm{P}_2^1(x)=3(1-x^2)^{\frac{1}{2}}x=\frac{3}{2}\sin2\theta=3\sin\theta\cos\theta$$

$$\mathrm{P}_2^2(x)=3(1-x^2)=\frac{3}{2}(1-\cos2\theta)=3\sin^2\theta$$

$$\mathrm{P}_3^1(x)=\frac{3}{2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}(5x^2-1)=\frac{3}{8}(\sin\theta+5\sin3\theta)=6\sin\theta-\frac{15}{2}\sin^3\theta$$

$$\mathrm{P}_3^2(x)=15(1-x^2)x=\frac{15}{4}(\cos\theta-\cos3\theta)=15\sin^2\theta\cos\theta$$

$$\mathrm{P}_3^3(x)=15(1-x^2)^{\frac{3}{2}}=\frac{15}{4}(3\sin\theta-\sin3\theta)=15\sin^3\theta$$

$$\mathrm{P}_4^1(x)=\frac{5}{2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}(7x^3-3x)$$

$$=\frac{5}{16}(2\sin 2\theta+7\sin 4\theta)$$

$$=10\sin\theta\cos\theta-\frac{15}{2}\sin^3\theta\cos\theta$$

$$P_4^2(x)=\frac{15}{2}(1-x^2)(7x^2-1)$$

$$=\frac{15}{16}(3+4\cos 2\theta-7\cos 4\theta)=45\sin^2\theta-\frac{105}{2}\sin^4\theta$$

$$P_4^3(x)=105(1-x^2)^{\frac{3}{2}}x=\frac{105}{8}(2\sin 2\theta-\sin 4\theta)=105\sin^3\theta\cos\theta$$

$$P_4^4(x)=105(1-x^2)^2=\frac{105}{8}(3-4\cos 2\theta+\cos 4\theta)=105\sin^4\theta$$

六、贝塞尔函数表

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$
0.00	+1.000	0.000	2.30	+0.056	+0.540	4.60	−0.296	−0.257
0.10	+0.998	+0.050	2.40	+0.002	+0.520	4.70	−0.269	−0.279
0.20	+0.990	+0.100	2.50	−0.048	+0.497	4.80	−0.240	−0.299
0.30	+0.978	+0.148	2.60	−0.097	+0.471	4.90	−0.210	−0.315
0.40	+0.960	+0.196	2.70	−0.142	+0.442	5.00	−0.178	−0.328
0.50	+0.938	+0.24	2.80	0.185	+0.410	5.10	−0.114	0.337
0.60	+0.912	+0.287	2.90	−0.224	+0.375	5.20	−0.110	−0.343
0.70	+0.881	+0.329	3.00	−0.260	+0.339	5.30	−0.076	−0.346
0.80	+0.846	−0.369	3.10	−0.292	+0.301	5.40	−0.041	−0.345
0.90	+0.808	+0.406	3.20	−0.320	+0.261	5.50	−0.007	−0.341
1.00	+0.765	+0.440	3.30	−0.344	+0.221	5.60	+0.027	−0.334
1.10	+0.720	+0.471	3.40	−0.364	+0.179	5.70	+0.060	−0.324
1.20	+0.671	+0.498	3.50	−0.380	+0.137	5.80	+0.092	−0.311
1.30	+0.620	−0.522	3.60	0.392	+0.095	5.90	+0.122	0.295
1.40	+0.567	+0.542	3.70	−0.399	+0.054	6.00	+0.151	−0.277
1.50	+0.512	+0.558	3.80	−0.403	+0.013	6.10	+0.177	−0.256
1.60	+0.455	+0.570	3.90	−0.402	−0.027	6.20	+0.202	−0.233
1.70	+0.398	+0.578	4.00	−0.397	−0.066	6.30	+0.224	−0.208
1.80	+0.340	+0.582	4.10	−0.389	−0.103	6.40	+0.243	−0.182
1.90	+0.282	+0.581	4.20	−0.377	−0.139	6.50	+0.260	−0.154
2.00	+0.224	+0.577	4.30	−0.361	−0.172	6.60	+0.274	−0.125
2.10	+0.167	+0.568	4.40	0.342	−0.203	6.70	+0.285	−0.095
2.20	+0.110	+0.556	4.50	−0.321	−0.231	6.80	+0.293	−0.065

续表

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$
6.90	+0.298	−0.035	8.70	−0.013	+0.270	10.40	−0.243	−0.055
7.00	+0.300	−0.005	8.80	−0.039	+0.264	10.50	−0.237	−0.079
7.10	+0.299	+0.025	8.90	−0.065	+0.256	10.60	−0.228	−0.101
7.20	+0.295	+0.054	9.00	−0.090	+0.245	10.70	−0.216	−0.122
7.30	+0.288	+0.083	9.10	−0.114	+0.232	10.80	−0.203	−0.142
7.40	+0.279	+0.110	9.20	−0.137	+0.217	10.90	−0.188	−0.160
7.50	+0.266	+0.135	9.30	−0.158	+0.200	11.00	−0.171	−0.177
7.60	+0.252	+0.159	9.40	−0.177	+0.182	11.10	0.153	−0.191
7.70	+0.235	+0.181	9.50	−0.194	+0.161	11.20	−0.133	−0.204
7.80	+0.215	+0.201	9.60	−0.209	+0.140	11.30	−0.112	−0.214
7.90	+0.194	+0.219	9.70	−0.222	+0.117	11.40	−0.090	−0.222
8.00	+0.172	+0.235	9.80	−0.232	+0.093	11.50	0.068	0.228
8.10	+0.148	+0.248	9.90	−0.240	+0.068	11.60	−0.045	−0.232
8.20	+0.122	+0.258	10.00	−0.246	+0.043	11.70	−0.021	−0.233
8.30	+0.096	+0.266	10.10	−0.249	+0.018	11.80	−0.002	−0.232
8.40	+0.069	+0.271	10.20	−0.250	−0.007	11.90	+0.025	−0.229
8.50	+0.042	+0.273	10.30	−0.248	−0.031	12.00	+0.048	−0.223
8.60	+0.015	+0.273						

$J_0(x)$和$J_1(x)$的前十个零点$x_n^{(0)}$和$x_n^{(1)}$

n	$x_n^{(0)}$	$\lvert J_1(x_n^{(0)})\rvert$	$x_n^{(1)}$	n	$x_n^{(0)}$	$\lvert J_1(x_n^{(0)})\rvert$	$x_n^{(1)}$
1	2.4048	0.5191	3.8317	6	18.0711	0.1877	19.6159
2	5.5201	0.3403	7.0156	7	21.2116	0.1733	22.7601
3	8.6537	0.2715	10.1735	8	24.3525	0.1617	25.9037
4	11.7915	0.2325	13.3237	9	27.4935	0.1522	29.0468
5	14.9309	0.2065	16.4706	10	30.6346	0.1442	32.1897

方程$J_0(x)/J_1(x)=x/h$的前六个根

h	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0.0	0.0000	3.8317	7.0156	10.1735	13.3237	16.4706
0.01	0.1412	3.8343	7.0170	10.1745	13.3244	16.4712
0.02	0.1995	3.8369	7.0184	10.1754	13.3252	16.4718

续表

h	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0.03	0.2814	3.8421	7.0213	10.1774	13.3267	16.4731
0.06	0.3438	3.8473	7.0241	10.1794	13.3282	16.4743
0.08	0.3960	3.8525	7.0270	10.1813	13.3297	16.4755
0.10	0.4417	3.8577	7.0298	10.1833	13.3312	16.4767
0.15	0.5376	3.8706	7.0369	10.1882	13.3349	16.4797
0.20	0.6170	3.8835	7.0440	10.1931	13.3387	16.4828
0.30	0.7465	3.9091	7.0582	10.2029	13.3462	16.4888
0.40	0.8516	3.9344	7.0723	10.2127	13.3537	16.4949
0.50	0.9408	3.9594	7.0864	10.2225	13.3611	16.5010
0.60	1.0184	3.9841	7.1004	10.2322	13.3686	16.5070
0.70	1.0873	4.0085	7.1143	10.2419	13.3761	16.5131
0.80	1.1490	4.0325	7.1282	10.2519	13.3835	16.5191
0.90	1.2048	4.0562	7.1421	10.2613	13.3910	16.5251
1.0	1.2558	4.0795	7.1558	10.2710	13.3984	16.5312
1.5	1.4569	4.1902	7.2223	10.3188	13.4353	16.5612
2.0	1.5994	4.2910	7.2884	10.3658	13.4719	16.5910
3.0	1.7887	4.4634	7.4103	10.4566	13.5434	16.6499
4.0	1.9081	4.6018	7.5201	10.5423	13.6125	16.7073
5.0	1.9898	4.7131	7.6177	10.6223	13.6786	16.7630
6.0	2.0490	4.8033	7.7039	10.6964	13.7414	16.8168
7.0	2.0937	4.8772	7.7797	10.7646	13.8008	16.8684
8.0	2.1286	4.9384	7.8464	10.8271	13.8566	16.9179
9.0	2.1566	4.9897	7.9051	10.8842	13.9090	16.9650
10.0	2.1795	5.0332	7.9569	10.9363	13.9580	17.0099
15.0	2.2509	5.1773	8.1422	11.1367	14.1576	17.2008
20.0	2.2880	5.2568	8.2534	11.2677	14.2983	17.3442
30.0	2.2361	5.3410	8.3771	11.4221	14.4748	17.5348
40.0	2.3455	5.3846	8.4432	11.5081	14.5774	17.6508
50.0	2.3572	5.4112	8.4840	11.5621	14.6433	17.7272
60.0	2.3651	5.4291	8.5116	11.5990	14.6889	17.7807
80.0	2.3750	5.4516	8.5466	11.6461	14.7475	17.8502
100.0	2.3809	5.4652	8.5678	11.6747	14.7834	17.8931
∞	2.4048	5.5201	8.6537	11.7915	14.9309	18.0711

七、诺伊曼函数

(9.3.24)定义了非整数 ν 阶诺伊曼函数

$$N_\nu(x)=\frac{J_\nu(x)\cos\pi\nu-J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu}.$$

当阶数 ν 为整数 m 时，

$$N_m(x)=\lim_{\nu\to m}N_\nu(x)=\lim_{\nu\to m}\frac{J_\nu(x)\cos\pi\nu-J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu}.$$

运用罗毕达法则，

$$N_m(x)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial\nu}-(-1)^m\frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial\nu}\right]_{\nu\to m} \tag{1}$$

先取 $J_\nu(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}$ 的一般项，对 ν 求导数，

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\left[\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}\right]$$

$$=\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}\left[\ln\frac{x}{2}-\frac{\Gamma'(\nu+k+1)}{\Gamma(\nu+k+1)}\right].$$

令 $\nu\longrightarrow$ 整数 m，运用附录十三的(17)式，

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\left[\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}\right]_{\nu\to m}$$

$$=\frac{(-1)^k}{k!(m+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k}$$

$$\left[\ln\frac{x}{2}-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots+\frac{1}{m+k}\right)+C\right],$$

其中 C 为欧拉常数

$$C=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}-\ln k\right)=0.577216\cdots.$$

这样，

$$\left.\frac{\partial J_\nu}{\partial\nu}\right|_{\nu\to m}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(m+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k}$$

$$\times\left[\ln\frac{x}{2}+C-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m+k}\right)\right]$$

$$=J_m(x)\left[\ln\frac{x}{2}+C\right]$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(m+k)!}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m+k}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k}.$$

在右边的叠加中，令 $k=n-m$ 即 $n=m+k$，则

$$\left.\frac{\partial J_\nu}{\partial\nu}\right|_{\nu\to m}=J_m(x)\left[\ln\frac{x}{2}+C\right]$$

$$-\sum_{n=m}^{\infty}\frac{(-1)^{n-m}}{n!(n-m)!}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2n}. \tag{2}$$

再看 $J_{-\nu}(x)$

$$J_{-\nu}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2n}$$

$$=\frac{(x/2)^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)}\left[1+\frac{1}{1!(\nu-1)}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(n-1)!(\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2(m-1)}\right]$$

$$+\sum_{n=m}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2n}.$$

利用公式 $\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)=\frac{\pi}{\sin\pi\nu}$ 以及 $\Gamma(\nu+1)=\nu\Gamma(\nu)$，

$$J_{-\nu}(x)=\frac{\sin\pi\nu}{\pi}\sum_{n=0}^{m-1}\frac{\Gamma(\nu-n)}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2n}$$

$$+\sum_{n=m}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2n}.$$

仿照上面对 ν 求导，

$$\left.\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial x}\right|_{\nu\to m}=\cos\pi m\sum_{n=0}^{m-1}\frac{\Gamma(m-n)}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2n}$$

$$+\sum_{n=m}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n-m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2n}\left[-\ln\frac{x}{2}+\frac{\Gamma'(n-m+1)}{\Gamma(n-m+1)}\right]$$

$$=(-1)^m\sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{m-n-1!}{n!}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2n}$$

$$-\ln\frac{x}{2}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n-m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2n}$$

$$+\frac{(-1)^m}{m!}\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}\left(\frac{x}{2}\right)^m$$

$$+\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n-m)!}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-m}-C\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2n}.$$

其中利用了 Γ 函数的公式 $\Gamma(k+1)=k!(k=0,1,2,\cdots)$ 和附录十三中的公式(17)，再利用该附录的公式 $\Gamma'(1)/\Gamma(1)=-C$，并在第二个求和式中作指标代换，记 $k=n-m$，则

$$\left.\frac{\partial J_\nu}{\partial x}\right|_{\nu\to -m}=(-1)^m\sum_{n=0}^{m-1}\frac{(m-n-1)!}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2n}$$

$$\left(\ln\frac{x}{2}+C\right)\sum_{n=m}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n-m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2n}$$

$$+\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n-m)!}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-m}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2n}$$

由于

$$\sum_{n=m}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n-m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2n}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+k}}{k!(m+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k}=(-1)^m J_m(x),$$

因此，

$$\left.\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\right|_{\nu\to -m}=(-1)^{m+1}J_m(x)\left(\ln\frac{x}{2}+C\right)+(-1)^m$$

$$\sum_{n=0}^{m-1}\frac{(m-n-1)!}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2n}$$

$$+\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n-m)!}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-m}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2n}. \qquad (3)$$

以(2)和(3)代入(1)，得

$$N_m(x)=\frac{2}{\pi}J_m(x)\left(\ln\frac{x}{2}+C\right)-\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{m-1}\frac{(m-n-1)!}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2n}$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{(-1)^{n-m}}{n!(n-m)!}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2n}$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-m}}{n!(n-m)!}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-m}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2n}. \qquad (4)$$

$J_0(x)N_0(kx)-N_0(x)J_0(kx)=0$的前五个根

k	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1.2	15.7014	31.4126	47.1217	62.8304	78.5385
1.5	6.2702	12.5598	18.8451	25.1294	31.4133
2.0	3.1230	6.2734	9.4182	12.5614	15.7040
2.5	2.0732	4.1773	6.2754	8.3717	10.4672
3.0	1.5485	3.1291	4.7038	6.2767	7.8487
3.5	1.2339	2.5002	3.7608	5.0196	6.2776
4.0	1.0244	2.0809	5.1322	4.1816	5.2301

八、虚宗量贝塞尔函数　虚宗量汉克尔函数

虚宗量贝塞尔函数表

x	$I_0(x)$	$I_1(x)$	x	$I_0(x)$	$I_1(x)$	x	$I_0(x)$	$I_1(x)$
0.0	1.0000	0.0000	3.1	5.2945	4.3262	6.1	73.663	67.319
0.1	1.0025	0.0501	3.2	5.7472	4.7343	6.2	80.718	73.886
0.2	1.0100	0.1005	3.3	6.2426	5.1810	6.3	88.462	81.100
0.3	1.0226	0.1517	3.4	6.7848	5.6701	6.4	96.962	89.026
0.4	1.0404	0.2040	3.5	7.3782	6.2058	6.5	106.29	97.735
0.5	1.0635	0.2579	3.6	8.0277	6.7927	6.6	116.54	107.30
0.6	1.0920	0.3137	3.7	8.7386	7.4357	6.7	127.79	117.82
0.7	1.1263	0.3719	3.8	9.5169	8.1404	6.8	140.14	129.38
0.8	1.1665	0.4329	3.9	10.369	8.9128	6.9	153.70	142.08
0.9	1.2130	0.4971	4.0	11.302	9.7595	7.0	168.59	156.04
1.0	1.2661	0.5652	4.1	12.324	10.688	7.1	184.95	171.38
1.1	1.3262	0.6375	4.2	13.442	11.706	7.2	202.92	188.25
1.2	1.3937	0.7147	4.3	14.668	12.822	7.3	222.66	206.79
1.3	1.4693	0.7973	4.4	16.010	14.046	7.4	244.34	227.17
1.4	1.5534	0.8861	4.5	17.481	15.389	7.5	268.16	249.58
1.5	1.6467	0.9817	4.6	19.093	16.863	7.6	294.33	274.22
1.6	1.7500	1.0848	4.7	20.859	18.479	7.7	323.088	301.31
1.7	1.8640	1.1963	4.8	22.794	20.253	7.8	354.68	331.10
1.8	1.9896	1.3172	4.9	24.915	22.199	7.9	389.41	363.85
1.9	2.1277	1.4482	5.0	27.240	24.336	8.0	427.56	399.87
2.0	2.2796	1.5906	5.1	29.789	26.680	8.1	469.50	439.48
2.1	2.4463	1.7455	5.2	32.584	29.254	8.2	515.58	483.05
2.2	2.6291	1.9141	5.3	35.648	32.080	8.3	566.26	530.96
2.3	2.8296	2.0978	5.4	39.009	35.182	8.4	621.94	583.66
2.4	3.0493	2.2981	5.5	42.695	38.588	8.5	683.16	641.62
2.5	3.2898	2.5167	5.6	46.738	42.328	8.6	750.46	705.38
2.6	3.5533	2.7554	5.7	51.173	46.436	8.7	824.45	775.51
2.7	3.8417	3.0161	5.8	56.038	50.946	8.8	905.80	852.66
2.8	4.1573	3.3011	5.9	61.377	55.900	8.9	995.24	937.54
2.9	4.5027	3.6126	6.0	67.234	61.342	9.0	1093.6	1030.9
3.0	4.8808	3.9534						

虚宗量汉克尔函数表

x	$K_0(x)$	$K_1(x)$	x	$K_0(x)$	$K_1(x)$	x	$K_0(x)$	$K_1(x)$
0.1	2.4271	9.8538	2.1	0.1008	0.1227	4.1	0.0098	0.0111
0.2	1.7527	4.7760	2.2	0.0893	0.1079	4.2	0.0089	0.0099
0.3	1.3725	3.0560	2.3	0.0791	0.0950	4.3	0.0080	0.0089
0.4	1.1145	2.1844	2.4	0.0702	0.0837	4.4	0.0071	0.0079
0.5	0.9244	1.6564	2.5	0.0623	0.0739	4.5	0.0064	0.0071
0.6	0.7775	1.3028	2.6	0.0554	0.0653	4.6	0.0057	0.0063
0.7	0.6605	1.0503	2.7	0.0492	0.0577	4.7	0.0051	0.0056
0.8	0.5653	0.8618	2.8	0.0438	0.0511	4.8	0.0046	0.0051
0.9	0.4867	0.7165	2.9	0.0390	0.0453	4.9	0.0041	0.0045
1.0	0.4210	0.6019	3.0	0.0347	0.0402	5.0	0.0037	0.0040
1.1	0.3656	0.5098	3.1	0.0310	0.0356	5.1	0.0033	0.0036
1.2	0.3185	0.4346	3.2	0.0276	0.0316	5.2	0.0030	0.0032
1.3	0.2782	0.3725	3.3	0.0246	0.0281	5.3	0.0027	0.0029
1.4	0.2437	0.3208	3.4	0.0220	0.0250	5.4	0.0024	0.0026
1.5	0.2138	0.2774	3.5	0.0196	0.0222	5.5	0.0021	0.0023
1.6	0.1880	0.2406	3.6	0.0175	0.0198	5.6	0.0019	0.0021
1.7	0.1655	0.2094	3.7	0.0156	0.0176	5.7	0.0017	0.0019
1.8	0.1459	0.1826	3.8	0.0140	0.0157	5.8	0.0015	0.0017
1.9	0.1288	0.1597	3.9	0.0125	0.0140	5.9	0.0014	0.0015
2.0	0.1139	0.1399	4.0	0.0112	0.0125	6.0	0.0012	0.0013

九、球贝塞尔函数

(一) 球贝塞尔函数的模

在半径为 r_0 的球的内部求解亥姆霍兹方程的定解问题，求得本征函数 $j_l(k_nr)$，其中 k_n^2 是根据齐次边界条件确定的本征值.

计算 $j_l(k_nr)$ 的模 $N_n^{(l)}$，

$$[N_n^{(l)}]^2=\int_0^{r_0}[j_l(k_nr)]^2r^2\mathrm{d}r=\int_0^{r_0}\frac{\pi}{2k_n}[J_{l+1/2}(k_nr)]^2r\mathrm{d}r.$$

这就转化为计算 $J_{l+1/2}(k_nr)$ 的模. 引用(11.2.10)，

$$[N_n^{(l)}]^2=\frac{\pi}{4k_n}\left\{\left[r_0^2-\frac{(2l+1)^2}{4k_n^2}\right][J_{l+1/2}(k_nr_0)]^2+r_0^2[J'_{l+1/2}(k_nr_0)]^2\right\}. \quad (1)$$

进一步的计算取决于边界条件.

第一类齐次边界条件 $j_l(k_nr_0)=0$，即 $J_{l+1/2}(k_nr_0)=0$. 式(1)成为

$$[N_n^{(l)}]^2=\frac{\pi r_0^2}{4k_n}[J'_{l+1/2}(k_n r_0)]^2. \quad (2)$$

第二类齐次边界条件$[\mathrm{d}j_l(k_n r)/\mathrm{d}r]_{r=r_0}=0$，即$k_n J'_{l+1/2}(k_n r_0)-J_{l+1/2}(k_n r_0)/2r_0=0$. 利用此式消去式(1)中的$J'_{l+1/2}(k_n r_0)$，得

$$[N_n^{(l)}]^2=\frac{\pi}{4k_n}\left[r_0^2-\frac{l(l+1)}{k_n^2}\right][J_{l+1/2}(k_n r_0)]^2. \quad (3)$$

第三类齐次边界条件$j_l(k_n r_0)+H[\mathrm{d}j_l(k_n r)/\mathrm{d}r]_{r=r_0}=0$，即

$$\frac{2r_0-H}{2r_0}J_{l+1/2}(k_n r_0)+Hk_n J'_{l+1/2}(k_n r_0)=0.$$

利用此式消去式(1)中的$J'_{l+1/2}(k_n r_0)$，得

$$[N_n^{(l)}]^2=\frac{\pi}{4k_n}\left[r_0^2+\frac{(r_0/H)(r_0/H-1)-l(l+1)}{k_n^2}\right][J_{l+1/2}(k_n r_0)]^2. \quad (4)$$

(二) 球贝塞尔函数表

x	$j_0(x)$	$j_1(x)$	x	$j_0(x)$	$j_1(x)$
0.0	1.00000	0.00000	2.0	0.45465	0.43540
0.1	0.99833	0.03330	2.1	0.41105	0.43614
0.2	0.99335	0.06640	2.2	0.36750	0.43455
0.3	0.98507	0.09910	2.3	0.32422	0.43065
0.4	0.97355	0.13121	2.4	0.28144	0.42452
0.5	0.95885	0.16254	2.5	0.23939	0.41621
0.6	0.94107	0.19289	2.6	0.19827	0.40583
0.7	0.92031	0.22210	2.7	0.15829	0.39347
0.8	0.89670	0.24999	2.8	0.11964	0.37924
0.9	0.87036	0.27639	2.9	0.08250	0.36326
1.0	0.84147	0.30117	3.0	0.04704	0.34568
1.1	0.81019	0.32417	3.1	+0.01341	0.32663
1.2	0.77670	0.34528	3.2	−0.01824	0.30627
1.3	0.74120	0.36438	3.3	−0.04780	0.28475
1.4	0.70389	0.38138	3.4	−0.07516	0.26225
1.5	0.66500	0.39617	3.5	−0.10022	0.23892
1.6	0.62473	0.40871	3.6	−0.12292	0.21495
1.7	0.58333	0.41893	3.7	−0.14320	0.19051
1.8	0.54103	0.42679	3.8	−0.16102	0.16578
1.9	0.49805	0.43229	3.9	−0.17635	0.14092

续表

x	$j_0(x)$	$j_1(x)$	x	$j_0(x)$	$j_1(x)$
4.0	−0.18920	0.11611	7.0	9.3855(−2)	−9.4292(−2)
4.1	−0.19958	0.09152	7.1	1.0267(−1)	−8.1954(−2)
4.2	0.20752	0.06732	7.2	1.1023(−1)	−6.9183(−2)
4.3	−0.21306	0.04366	7.3	1.1650(−1)	−5.6107(−2)
4.4	−0.21627	+0.02070	7.4	1.2145(−1)	−4.2851(−2)
4.5	−0.21723	−0.00143	7.5	1.2507(−1)	−2.9542(−2)
4.6	−0.21602	−0.02258	7.6	1.2736(−1)	−1.6303(−2)
4.7	−0.21275	−0.04263	7.7	1.2833(−1)	−3.2520(−3)
4.8	−0.20753	−0.06146	7.8	1.2802(−1)	+9.4953(−3)
4.9	0.20050	0.07898	7.9	1.2645(−1)	2.1829(−2)
5.0	−0.19178	−0.09508	8.0	1.2367(−1)	3.3646(−2)
5.0	−1.9178(−1)①	−9.5089(−2)	8.1	1.1974(−1)	4.4850(−2)
5.1	−1.8153(−1)	−1.0971(−1)	8.2	1.1472(−1)	5.5351(−2)
5.2	−1.6990(−1)	−1.2277(−1)	8.3	1.0870(−1)	6.5069(−2)
5.3	−1.5703(−1)	−1.3423(−1)	8.4	1.0174(−1)	7.3932(−2)
5.4	−1.4310(−1)	−1.4404(−1)	8.5	9.3940(−2)	8.1877(−2)
5.5	−1.2828(−1)	−1.5217(−1)	8.6	8.5395(−2)	8.8851(−2)
5.6	−1.1273(−1)	−1.5862(−1)	8.7	7.6203(−2)	9.4810(−2)
5.7	−9.6611(−2)	−1.6339(−1)	8.8	6.6468(−2)	9.9723(−2)
5.8	−8.0104(−2)	−1.6649(−1)	8.9	5.6294(−2)	1.0357(−1)
5.9	−6.3369(−2)	−1.6794(−1)	9.0	4.5791(−2)	1.0632(−1)
6.0	−4.6569(−2)	−1.6779(−1)	9.1	3.5066(−2)	1.0800(−1)
6.1	−2.9863(−2)	−1.6609(−1)	9.2	2.4227(−2)	1.0859(−1)
6.2	−1.3402(−2)	−1.6289(−1)	9.3	1.3382(−2)	1.0813(−1)
6.3	+2.6689(−3)	−1.5828(−1)	9.4	+2.6357(−3)	1.0663(−1)
6.4	1.8211(−2)	−1.5234(−1)	9.5	−7.9106(−3)	1.0413(−1)
6.5	3.3095(−2)	−1.4515(−1)	9.6	−1.8159(−2)	1.0068(−1)
6.6	4.7203(−2)	−1.3682(−1)	9.7	−2.8017(−2)	9.6325(−2)
6.7	6.0425(−2)	−1.2746(−1)	9.8	−3.7396(−2)	9.1126(−2)
6.8	7.2664(−2)	−1.1717(−1)	9.9	−4.6216(−2)	8.5149(−2)
6.9	8.[illegible]932(−2)	1.0607(−1)	10.0	−5.4402(−2)	7.8467(−2)

① $(-n)$表示$\times 10^{-n}$，例如：$-1.9178(-1)$即-1.9178×10^{-1}.

（三）球贝塞尔函数的零点表

$j_0(x)$和 $j_1(x)$的前十个零点 $x_n^{(0)}$、$x_n^{(1)}$

n	$x_n^{(0)}$	$x_n^{(1)}$	n	$x_n^{(0)}$	$x_n^{(1)}$
1	3.141593	4.493409	6	18.849556	20.271303
2	6.283185	7.725252	7	21.991149	23.519452
3	9.424778	10.904122	8	25.132741	26.666054
4	12.566371	14.066194	9	28.274334	29.811599
5	15.707963	17.220755	10	31.415927	32.956389

（四）球贝塞尔函数的导数的零点表

$j_1'(x)$的前七个零点，即方程 $xj_0(x)=2j_1(x)$的前七个根 $x_n^{(1)}$

n	$x_n^{(1)}$	n	$x_n^{(1)}$
1	−0.36741	5	−0.19195
2	+0.28469	6	+0.17657
3	−0.24062	7	−0.16437
4	+0.21221		

十、埃尔米特多项式

常微分方程

$$y''-2xy'+\lambda y=0 \quad (-\infty<x<\infty) \tag{1}$$

叫作埃尔米特方程.

$x_0=0$是埃尔米特方程的常点. 在 $x_0=0$的邻域上的级数解是

$$y(x)=c_0y_0(x)+c_1y_1(x), \tag{2}$$

$$\begin{cases} y_0(x)=1+\dfrac{-\lambda}{2!}x^2+\dfrac{-\lambda(4-\lambda)}{4!}x^4+\cdots+ \\ \qquad\qquad \dfrac{(-\lambda)(4-\lambda)\cdots(4n-4-\lambda)}{(2n)!}x^{2n}+\cdots, \\ y_1(x)=x+\dfrac{2-\lambda}{3!}x^3+\dfrac{(2-\lambda)(6-\lambda)}{5!}x^5+\cdots+ \\ \qquad\qquad \dfrac{(2-\lambda)(6-\lambda)\cdots(4n-2-\lambda)}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\cdots. \end{cases} \tag{3}$$

级数的收敛半径为无限大.

如 λ 为4的倍数，则 $y_0(x)$退化为$\frac{1}{2}\lambda$次多项式. 如 λ 为偶数但不是4的倍数，则 $y_1(x)$退化为$\frac{1}{2}\lambda$次多项式. 用适当的常数乘这些多项式使最高幂项成为$(2x)^n$，就叫作**埃尔米特多项式**，记作 $H_n(x)$.

于 $\lambda=0$，　有 $H_0=1$，

$\lambda=2$，　$H_1=2x$.

$\lambda=4$，　$H_2=4x^2-2$.

$\lambda=6$，　$H_3=8x^3-12x$.

$\lambda=8$，　$H_4=16x^4-48x^2+12$.

$\lambda=10$，　$H_5=32x^5-160x^3+120x$.

$\lambda=12$，　$H_6=64x^6-480x^4+720x-120$.

函数 $\Psi(t,x)=e^{2tx-t^2}$在 $t_0=0$的邻域上是解析的，可在 $t_0=0$的邻域上展开为泰勒级数

$$\Psi(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x)\frac{t^n}{n!}. \tag{4}$$

现在来证明(4)式里的 $H_n(x)$正是埃尔米特多项式. 事实上，容易验证 $\Psi(t,x)$满足

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x}=2t\Psi,$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}+2(t-x)\Psi=0.$$

以展开式(4)代入，即成为

$$\sum_{n=0}^{\infty}H_n'(x)\frac{t^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}2H_n(x)\frac{t^{n+1}}{n!},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}nH_n(x)\frac{t^{n-1}}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}2H_n(x)\frac{t^{n+1}}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}2xH_n(x)\frac{t^n}{n!}=0$$

比较两边的同幂项，得

$$H_n'(x)=2nH_{n-1}(x), \tag{5}$$

$$H_{n+1}(x)-2xH_n(x)+2nH_{n-1}(x)=0. \tag{6}$$

把(6)式里的 n 全换为 $n-1$，得

$$H_n(x)-2xH_{n-1}(x)+2(n-1)H_{n-2}(x)=0.$$

利用(5)把上式改写为

$$\mathrm{H}_n(x)-2x\frac{1}{2n}\mathrm{H}_n'(x)+2(n-1)\frac{1}{2(n-1)}\mathrm{H}_{n-1}'=0.$$

再利用(5)进一步改写，

$$\mathrm{H}_n(x)-\frac{x}{n}\mathrm{H}_n'(x)+\frac{1}{2n}\mathrm{H}_n''(x)=0,$$

这正是埃尔米特方程(1). 埃尔米特方程的多项式解只能是埃尔米特多项式，最多相差某个常数因子. 经具体验算，得知并不差常数因子. (4)里的 $\mathrm{H}_n(x)$ 确是埃尔米特多项式. 函数

$$\Psi(t,x)=\mathrm{e}^{2tx-t^2}$$

因而叫作埃尔米特多项式的**母函数**.

(6)式是埃尔米特多项式的**递推公式**.

既然 $\frac{1}{n!}\mathrm{H}_n(x)$ 是 $\Psi(t,x)$ 的泰勒展开的系数，那就有

$$\mathrm{H}_n(x)=\left.\frac{\partial^n\Psi}{\partial t^n}\right|_{t=0}=(-1)^n\mathrm{e}^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{e}^{-x^2}. \tag{7}$$

上式利用了§2.4习题1. 这就是埃尔米特多项式的**微分表示式**.

埃尔米特方程(1)可改写为施图姆-刘维尔型

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\mathrm{e}^{-x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\lambda\mathrm{e}^{-x^2}y=0\quad(-\infty<x<\infty). \tag{8}$$

作为施图姆-刘维尔本征值问题的正交关系(9.4.12)的特例，埃尔米特多项式在区间 $-\infty<x<\infty$ **上带权重** e^{-x^2} **正交**，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{H}_m(x)\mathrm{H}_n(x)\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=0.\quad(m\neq n) \tag{9}$$

埃尔米特多项式 $\mathrm{H}_n(x)$ 的**模** N_n 可借助微分表示式(7)并累次分部积分而算得，

$$N_n^2=\int_{-\infty}^{\infty}[\mathrm{H}_n(x)]^2\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=2^n n!\sqrt{\pi}. \tag{10}$$

根据施图姆-刘维尔本征值问题的性质④[见§9.4]，在区间 $-\infty<x<\infty$ 上，以埃尔米特多项式为基本函数族，可把函数 $f(x)$ 展开为

$$\begin{cases}f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n\mathrm{H}_n(x),\\ f_n=\dfrac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{H}_n(x)\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x.\end{cases} \tag{11}$$

十一、拉盖尔多项式

常微分方程

$$xy''+(1-x)y'+\lambda y=0 \quad (0<x<\infty) \tag{1}$$

叫作**拉盖尔方程**.

$x_0=0$是拉盖尔方程的正则奇点.在$x_0=0$及其邻域上为有限的级数解是

$$y(x)=a_0\Big[1+\frac{-\lambda}{(1!)^2}x+\frac{(-\lambda)(1-\lambda)}{(2!)^2}x^2+\cdots$$
$$+\frac{(-\lambda)(1-\lambda)\cdots(k-1-\lambda)}{(k!)^2}x^k+\cdots\Big]. \tag{2}$$

级数的收敛半径为无限大.

如λ为整数,解$y(x)$退化为λ次多项式.用适当的常数乘这些多项式使最高幂项成为$(-x)^n$,就叫作**拉盖尔多项式**,记作$L_n(x)$.

于 $\lambda=0$,有$L_0(x)=1$.

$\lambda=1$, $L_1(x)=-x+1$.

$\lambda=2$, $L_2(x)=x^2-4x+2$.

$\lambda=3$, $L_3(x)=-x^3+9x^2-18x+6$.

$\lambda=4$, $L_4(x)=x^4-16x^3+72x^2-96x+24$.

$\lambda=5$, $L_5(x)=-x^5+25x^4-200x^3+600x^2-600x+120$.

函数$\Psi(t,x)=\dfrac{e^{-xt/(1-t)}}{1-t}$在$t_0=0$的邻域上是解析的,可在$t_0=0$的邻域上展开为泰勒级数

$$\Psi(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}L_n(x)\frac{t^n}{n!}. \tag{3}$$

现在来证明(3)式里的$L_n(x)$正是拉盖尔多项式.既然(3)式里的$\dfrac{1}{n!}L_n(x)$是$\Psi(t,x)$的泰勒展开的系数,那就有

$$L_n(x)=\frac{\partial^n\Psi}{\partial t^n}\bigg|_{t=0}=e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x}). \tag{4}$$

上式利用了§2.4习题2.我们只需证明(4)式正是拉盖尔多项式就行了.令

$$z=x^ne^{-x},$$

容易验证,z满足

$$xz'+(x-n)z=0.$$

上式对x求导$n+1$次,

$$xz^{[n+2]}+(x+1)z^{[n+1]}+(n+1)z^{[n]}=0.$$

这是说，$u\equiv z^{[n]}$满足

$$xu''+(x+1)u'+(n+1)u=0.$$

参照(4)式，作函数变换 $u(x)=e^{-x}L(x)$，得 $L(x)$所满足的方程

$$xL''+(1-x)L'+nL=0,$$

这正是拉盖尔方程(1). 拉盖尔方程的多项式解只能是拉盖尔多项式，最多相差某个常数因子. 经具体验算，得知并不差常数因子. (3)和(4)里的 $L_n(x)$确是拉盖尔多项式. 函数

$$\Psi(t,x)=\frac{e^{-xt/(1-t)}}{1-t}$$

因而叫作拉盖尔多项式的**母函数**.

(4)式是拉盖尔多项式的**微分表示式**.

拉盖尔方程(1)可改写为施图姆-刘维尔型

$$\frac{d}{dx}\left[xe^{-x}\frac{dy}{dx}\right]+\lambda e^{-x}y=0. \quad (0<x<\infty) \tag{5}$$

作为施图姆-刘维尔本征值问题的正交关系(9.4.12)的特例，拉盖尔多项式在区间$0<x<\infty$上**带权重** e^{-x}**正交**，

$$\int_0^\infty L_m(x)L_n(x)e^{-x}dx=0. \quad (m\neq n) \tag{6}$$

拉盖尔多项式的模 N_n 可借助微分表示式(4)并累次分部积分而算得，

$$N_n^2=\int_0^\infty [L_n(x)]^2e^{-x}dx=(n!)^2. \tag{7}$$

根据施图姆-刘维尔本征值问题的性质④[见§9.4]，在区间$0<x<\infty$上，以拉盖尔多项式为基本函数族，可把函数 $f(x)$展开为

$$\begin{cases} f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f_nL_n(x), \\ f_n=\frac{1}{(n!)^2}\int_0^\infty f(x)L_n(x)e^{-x}dx. \end{cases} \tag{8}$$

十二、方程 $x+\eta \operatorname{tg} x=0$的前六个根

η	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	1.5708	4.7124	7.8540	10.9956	14.1372	17.2788
0.1	1.6320	4.7335	7.8667	11.0047	14.1443	17.2845

续表

η	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0.2	1.6887	4.7544	7.8794	11.0137	14.1513	17.2903
0.3	1.7414	4.7751	7.8920	11.0228	14.1584	17.2961
0.4	1.7906	4.7956	7.9046	11.0318	14.1654	17.3019
0.5	1.8366	4.8158	7.9171	11.0409	14.1724	17.3076
0.6	1.8798	4.8358	7.9295	11.0498	14.1795	17.3134
0.7	1.9203	4.8556	7.9419	11.0588	14.1865	17.3192
0.8	1.9586	4.8751	7.9542	11.0677	14.1935	17.3249
0.9	1.9947	4.8943	7.9665	11.0767	14.2005	17.3306
1.0	2.0288	4.9132	7.9787	11.0856	14.2075	17.3364
1.5	2.1746	5.0037	8.0382	11.1296	14.2421	17.3649
2.0	2.2889	5.0870	8.0965	11.1727	14.2764	17.3932
3.0	2.4557	5.2329	8.2045	11.2560	14.3434	17.4490
4.0	2.5704	5.3540	8.3029	11.3349	14.4080	17.5034
5.0	2.6537	5.4544	8.3914	11.4086	14.4699	17.5562
6.0	2.7165	5.5378	8.4703	11.4773	14.5288	17.6072
7.0	2.7654	5.6078	8.5406	11.5408	14.5847	17.6562
8.0	2.8044	5.6669	8.6031	11.5994	14.6374	17.7032
9.0	2.8363	5.7172	8.6587	11.6532	14.6860	17.7481
10.0	2.8628	5.7606	8.7083	11.7027	14.7335	17.7908
15.0	2.9476	5.9080	8.8898	11.8959	14.9251	17.9742
20.0	2.9930	5.9921	9.0019	12.0250	15.0625	18.1136
30.0	3.0406	6.0831	9.1294	12.1807	15.2380	18.3018
40.0	3.0651	6.1311	9.1986	12.2688	15.3417	18.4180
50.0	3.0801	6.1606	9.2420	12.3247	15.4090	18.4953
60.0	3.0901	6.1805	9.2715	12.3632	15.4559	18.5497
80.0	3.1028	6.2058	9.3089	12.4124	15.5164	18.6209
100.0	3.1105	6.2211	9.3317	12.4426	15.5537	18.6650
∞	3.1416	6.2832	9.4248	12.5664	15.7080	18.8496

十三、Γ函数(第二类欧拉积分)

一般的“高等数学”教材都讲到实变数 x 的 Γ 函数

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt \qquad (x>0). \tag{1}$$

上式右边的积分收敛条件是 $x>0$,所以(1)式只定义了 $x>0$的 Γ 函数.根据

定义(1),

$$\begin{cases}\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-t}dt=-e^{-t}\Big|_0^\infty=1,\\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}dt=\int_0^\infty e^{-t}2d(\sqrt{t})\\ \qquad=2\int_0^\infty e^{-(\sqrt{t})^2}d(\sqrt{t})=\sqrt{\pi}.\end{cases} \tag{2}$$

对 $\Gamma(x+1)=\int_0^\infty e^{-t}t^x dt$ 进行分部积分,可得递推公式

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x),\text{即 }\Gamma(x)=\frac{1}{x}\Gamma(x+1). \tag{3}$$

如 x 为正整数 n,则从(3)式得

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=\cdots=n!\Gamma(1)=n! \tag{4}$$

这样看来,Γ 函数是阶乘的推广.

递推公式本来是在 $x>0$的情况下推导出来的.通常又用它把 Γ 函数向 $x<0$的区域延拓.例如,对于区间$(-1,0)$上的 x,定义

$$\Gamma(x)=\frac{1}{x}\Gamma(x+1),$$

$x+1$在区间$(0,1)$上,上式右边的 $\Gamma(x+1)$按(1)式是有定义的.再如,对于区间$(-2,-1)$上的 x,定义

$$\Gamma(x)=\frac{1}{x}\Gamma(x+1)=\frac{1}{x(x+1)}\Gamma(x+2),$$

$x+2$在区间$(0,1)$上,上式右边的 $\Gamma(x+2)$按(1)式是有定义的.照此类推,对于区间$(-n,-n+1)$上的 x,定义

$$\Gamma(x)=\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}\Gamma(x+n), \tag{5}$$

$x+n$ 在区间$(0,1)$上,上式右边的 $\Gamma(x+n)$按(1)式是有定义的.值得注意的是,按照(3)式,

$$\Gamma(0)=\frac{1}{0}\Gamma(1)=\infty.$$

由此递推,$\Gamma(-1)$,$\Gamma(-2)$,…全部是∞.总之,凡 $x=0$或负整数,$\Gamma(x)$就是∞.

式(1),(3)和(5)定义了实变数 x 的 Γ 函数,换句话说,在复数 z 平面的实轴上定义了 Γ 函数.这定义可以延拓到整个复数平面,

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt\quad(\mathrm{Re}z>0), \tag{6}$$

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z),\tag{7}$$

$$\Gamma(z)=\frac{1}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}\Gamma(z+n)\quad(\mathrm{Re}(z+n)>0).\tag{8}$$

零和负整数是 $\Gamma(z)$ 的单极点.事实上,

$$\Gamma(z)|_{z\to 0}=\left[\frac{1}{z}\Gamma(z+1)\right]_{z\to 0}\sim\frac{1}{z}=(-1)^0\frac{1}{0!}\frac{1}{z},$$

$$\Gamma(z)|_{z\to -1}=\left[\frac{1}{z(z+1)}\Gamma(z+2)\right]_{z\to -1}\sim\frac{1}{(-1)(z+1)}=(-1)^1\frac{1}{1!}\frac{1}{z+1},$$

$$\Gamma(z)|_{z\to -2}=\left[\frac{1}{z(z+1)(z+2)}\Gamma(z+3)\right]_{z\to -2}$$

$$\sim\frac{1}{(-2)(-1)(z+2)}=(-1)^2\frac{1}{2!}\frac{1}{z+2},$$

……

$$\Gamma(z)|_{z\to -n}=\left[\frac{1}{z(z+1)\cdots(z+n)}\Gamma(z+n)\right]_{z\to -n}$$

$$\sim\frac{1}{(-n)(-n+1)\cdots(-1)(z+n)}=(-1)^n\frac{1}{n!}\frac{1}{z+n},$$

可见 $-n$($n=0$或正整数)确是 $\Gamma(z)$ 的单极点,而且留数为 $(-1)^n\frac{1}{n!}$.除去这些单极点之外,$\Gamma(z)$ 是处处解析的.

关于 Γ 函数的常用公式有

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z},\tag{9}$$

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=-C-\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+z}\right),\tag{10}$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=ze^{Cz}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\tag{11}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{1\cdot 2\cdots n}n^{-z}.\tag{12}$$

$$\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z)=2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right),\tag{13}$$

其中 C 是欧拉常数.下面是这些公式的推导.

在定义(6)之中,令 $t=u^2$,可把定义改写成

$$\Gamma(z)=2\int_0^{\infty}e^{-u^2}u^{2z-1}\mathrm{d}u.\tag{14}$$

暂且设 z 是实数且$0<z<1$,则

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-(x^2+y^2)}x^{2z-1}y^{-(2z-1)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

把“直角坐标”x 和 y 换为“极坐标”ρ 和 φ,

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=4\int_0^{\infty}(\mathrm{ctg}\varphi)^{2z-1}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\rho^2}\frac{1}{2}\mathrm{d}\rho^2$$

$$=2\int_0^{\infty}(\mathrm{ctg}\varphi)^{2z-1}\mathrm{d}\varphi.$$

在右边的积分中引用新的积分变数 $x=\mathrm{ctg}^2\varphi$,则

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\int_0^{\infty}\frac{x^{z-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sin\pi z}.$$

上式最后一步引用了§4.3例1.这就是公式(9),只不过它是在$0<z<1$的条件下导出的.根据§3.4关于解析延拓的唯一性,可把公式(9)延拓到整个复数平面而取消$0<z<1$的限制.

利用公式(9)可以证明 Γ 函数在全平面上无零点,事实上,假如某个 z_0 是 $\Gamma(z)$的零点,则$1-z_0$必是 $\Gamma(1-z)$的极点,即$1-z_0$必是零或负整数,换句话说 z_0必是正整数,但(4)式已指出,对于正整数 z_0,$\Gamma(z_0)=z_0!$,并不是零.由此可见 $\Gamma(z)$没有零点.

$\Gamma(z)$只有零和负整数这样的单极点.当 z 逼近单极点“$-n$”(n 是零或正整数)时,$\Gamma(z)|_{z\to-n}\sim(-1)^n\frac{1}{n!}\frac{1}{z+n}$,

$$\Gamma'(z)|_{z\to-n}\sim(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}\frac{1}{(z+n)^2},$$

$$[\Gamma'(z)/\Gamma(z)]_{z\to-n}\sim-\frac{1}{z+n}.$$

因此可以设想

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z+n}\right)+\text{常数}. \tag{15}$$

(15)式的证明大致如下:取圆 C_k,使 $\Gamma(z)$的单极点 $z=0,-1,-2,\cdots,-k$ 在圆 C_k 的内部.对圆 C_k 上的解析函数 $g_k(z)=\Gamma'(z)/\Gamma(z)-\sum_{n=0}^{k}[-1/(z+n)]$应用柯西公式(2.4.1)令 $k\to\infty$,用刘维尔定理(见§2.4)证明$\lim_{k\to\infty}g_k(z)$是常数.

以 $z=1$代入(15)以确定常数,结果得到

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z+n}\right)$$

$$=-C-\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{z+n}\right).$$

这就是公式(10),其中欧拉常数 C 即 $-\Gamma'(1)/\Gamma(1)$,

$$C=-\Gamma'(1)/\Gamma(1). \tag{16}$$

公式(10)的一个特例是 $z=$ 整数 M 的情况

$$\frac{\Gamma'(M)}{\Gamma(M)}=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{M-1}\right)-C \quad (M\text{ 为整数}). \tag{17}$$

附录七用到过这个公式.

拿公式(10)从1到 z 积分(积分下限不取"零"而取1,这是因为 $\Gamma(0)=\infty$),得

$$\ln\Gamma(z)=-C(z-1)-\ln z+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{z}{n}-\ln(z+n)\right]-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\ln(n+1)\right]. \tag{18}$$

这式显得相当累赘,现在想个变通办法.考虑函数 $\Gamma(z+1)$,$z=0$不是它的奇点,负整数是它的单极点.于是,代替(15)的是

$$\frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{z+n}\right)+\text{常数}.$$

以 $z=0$代入上式以确定常数,结果得到

$$\frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)}=-C+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{z+n}\right).$$

拿上式从0到 z 积分(这次积分下限可取"零"了),得

$$\ln\Gamma(z+1)=-Cz+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{z}{n}-\ln(z+n)\right]+\sum_{n=1}^{\infty}\ln n.$$

从递推公式 $\Gamma(z)=\Gamma(z+1)/z$ 知 $\ln\Gamma(z)=\ln\Gamma(z+1)-\ln z$,
因而

$$\ln\Gamma(z)=-Cz-\ln z+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{z}{n}-\ln(z+n)\right]+\sum_{n=1}^{\infty}\ln n. \tag{19}$$

(19)式比(18)简洁得多.比较(18)和(19)还可得欧拉常数 C 的值

$$\begin{aligned}C&=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\ln(n+1)-\ln n\right]=\lim_{k\to\infty}\left[\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{k}\ln\frac{n+1}{n}\right]\\&=\lim_{k\to\infty}\left[\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}-\ln\prod_{n=1}^{k}\frac{n+1}{n}\right]=\lim_{k\to\infty}\left[\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}-\ln(k+1)\right]\\&=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}-\ln k\right)+\lim_{k\to\infty}\ln\frac{k}{k+1}\\&=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}-\ln k\right)=0.577216\cdots\cdots.\end{aligned} \tag{20}$$

(19)可以改写为

$$\Gamma(z)=\frac{1}{z}e^{-Cz}\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+z}\right)e^{z/n},$$

通常采用上式的倒数形式，即

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=ze^{Cz}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}.$$

这就是公式(11). 上面这个式子即

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=\lim_{k\to\infty}ze^{Cz}\frac{z+1}{1}\cdot\frac{z+2}{2}\cdots\frac{z+k}{k}e^{-z\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{k}\right)}.$$

把 C 的表示式(20)代入上式，得

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=\lim_{k\to\infty}ze^{-z\ln k}\frac{z+1}{1}\cdot\frac{z+2}{2}\cdots\frac{z+k}{k}$$
$$=\lim_{k\to\infty}\frac{z(z+1)(z+2)\cdots(z+k)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}k^{-z}.$$

这就是公式(12). 现在用公式(12)来证明公式(13). 把 $\Gamma(z)$和 $\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)$ 按(12)式写出，又把 $\Gamma(2z)$也按(12)写出，但其中的 k 改为$2k$，于是

$$\frac{2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2z)}$$
$$=\lim_{k\to\infty}\frac{2^{2z-1}(k!)^2 2z(2z+1)\cdots(2z+2k)}{(2k)!z\left(z+\frac{1}{2}\right)(z+1)\left(z+\frac{3}{2}\right)\cdots(z+k)\left(z+k+\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{k^{2z+\frac{1}{2}}}{(2k)^{2z}}$$
$$=\lim_{k\to\infty}\frac{2^{k-1}(k!)^2}{(2k)!\sqrt{k}}\cdot\lim_{k\to\infty}\frac{k}{2z+2k+1}=\lim_{k\to\infty}\frac{2^{k-2}(k!)^2}{(2k)!\sqrt{k}}.$$

既然右边跟 z 无关，可见得左边实际上也跟 z 无关. 在左边置 $z=\frac{1}{2}$，得

$$\frac{2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2z)}=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

这就是公式(13).

x 很大的 $\Gamma(x)$的渐近公式是

$$\Gamma(x)\sim x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}\sqrt{2\pi},$$

$$\ln\Gamma(x)\sim\left(x-\frac{1}{2}\right)\ln x-x+\frac{1}{2}\ln(2\pi). \qquad (21)$$

这叫做**斯特令公式**. 斯特令公式的一个较粗略的近似是

$$\Gamma(x)\sim(x/e)^x,\quad \ln\Gamma(x)\sim x(\ln x-1).$$

最后介绍 β **函数**(**第一类欧拉积分**),它的定义是

$$B(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\mathrm{d}t. \tag{22}$$

用定义(14),

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-(x^2+y^2)}x^{2p-1}y^{2q-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

把"直角坐标"x 和 y 换为"极坐标"ρ 和 φ,

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=4\int_0^{\infty}e^{-\rho^2}\rho^{2p+2q-1}\mathrm{d}\rho\int_0^{\pi/2}\sin^{2p-1}\varphi\cos^{2q-1}\varphi\mathrm{d}\varphi$$

按照定义(14),上式即

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=2\Gamma(p+q)\int_0^{\pi/2}\sin^{2p-1}\varphi\cos^{2q-1}\varphi\,\mathrm{d}\varphi.$$

在上式右边把积分变数改为 t,$t=\sin^2\varphi$,则

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=\Gamma(p+q)\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\mathrm{d}t,$$

即

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{23}$$

习 题 答 案

§1.1.1.（1）以原点为圆心而半径为2的圆及其内部，

（2）a 与 b 的连线的垂直平分线，

（3）$x>\frac{1}{2}$的半平面，

（4）抛物线 y^2-1-2x 及其内部，

（5）射线 $\varphi=\alpha$ 与 $\varphi=\beta$，直线 $x=a$ 与 $x=b$ 所围成的梯形，

（6）左半平面 $x<0$，但除去圆$(x+1)^2+y^2=2$及其内部，

（7）右半平面 $x\geqslant 0$，

（8）圆$(x-1/4)^2+y^2=1/16$，

（9）双曲线 $x^2-y^2=a^2$，

（10）平行四边形对角线平方和等于两邻边平方和的两倍，

2.（1）$e^{i\pi/2}, \cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2)$，

（2）$e^{i\pi}, \cos\pi+i\sin\pi$，

（3）$2e^{i\pi/3}, 2[\cos(\pi/3)+i\sin(\pi/3)]$，

（4）$[2\sin(\alpha/2)]e^{i\operatorname{arctg}[\operatorname{ctg}(\alpha/2)]}$，

（5）$(x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3), \rho^3e^{i3\varphi}, \rho^3(\cos3\varphi+i\sin3\varphi)$，

（6）$ee^i, e(\cos1+i\sin1)$，

（7）$-i, e^{i3\pi/2}, \cos(3\pi/2)+i\sin(3\pi/2)$.

3.（1）$\left(\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}+a}+i\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a}\right)\sqrt{2}/2$，

（2）$e^{i(\pi/6+2k\pi/3)}$，

（3）$e^{-\pi/2-2k\pi}$，

（4）$e^{\pi/2+2k\pi}$，

（5）$\cos^5\varphi-10\cos^3\varphi\sin^2\varphi+5\cos\varphi\sin^4\varphi$，

（6）$5\cos^4\varphi\sin\varphi-10\cos^2\varphi\sin^3\varphi+\sin^5\varphi$

（7）$\left[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi-\sin\frac{\varphi}{2}\right]\Big/2\sin\frac{\varphi}{2}$.

（8）$\left[\cos\frac{\varphi}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi\right]\Big/2\sin\frac{\varphi}{2}$.

§ 1.2.2. (1) $\frac{1}{2}(e^{b}+e^{-b})\sin a+i\frac{1}{2}(e^{b}-e^{-b})\cos a$,

(2) $\frac{1}{2}(e^{-b}+e^{b})\cos a+i\frac{1}{2}(e^{-b}-e^{b})\sin a$,

(3) $i(2n+1)\pi$,

(4) 1,

(5) $\mathrm{ch}x$,

(6) $i\,\mathrm{sh}x$,

(7) $\cos x$,

(8) $i\sin x$,

(9) $e^{-ay-\frac{1}{2}b(e^{-y}-e^{y})\cos x}$.

3. $\frac{1}{2}\pi+2n\pi-i\ln(2\pm\sqrt{3})$.

§ 1.4.2. (1) $-ie^{z}+iC$,　　(2) ze^{z},

(3) $\frac{2\sin 2x-i(e^{2y}-e^{-2y})}{e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2x}$ 即 $\mathrm{ctg}z$,

(4) $1/2-1/z$,

(5) $1/z^2$,

(6) $z^2(1-i/2)$,

(7) z^3,

(8) $z^3(1-2i)$,

(9) z^4,

(10) $\ln z$,

(11) $-i\ln z$.

3. $\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0$, $\frac{\rho}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial v}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}=0$, 即 (1.4.2) 和 (1.4.3)在极坐标系中的表示式,亦即极坐标系中的拉普拉斯方程.

§ 1.5.1. 在点(2,−1)跟直线 $x=2$相切以及跟直线 $y=-1$相切的圆族.

2. $C_1\ln z+(C_2+iC_3)$.

3. $C_1\ln z+C_2$.

4. $-C_1/z+(C_2+iC_3)$.

5. $\sigma/2\pi R$(高斯制).

6. 这两直线各交复数平面于一点,取两交点连线为实轴,取连线中点为原点,参照第3题复势$2q\ln[(z+a)/(z-a)]$,电力线为圆族 x^2+

$(y-C_1a)^2=a^2(1+1/C_1^2)$，等势线为圆族$[x-a(C_2+1)/(C_2-1)]^2+y^2=4C_2a^2/(C_2-1)^2$.

§1.6.(1) 一阶支点 $z=a$ 和 $z=\infty$. 黎曼面同于图3b，但原点 $z=0$应代之以 $z=a$.

(2) 一阶支点 $z=a$ 和 $z=b$. 黎曼面有两叶，在每一叶上从 $z=a$ 到 $z=b$ 作切割，切割下岸连接于第二叶的上岸，第二叶的下岸则连接于第一叶的上岸。

(3) 无限阶支点 $z=0$和 $z=\infty$. 黎曼面有无限多叶，在每一叶上从 $z=0$到 $z=\infty$作切割，每一叶的切割下岸连接于下一叶的上岸。

(4) 同(3)，但以 $z=a$ 代替 $z=0$.

§3.2.3.(1) $|z-\mathrm{i}|=1$. (2) $|z-2|=1$.

(3) $|z|<\infty$；只要 z 是有限的，这幂级数就收敛.

(4) $|z|=\mathrm{e}$.

(5) $|z-3|=0$；只要 $z\neq3$，这幂级数就发散.

4.(1) 和(2) 至少等于 R_1和 R_2中间较小的一个.

(3) R_1R_2. (4) R_1/R_2.

§3.3.(1) 主值为 $z-\frac{1}{3}z^3+\frac{1}{5}z^5-\frac{1}{7}z^7+\cdots$.

(2) $\sqrt[3]{\mathrm{i}}\left\{1+\frac{1}{1!\mathrm{i}}\frac{1}{3}(z-\mathrm{i})-\frac{1}{2!\mathrm{i}^2}\cdot\frac{2}{3^2}(z-\mathrm{i})^2+\frac{1}{3!\mathrm{i}^3}\cdot\frac{2\cdot5}{3^3}(z-\mathrm{i})^3-\frac{1}{4!\mathrm{i}^4}\cdot\frac{2\cdot5\cdot8}{3^4}(z-\mathrm{i})^4+\cdots\right\}$.

(3) $\ln\mathrm{i}+\frac{z-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}-\frac{(z-\mathrm{i})^2}{2\mathrm{i}^2}+\frac{(z-\mathrm{i})^3}{3\mathrm{i}^3}-\cdots$.

(4) $1+\frac{z-1}{m}+\frac{(1-m)}{2!m^2}(z-1)^2+\frac{(1-m)(1-2m)}{3!m^3}(z-1)^3+\cdots$(主值).

(5) $\mathrm{e}\left(1+z+\frac{3}{2!}z^2+\frac{13}{3!}z^3+\cdots\right)$.

(6) $\ln2+\frac{1}{2}z-\frac{1}{8}z^2-\frac{1}{192}z^4+\cdots$.

(7) $\mathrm{e}\left(1-\frac{z}{2}+\frac{11}{24}z^2+\cdots\right)$.

(8) $\sin^2z=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{2^{2k}}{(2k)!}z^{2k}$，$\cos^2z=1-\sin^2z=1+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\times$

$(-1)^k \dfrac{2^{2k}}{(2k)!} z^{2k}$.

§ 3.5. (1) $z^5 + \dfrac{1}{1!}z^4 + \dfrac{1}{2!}z^3 + \cdots + \dfrac{1}{k!}z^{(k-5)} + \cdots$.

(2) $\sum\limits_{k=-1}^{\infty}(-1)^{k+1}(k+2)(z-1)^k$.

(3) $-\sum\limits_{k=-1}^{\infty} z^k$; $1/(z-1) - 1 + (z-1) - (z-1)^2 + (z-1)^3 - \cdots$.

(4) 注意圆环域$|z|>1$的圆心即展开中心 $z=0$并不是奇点(奇点是 $z=1$). 应用(3.2.7)时要注意$|z|>1$而$|1/z|<1$. $1 - \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{2z^2} - \dfrac{1}{6z^3} + \dfrac{1}{24z^4} + \cdots$.

(5) $\sum\limits_{k=-1}^{-\infty}(3^{-(k+1)} - 2^{-(k+1)})z^k$.

(6) $1 + \sum\limits_{k=-1}^{-\infty}(6 \cdot 4^{-(k+1)} - 2 \cdot 3^{-(k+1)})z^k$.

(7) $-\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^{k+1}}z^k - \sum\limits_{k=-1}^{-\infty} z^k$.

(8) $\sum\limits_{k=-1}^{-\infty}2^{-(k+1)}z^k - \sum\limits_{k=-1}^{-\infty} z^k$.

(9) 奇点 $z=0$, $\dfrac{1}{z} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k!}z^{k-1}$.

(10) 奇点 $z=0$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\dfrac{1}{(2k)!}z^{2k-1}$.

(11) 奇点 $z=0$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^{k-1}\dfrac{1}{(2k+1)!z^{2k+1}}$.

(12) 奇点 $z=0$, $\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{3}z - \dfrac{1}{45}z^3 - \cdots$.

(13) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^k\left(\dfrac{k}{2}+1\right) - 1\right]z^k$; $\sum\limits_{k=-\infty}^{-1} z^k + \sum\limits_{k=0}^{\infty}\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^k\left(\dfrac{k}{2}+1\right)\right]z^k$; $\sum\limits_{k=-2}^{-\infty}\left[1 - \dfrac{k+2}{2^{k+1}}\right]z^k$.

(14) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(1 - \dfrac{1}{2^k}\right)z^k$; $-\sum\limits_{k=-\infty}^{-1} z^k - \sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^k}z^k$; $-\sum\limits_{k=-\infty}^{-1} z^k + \sum\limits_{k=-1}^{-\infty}2^{-k}z^k$.

(15) $\frac{1}{z^2}+2+3z^2+4z^4+\cdots+kz^{2k-4}+\cdots$；$\frac{1}{z^6}+\frac{2}{z^8}+\frac{3}{z^{10}}+\cdots+\frac{k-2}{z^{2k}}+\cdots$.

§3.6.(1) $m+n$ 阶极点.

(2) $m-n$ 阶极点. 但如 $m<n$ 则不是奇点.

(3) 极点，阶数等于 m 和 n 中较大的一个. 但如 $m=n$ 则阶数可能 $<m$.

§4.1.1.(1) 单极点 -1，留数 $1/e$；本性奇点 ∞，留数 $-1/e$.

(2) 单极点1，留数1；二阶极点2，留数 -1；

(3) 单极点 $\pm ia$，留数 $\pm e^{\pm ia}/2ia$；本性奇点 ∞，留数 $(e^{-ia}-e^{ia})/2ia$.

(4) 单极点 $\pm ia$，留数 $\pm e^{\mp a}/2ia$；本性奇点 ∞，留数 $(e^{a}-e^{-a})/2ia$.

(5) 三阶极点 a，留数 $(1+a/2)e^{a}$；本性奇点 ∞，留数 $-(1+a/2)e^{a}$.

(6) 单极点 ± 1，留数 $-1/2$；三阶极点0，留数1.

(7) 二阶极点 $\pm i$，留数 $\mp i/4$.

(8) n 阶极点 -1，留数 $(-1)^{n+1}(2n)!/(n+1)!(n-1)!$，$n$ 阶极点 ∞，留数 $(-1)^{n}(2n)!/(n-1)!(n-1)!$

(9) 本性奇点 $z=1$，留数 -1.

(10) 单极点 $e^{i(2k+1)\pi/2n}(k=0,1,2,\cdots,2n-1)$，留数 $-e^{i(2k+1)\pi/2n}/2n$.

2.(1) $-\pi i/2$. (2) πi.

(3) 0. (4) $-\pi^2 i$.

3. $f(a)$. 这结果正是柯西公式(2.4.3).

§4.2.1.(1) $2\pi/\sqrt{3}$. (2) $2\pi/(1-\varepsilon^2)^{3/2}$.

(3) $\pi(1+\varepsilon^4)/(1-\varepsilon^2)$. (4) $(a-\sqrt{a^2-b^2})2\pi/b^2$.

(5) $\pi/\sqrt{a^2+1}$. (6) $\pi 2\varepsilon/(1-\varepsilon^2)$.

(7) $\pi/2\sqrt{2}$.

(8) $2\pi[1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)]/[2\cdot4\cdot6\cdots(2n)]$.

2.(1) $\sqrt{2}\pi$. (2) $\pi/200$.

(3) $\pi(2a+b)/2a^3b(a+b)^2$.

(4) $\pi/2\sqrt{2}a^3$. (5) $\pi/2$.

(6) $\pi/4a$. (7) $\pi/n\sin[\pi(2m+1)/2n]$.

3.(1) $[\cos(m/\sqrt{2})+\sin(m/\sqrt{2})]\sqrt{2}\pi e^{-m/\sqrt{2}}/4$.

(2) $(1-e^{-ma})\pi/2a^2$.　　(3) π/e.

(4) $e^{-ma/\sqrt{2}}\pi/2$.　　(5) $(1+ma)e^{-ma}\pi/4a^3$.

(6) $(e^{-b}/b-e^{-a}/a)\pi/2(a^2-b^2)$.

(7) $\pi/2$.

(8) $2\pi i e^{-ma}$;0.

§ 5.1.1. $\frac{2}{\pi}E_0+\frac{4}{\pi}E_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-4n^2}\cos 2n\omega t$. 基波消失，

2. $\frac{1}{6}T-\frac{1}{3\pi}T\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\frac{2k\pi x}{T}$.

3. $\frac{1}{3}\pi^2+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos kx+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kx$.

4. (1) $\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x$. 这个傅里叶级数只有两项.

(2) $1+2\sum_{k=1}^{\infty}a^k\cos kx$.

(3) $\frac{2\sin\pi\alpha}{\pi}\left[\frac{1}{2\alpha}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\alpha\cos kx}{k^2-\alpha^2}\right]$.

(4) $\frac{2\mathrm{sh}\alpha\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2\alpha}+\alpha\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\cos kx}{k^2+\alpha^2}\right]$.

(5) $\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\cos x+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos 2nx$.

5. (1) $\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kx, b_k=\frac{2k}{\pi(k^2-\alpha^2)}[1+(-1)^{k+1}\cos\alpha\pi]$.

(2) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left[\frac{12}{k^3}-\frac{2\pi^2}{k}\right]\sin kx$.

(3) $\frac{4}{\pi}\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\cdots\right)$.　　(25.7)

6. (1) $\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi x}{l}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos\frac{2n\pi x}{l}$.

(2) $\frac{a}{2}+\frac{4a}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{l}$.

(3) $\frac{l}{4}-\frac{8l}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n+2)^2}\cos\frac{(4n+2)\pi x}{l}$.

7. $\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n 4l}{(2n+1)\pi}-\frac{8l}{(2n+1)^2\pi^2}\right]\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$.

8. $\frac{H\tau}{T}+\left(\sum_{k=-\infty}^{-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\right)\frac{H}{k\pi}\sin\frac{k\pi\tau}{T}e^{i\frac{2k\pi x}{T}}$.

§5.2.1. 实数形式：$A(\omega)=[\cos\omega T+\omega T\sin\omega T-1]k/\pi\omega^2$，$B(\omega)=[\sin\omega T-\omega T\cos\omega T]k/\pi\omega^2$.

复数形式：$\frac{k}{2\pi\omega}\left[\frac{1}{\omega}(e^{-i\omega T}-1)+iTe^{-i\omega T}\right]$.

2. $(1/\pi)\mathrm{rect}(x/2\pi)$.

3. $B(\omega)-\frac{2h}{\pi}\frac{1-\cos\omega T}{\omega}$.

4. (1) 同例1.　(2) 同上题.

5. $\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{2\omega}{\lambda^2+\omega^2}\sin\omega x\mathrm{d}\omega$.

§5.3. 2. $\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\cos\omega x\mathrm{d}\omega$.

§6.2. (1) $\omega/(p^2-\omega^2)$；$p/(p^2-\omega^2)$.

(2) $\omega/[(p+\lambda)^2+\omega^2]$；$(p+\lambda)/[(p+\lambda)^2+\omega^2]$.

(3) $1/\sqrt{p}$.

(4) $e^{-\tau p}$.

§6.3 和 §6.4. 1. (1) t^3e^{-t}.　(2) $3\mathrm{ch}t$ 即 $3(e^t+e^{-t})/2$.

(3) $y(t)=e^{2t}$，$x(t)=3e^{2t}$.　(4) $2t^4e^t/4!$

2. 如 $R^2-\frac{4L}{C}=0$，则 $j(t)=\frac{E}{L}te^{-(R/2L)t}$；

如 $R^2-\frac{4L}{C}>0$，则 $j(t)=\frac{2E}{\sqrt{R^2-4L/C}}e^{-(R/2L)t}\mathrm{sh}\frac{\sqrt{R^2-4L/C}}{2L}t$；

如 $R^2-\frac{4L}{C}<0$，则 $j(t)=\frac{2E}{\sqrt{4L/C-R^2}}e^{-(R/2L)t}\sin\frac{\sqrt{4L/C-R^2}}{2L}t$.

3. $N_4(t)=N_0+\frac{C_2C_3N_0}{(C_1-C_2)(C_3-C_1)}e^{-C_1t}+\frac{C_3C_1N_0}{(C_2-C_3)(C_1-C_2)}e^{-C_2t}$

$+\frac{C_1C_2N_0}{(C_3-C_1)(C_2-C_3)}e^{-C_3t}$.

4. $y(t)=\frac{1}{2}\lambda\mu\left(t^2-\frac{1}{3}Ct^3\right)e^{-Ct}$.

5. $j(t)=\frac{E_0}{R^2+1/C^2\omega^2}\left[R\sin\omega t+\frac{1}{C\omega}\cos\omega t\right]-\frac{E_0/C\omega}{R^2+1/C^2\omega^2}e^{-t/RC}$，第一项也可写成$\frac{E_0}{\sqrt{R^2+1/C^2\omega^2}}\sin(\omega t+\theta)$，其中

$\theta=\arccos\frac{R}{\sqrt{R^2+1/C^2\omega^2}}=\arcsin\frac{1/C\omega}{\sqrt{R^2+1/C^2\omega^2}}$.

6. $T(t)=\frac{Al}{\pi a}\frac{1}{\omega^2-\pi^2a^2/l^2}\left(\omega\sin\frac{\pi at}{l}-\frac{\pi a}{l}\sin\omega t\right)$.

7. $T(t)=\frac{1}{\omega a}\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_0^t g(\tau)[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega a(t-\tau)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega a(t-\tau)}]\mathrm{d}\tau$.

8. $T(t)=\int_0^t \mathrm{e}^{-\omega^2a^2(t-\tau)}g(\tau)\mathrm{d}\tau$.

9. 用分部积分法可导出公式$\int \mathrm{e}^{p^2/4}p^k\mathrm{d}p=2\mathrm{e}^{p^2/4}p^{k-1}-2(k-1)\times\int \mathrm{e}^{p^2/4}p^{k-2}\mathrm{d}p$. 因此，如$\frac{\lambda}{2}$为偶数，可选$C_2=0, C_1\neq 0$，一次又一次分部积分可得$\bar{y}(p)$为$1/p$的多项式，相应的原函数必亦为多项式；如$\frac{\lambda}{2}$为奇数，可选$C_1=0, C_2\neq 0$，亦得多项式. 但如$\frac{\lambda}{2}$不是整数，则不可能得到多项式.

10. λ应为整数.

11. $\omega^2=k/m$.

12. (1) $\mathrm{e}^{-at}\pi/2a$.　　(2) $\pi/2$.

(3) $(1-\mathrm{e}^{-t})\pi/2$.　　(4) $\pi t/2$.

§7.1. 1. $u_{tt}-a^2u_{xx}=0$.

2. $u_{tt}=a^2\frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}(x^2u_x)$，坐标$x$以锥顶为原点.

3. $u_{tt}-a^2u_{xx}+\frac{R}{\rho}u_t=0$.

5. $c\rho u_t-\left[\frac{\partial}{\partial x}(ku_x)+\frac{\partial}{\partial y}(ku_y)+\frac{\partial}{\partial z}(ku_z)\right]=Q_0\beta\mathrm{e}^{-\beta t}$，其中$Q_0$是开始时储存的水化热密度.

6. $c\rho u_t-k\Delta u=j^2r$.

7. $u_{tt}-\frac{1}{2}\omega^2\frac{\partial}{\partial x}\left[(l^2-x^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right]=0$.

8. 取x轴向下，原点在固定端，则$u_{tt}-g\frac{\partial}{\partial x}\left[(l-x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]-\omega^2u=0$.

9. $\theta_{tt}=\frac{\pi R^4N}{2I}\theta_{xx}$，其中$I$是单位长杆对于纵轴的转动惯量.

10. 取x沿槽的长度方向，u为水的质点的x方向位移，则$u_{tt}=ghu_{xx}$.

§7.2. 1. $u|_{t=0}=F_0(l-h)x/T_0l$（在$[0,h]$上），　$=F_0h(l-x)/T_0l$（在$[h,l]$上）.

2. $YSu_x|_{x=0}=F_0, YSu_x|_{x=l}=F_0$.

3. $-ku_x|_{x=0}=q_0, ku_x|_{x=l}=q_0$.

4. 取极坐标的极轴垂直于阳光，则$(\partial u/\partial\rho+Hu)|_{\rho=R}=q\sin\varphi(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$， $=0(\pi\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$.

5. 否. 在振动过程中，点 $x=h$ 并不是折点.

6. 把连接处的坐标记作 $x=0$，则

$$u^{\mathrm{I}}|_{x=0}=u^{\mathrm{II}}|_{x=0}, Y^{\mathrm{I}}Su_x^{\mathrm{I}}|_{x=0}=Y^{\mathrm{II}}Su_x^{\mathrm{II}}|_{x=0}.$$

7. 电势 u 连续，即 $u^{\mathrm{I}}|_{\Sigma}=u^{\mathrm{II}}|_{\Sigma}$，$\Sigma$ 表示电介质表面. 电位移法向分量连续，即$(\varepsilon^{\mathrm{I}}\partial u^{\mathrm{I}}/\partial n)|_{\Sigma}=(\varepsilon^{\mathrm{II}}\partial u^{\mathrm{II}}/\partial n)|_{\Sigma}$.

8. 设两端分别在 $x=x_1$ 和 $x=x_3$，两段以 $x=x_2$ 点分界. $u_t^{\mathrm{I}}-(k^{\mathrm{I}}/c^{\mathrm{I}}\rho^{\mathrm{I}})u_{xx}^{\mathrm{I}}=0, u^{\mathrm{I}}|_{t=0}=u_0, u^{\mathrm{I}}|_{x=x_1}=0; u_t^{\mathrm{II}}-(K^{\mathrm{II}}/c^{\mathrm{II}}\rho^{\mathrm{II}})u_{xx}^{\mathrm{II}}=0, u^{\mathrm{II}}|_{t=0}=u_0, u^{\mathrm{II}}|_{x=x_3}=0; u^{\mathrm{I}}|_{x=x_2}=u^{\mathrm{II}}|_{x=x_2}, k^{\mathrm{I}}u_x^{\mathrm{I}}|_{x=x_2}=k^{\mathrm{II}}u_x^{\mathrm{II}}|_{x=x_2}$.

§7.3. 1. (1) 令 $\xi=y-x,\eta=x$，则 $u_{\eta\eta}+\dfrac{c-b}{a}u_\xi+\dfrac{b}{a}u_\eta+\dfrac{1}{a}u=0$.

(2) 令 $\xi=x-y,\eta=3x+y$，则 $4u_{\xi\eta}-u_\xi+3u_\eta=0$.

(3) 令 $\xi=y-2x,\eta=x$，则 $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+u_\eta=0$.

(4) 对于 $y<0$，令 $\xi=x+2\sqrt{-y},\eta=x-2\sqrt{-y}$，则$(\xi-\eta)u_{\xi\eta}+\dfrac{1}{2}(u_\xi-u_\eta)=0$. 对于 $y>0$，令 $\xi=x,\eta=2\sqrt{y}$，则 $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-\dfrac{1}{\eta}u_\eta=0$.

(5) 对于 $x<0$，令 $\xi=\dfrac{3}{2}y+(\sqrt{-x})^3,\eta=\dfrac{3}{2}y-(\sqrt{-x})^3$，则 $u_{\xi\eta}-\dfrac{1}{6(\xi-\eta)}(u_\xi-u_\eta)=0$. 对于 $x>0$，令 $\xi=\dfrac{3}{2}y,\eta=-\sqrt{x^3}$，则 $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\dfrac{1}{3\eta}u_\eta=0$.

(6) 令 $\xi=y^2,\eta=x^2$，则 $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\dfrac{1}{2\xi}u_\xi+\dfrac{1}{2\eta}u_\eta=0$.

(7) 令 $\xi=y^2+\mathrm{e}^x,\eta=y^2-\mathrm{e}^x$，则 $4(\xi+\eta)u_{\xi\eta}+u_\xi+u_\eta=0$.

2. (1) 令 $u=\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}x-\frac{\beta}{2}y}v$，则 $v_{xx}+v_{yy}+\left(\gamma-\dfrac{1}{4}\alpha^2-\dfrac{1}{4}\beta^2\right)v=0$.

(2) 令 $u=\mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}x-a^2(\alpha+\frac{\beta^2}{4})y}v$，则 $v_{xx}-\dfrac{1}{a^2}v_y=0$.

(3) 令 $u=\mathrm{e}^{\frac{b^2-4a^2}{4a(c-b)}x-\frac{b}{2a}y}v$，则 $v_{yy}+\dfrac{c-b}{a}v_x=0$.

(4) 令 $u=\mathrm{e}^{-4x-3y}$，则 $v_{xy}-10v=0$.

(5) 令 $\xi = y - x/2, \eta = x/2, u = e^{\frac{b-2c}{a}\xi - \frac{b}{a}\eta} v$，则 $v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \frac{2}{a}\left(\frac{2bc-b^2-2c^2}{a}+1\right)v = 0$.

§7.4. 1. $u = \varphi(x - at)$，只朝一个方向传播.

2. $v = A\cos k(x - at), j = \sqrt{C/L}A\cos k(x - at)$.

3. $e^{-(R/L)t}\left\{\frac{1}{2}[\varphi(x + at) + \varphi(x - at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi\right\}$.

4. $u = \{H[x - (x_0 - at)] - H[x - (x_0 + at)]\}\frac{I}{2a\rho}$.

5. $u = \frac{1}{x}[f_1(x - at) + f_2(x + at)]$.

6. 于 $t > x/a, u = \frac{1}{2}[\varphi(x + at) + \varphi(at - x)] + \frac{1}{2a}\int_0^{x+at}\psi(\xi)d\xi + \frac{1}{2a} \times \int_0^{at-x}\psi(\xi)d\xi + \frac{aA}{YS\omega}\cos\omega\left(t - \frac{x}{a}\right) - \frac{aA}{YS\omega}$.

7. 匹配的条件是 $R_0 = \sqrt{L/C}$，因此 $\sqrt{L/C}$ 叫作特征阻抗.

8. $u = 0$（于 $t < x/a$）； $= A\sin\omega(t - x/a)$（于 $t > x/a$）.

§8.1. 1. 初始位移 $= F_0(l - x_0)x/lT\ (0 < x < x_0)$， $= F_0x_0(l - x)/lT\ (x_0 < x < l)$. $u(x,t) = \frac{2F_0l}{T\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi x_0}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi at}{l}$.

2. $\frac{8b}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2}{l^2}t}$.

3. ①初速 $= v_0\ (x_0 - \delta < x < x_0 + \delta)$，

$$u = \frac{4v_0l}{\pi^2a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi x_0}{l}\sin\frac{n\pi\delta}{l}\sin\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

② 初速 $= v_0\cos\frac{x - x_0}{2\delta}\pi\ (x_0 - \delta < x < x_0 + \delta)$，

$$u = \frac{8v_0\delta}{\pi^2a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{1 - \left(\frac{2\delta n}{l}\right)^2}\sin\frac{n\pi x_0}{l}\cos\frac{n\pi\delta}{l}\sin\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

4. $\frac{l8\varepsilon}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{(2n+1)\pi at}{l}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{l}$.

5. $\frac{8F_0l}{YS\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi at}{l}\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}$.

6. 定解条件是：$v|_{x=0} = 0, v_x|_{x=l} = -\left(R + L\frac{d}{dt}\right)j|_{x=l} = 0, v|_{t=0} = v_0$,

$v_t|_{t=0} = -\frac{1}{C} j_x|_{t=0} = 0$. 解 $v(x,t) = \frac{4v_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \cos \frac{(2n+1)\pi at}{2l} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}$.

7. 以重力作用下的平衡状态作为基准来计算位移 u，则泛定方程是齐次的.

$$u(x,t) = \frac{2v_0 l}{\pi^2 a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \sin \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l} \sin \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi at}{l}.$$

8. $a\pi/\sqrt{\beta}$； $a^2 = D$.

9. $u(x,t) = N_0 - \frac{4N_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2 a^2}{l^2}t} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{l}$. 对于较大的 t，$u(x,t) = N_0 - \frac{4N_0}{\pi} e^{-\frac{\pi^2 a^2}{l^2}t} \sin \frac{\pi x}{l}$.

10. $\frac{4\Phi_0}{l} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\delta_k} e^{-\frac{4k^2 a^2 \pi^2 t}{l^2}} \cos \frac{2k\pi x}{l}$.

对于较大的 t，$u = \frac{2\Phi_0}{l} + \frac{4\Phi_0}{l} e^{-\frac{4a^2\pi^2 t}{l^2}} \cos \frac{2\pi x}{l}$.

11. $$B \frac{\mathrm{sh}[\pi(b-y)/a]}{\mathrm{sh}(\pi b/a)} \sin \frac{\pi x}{a} + \frac{8Ab^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{sh}\frac{2n+1}{b}\pi(a-x)}{(2n+1)^3 \mathrm{sh}\frac{2n+1}{b}\pi a} \times \sin \frac{(2n+1)\pi y}{b}.$$

12. $\frac{4u_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{a} e^{-(2n+1)\pi y/a}$.

13. $\frac{2A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n\pi y/a} \sin \frac{n\pi x}{a}$.

14. $(A_{mn}\cos\omega_{mn}t + B_{mn}\sin\omega_{mn}t) \sin \frac{m\pi x}{l_1} \sin \frac{n\pi y}{l_2}$，其中

$$\omega_{mn} = \pi a \sqrt{\left(\frac{m}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{n}{l_2}\right)^2}.$$

除边缘外，平行于 y 轴的节线有 $m-1$ 条，即 $x = \frac{l_1}{m}$ 的整倍数；平行于 x 轴的节线有 $n-1$ 条，即 $y = \frac{l_2}{n}$ 的整倍数. 节线保持不动，节线两方振动方向相反.

15. $u(\varphi,t)=\sum_{n=0}^{\infty}(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)e^{-n^2a^2t/\rho_0^2}$，其中 A_n 和 B_n 是 $f(\varphi)$ 的傅里叶系数．$\left(本题泛定方程为\ u_t=\frac{a^2}{\rho_0^2}u_{\varphi\varphi}\right)$

16. ①$\frac{A}{\rho_0}\rho\cos\varphi$　　②$A+\frac{B}{\rho_0}\rho\sin\varphi$.

17. $\frac{4u_0}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{2k+1}\sin(2k+1)\varphi$.

18. $u_{内}=-\frac{2E_0}{1+\varepsilon}\rho\cos\varphi,u_{外}=-\left(\rho-\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\frac{a^2}{\rho}\right)E_0\cos\varphi$. 柱内为匀强电场，$E=\frac{2}{1+\varepsilon}E_0$. 柱内极化强度 $P=(\varepsilon-1)\varepsilon_0E=2\varepsilon_0\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}E_0$. 柱面束缚电荷面密度$=P$ 的法向分量$=2\varepsilon_0\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}E_0\cos\varphi$.

19. $$u(\rho,\varphi)=\frac{q}{H\pi}+\frac{1}{k+Ha}\frac{q}{2}\rho\sin\varphi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2q}{\pi a^{2n-1}(2nk+Ha)(1-n^2)}\rho^{2n}\cos 2n\varphi.$$

20. $$\frac{\beta_0^{(1)}\ln\rho_2-\beta_0^{(2)}\ln\rho_1}{2(\ln\rho_2-\ln\rho_1)}+\frac{\beta_0^{(2)}-\beta_0^{(1)}}{2(\ln\rho_2-\ln\rho_1)}\ln\rho$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\beta_n^{(1)}\rho_2^{-n}-\beta_n^{(2)}\rho_1^{-n}}{\rho_1^n\rho_2^{-n}-\rho_1^{-n}\rho_2^n}\rho^n-\frac{\beta_n^{(1)}\rho_2^n-\beta_n^{(2)}\rho_1^n}{\rho_1^n\rho_2^{-n}-\rho_1^{-n}\rho_2^n}\rho^{-n}\right]\cos n\varphi$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\alpha_n^{(1)}\rho_2^{-n}-\alpha_n^{(2)}\rho_1^{-n}}{\rho_1^n\rho_2^{-n}-\rho_1^{-n}\rho_2^n}\rho^n-\frac{\alpha_n^{(1)}\rho_2^n-\alpha_n^{(2)}\rho_1^n}{\rho_1^n\rho_2^{-n}-\rho_1^{-n}\rho_2^n}\rho^{-n}\right]\sin n\varphi,$$
其中 $\beta_0^{(1)}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_1(\varphi)d\varphi$,　$\beta_0^{(2)}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_2(\varphi)d\varphi$,
$\beta_n^{(1)}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_1(\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi,\beta_n^{(2)}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_2(\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi$,
$\alpha_n^{(1)}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_1(\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi,\alpha_n^{(2)}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_2(\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi$.

21. $v_0\rho\cos\varphi+v_0\frac{a^2}{\rho}\cos\varphi+\frac{\Gamma}{2\pi}\varphi$，$\Gamma$ 任意.

22. $v=v_0\sin[\omega(l-x)\sqrt{LC}]\sin\omega t/\sin(\omega l\sqrt{LC})$,
$j=-v_0\sqrt{\frac{C}{L}}\cos[\omega(l-x)\sqrt{LC}]\cos\omega t/\sin(\omega l\sqrt{LC})$.
$Z_{输入}=v_{max}|_{x=0}:j_{max}|_{x=0}=\sqrt{\frac{L}{C}}\text{tg}(\omega l\sqrt{LC})$. 如 $l=\frac{1}{4}$波长，则 $Z_{输入}=\infty$.

23. $v = Ae^{i(\omega t + \sqrt{(R+i\omega L)(G+i\omega C)}x)} + Be^{i(\omega t - \sqrt{(R+i\omega L)(G+i\omega C)}x)}$,

$$j = -A\sqrt{\frac{G+i\omega C}{R+i\omega L}}e^{i(\omega t + \sqrt{(R+i\omega L)(G+i\omega C)}x)}$$

$$+B\sqrt{\frac{G+i\omega C}{R+i\omega L}}e^{i(\omega t - \sqrt{(R+i\omega L)(G+i\omega C)}x)}，其中$$

$$e^{al}A = v_0\frac{(R_0+i\omega L_0 - i/C_0\omega) - \sqrt{(R+i\omega L)/(G+i\omega C)}}{2(R_0+i\omega L_0 - i/C_0\omega)\text{ch}aL + 2Z\text{sh}aL},$$

$$e^{-al}B = v_0\frac{(R_0+i\omega L_0 - i/C_0\omega) + \sqrt{(R+i\omega L)/(G+i\omega C)}}{2(R_0+i\omega L_0 - i/C_0\omega)\text{ch}aL + 2Z\text{sh}aL}.$$

没有反射波即 $A=0$，这要求 $R_0+i\omega L_0 - i/C_0\omega = \sqrt{\frac{R+i\omega L}{G+i\omega C}}$，等号右边叫作传输线的特征阻抗 Z_0 又，$a = \sqrt{(R+i\omega L)(G+i\omega C)}$.

24. $\frac{aF_0}{YS\omega\cos(\omega l/a)}\sin\frac{\omega x}{a}\sin\omega t.$

25. $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2u_0 l^2}{(n+\frac{1}{2})^3\pi^3}$

$$\left[(n+\frac{1}{2})\pi + 2(-1)^{n+1}\right]e^{\left[\beta - \frac{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2a^2}{l^2}\right]t}\cos\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{l}x$$

26. $u(\rho,\varphi) = \frac{u_1}{2}\cdot\frac{\ln\rho_2 - \ln\rho}{\ln\rho_2 - \ln\rho_1} + \frac{u_2\rho_2}{\ln\rho_2 - \ln\rho_1}\left[\rho - \frac{\rho_1^2}{\rho}\right]\sin\varphi - \frac{u_1\rho_1^2}{2(\rho_2^4 - \rho_1^4)}$

$$\left[\rho^2 - \frac{\rho_2^4}{\rho^2}\right]\cos 2\varphi.$$

27. $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2u_0(1-\cos x_n)}{x_n - \sin x_n\cos x_n}e^{-\frac{x_n^2a^2}{l^2}t}\sin\frac{x_n}{l}x.$

其中 x_n 为方程 $x+\eta\text{tg}x=0$ 的根，常数 $\eta = hl/k$，h 为热交换系数，k 为热传导系数.

§8.2 1. $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-8}{(2k-1)[(2k-1)^2-4]\pi}\cos\frac{(2k-1)\pi a}{l}t\sin\frac{(2k-1)\pi}{l}x$

$$+\frac{f_0}{YS}\cdot\frac{1}{\omega^2 - \frac{4\pi^2a^2}{l^2}}\left(\cos\frac{2\pi a}{l}t - \cos\omega t\right)\sin\frac{2\pi}{l}x.$$

2. $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n e^{-\frac{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2a^2}{l^2}t}\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2A(-1)^n}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\cdot\frac{1}{\omega^2+\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^4\pi^4a^4}{l^4}}$$

$$\left[\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2a^2}{l^2}\sin\omega t-\omega\cos\omega t\right]\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2A(-1)^n}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\cdot\frac{\omega}{\omega^2+\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^4\pi^4a^4}{l^4}}$$

$$\cdot e^{-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2a^2}{l^2}t}\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x.$$

其中 $\varphi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x\mathrm{d}x.$

3. $\frac{2}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^l\Phi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\mathrm{d}\xi\left[\frac{\omega\sin\frac{n\pi a}{l}t-\frac{n\pi a}{l}\sin\omega t}{\omega^2-n^2\pi^2a^2/l^2}\right]\sin\frac{n\pi x}{l}.$

如外力的频率等于基音或谐音的频率，则[ ]为 0/0，按罗毕达法则其极限为$\left[\frac{1}{2\omega}\sin\omega t-\frac{1}{2}t\cos\omega t\right]$，其中第二部分的振幅为$\frac{1}{2}t$，随时间而增长，这就是共振.

4. $\frac{2f_0}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x_0}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\left[\frac{\omega\sin\frac{n\pi a}{l}t-\frac{n\pi a}{l}\sin\omega t}{\omega^2-n^2\pi^2a^2/l^2}\right].$

5. $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+B_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^t D_n(\tau)\sin\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

其中 $A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x$； $B_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x.$

$$D_n(\tau)=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l f(x,\tau)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x$$

6. 能用傅里叶级数法求解

解 $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n e^{-\left[\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}+\frac{b^2}{4a^2}\right]t}\cdot e^{\frac{b}{2a^2}x}\sin\frac{n\pi}{l}x.$

其中 $\varphi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)e^{-\frac{b}{2a^2}x}\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x.$

本题中出现的本征函数为 $X_n(x)=Ae^{\frac{b}{2a^2}x}\sin\frac{n\pi}{l}x$，彼此在区间[0,$l$]上带权重函数 $e^{-\frac{b}{a^2}x}$正交.

7. 把泛定方程记作 $u_t-a^2u_{xx}+\frac{h}{c\rho}u=\frac{1}{c\rho}I^2R$，则解

$$u=\frac{4I^2R}{\pi c\rho}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\frac{1}{(2n+1)^2\pi^2a^2/l^2+h/c\rho}\times\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}\left[1-e^{-\left(\frac{(2n+1)^2\pi^2a^2}{l^2}+\frac{h}{c\rho}\right)t}\right].$$

§ 8.3. 1. $u_1+\frac{u_2-u_1}{l}x+2\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(u_1-u_0)}{n\pi}[(-1)^n-1]+\frac{(u_2-u_1)}{n\pi}(-1)^n\right\}\times\sin\frac{n\pi x}{l}e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t}.$

2. $At\left(1-\frac{x}{l}\right)-\frac{l^2A}{6a^2}\left[\left(\frac{x}{l}\right)^3-3\left(\frac{x}{l}\right)^2+2\left(\frac{x}{l}\right)\right]+\frac{2Al^2}{\pi^3a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\sin\frac{n\pi x}{l}e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t}].$

3. $$\frac{F_0a}{YS\omega\cos\frac{\omega l}{a}}\sin\frac{\omega x}{a}\sin\omega t+\sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi at}{l}+B_n\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi at}{a}\right]\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l},$$

其中 $$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\xi}{l}d\xi,$$

$$B_n=\frac{2}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi a}\int_0^l\left[\psi(\xi)-\frac{F_0a\sin\frac{\omega}{a}\xi}{YS\cos\frac{\omega}{a}l}\right]\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\xi}{l}d\xi.$$

4. $u_0-\frac{4u_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}e^{-(2n+1)^2\pi^2a^2t/4l^2}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}.$

5. $$u(x,t)=\frac{mg}{YS}x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l+\frac{\rho Sm}{\rho^2S^2+m^2\lambda_n}}\left[\frac{mg}{YS\lambda_n}\left(\sqrt{\lambda_n}l\cos\sqrt{\lambda_n}l-\sin\sqrt{\lambda_n}l\right)-\frac{m^2g}{\rho YS^2}l\sin\sqrt{\lambda_n}l\right]\sin\sqrt{\lambda_n}x\cos a\sqrt{\lambda_n}t,$$

其中λ_n是$\sqrt{\lambda}\operatorname{tg}\sqrt{\lambda}l=\dfrac{S\rho}{m}$的第$n$个根. 注意, 本题的本征函数$\sin\sqrt{\lambda_n}x$并不彼此正交, 即$\int_0^l\sin\sqrt{\lambda_m}x\sin\sqrt{\lambda_n}x\mathrm{d}x\neq 0$, 而是$\int_0^l\sin\sqrt{\lambda_m}x\sin\sqrt{\lambda_n}x\mathrm{d}x+\dfrac{m}{S\rho}\sin\sqrt{\lambda_m}l\sin\sqrt{\lambda_n}l=0$.

§ 8.4. 1. $a^2-\rho^2$.　　2. $\dfrac{1}{24}\rho^2(a^2-\rho^2)\sin 2\varphi$.

3. $x(a-x)-\dfrac{8a^2}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{\operatorname{ch}[(2n+1)\pi y/a]\sin[(2n-1)\pi x/a]}{(2n+1)^3\operatorname{ch}\left[\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi b/a\right]}$.

4. $\dfrac{xy}{12}(a^3-x^3)+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^4b[(-1)^n n^2\pi^2+2-2(-1)^n]}{n^5\pi^5\operatorname{sh}(n\pi b/2a)}\operatorname{sh}\dfrac{n\pi y}{a}\sin\dfrac{n\pi x}{a}$.

§ 9.1. 1. $T(t)=A\cos kat+B\sin kat$, $\Phi(\varphi)=C\cos m\varphi+D\sin m\varphi$

$(m=0,1,2,\cdots)$,

贝塞尔方程$\dfrac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2}+\dfrac{1}{x}\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}+\left(1-\dfrac{m^2}{x^2}\right)R=0$, 其中$x=k\rho$.

2. $T(t)=Ae^{-k^2a^2t}$, $\Phi(\varphi)$和$R(\rho)$同上题.

3. 令$u(r,\theta,\varphi)=R(r)Y(\theta,\varphi)$, 则$Y$满足球函数方程.

$R(r)$满足$\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left[\dfrac{8\pi^2\mu}{h^2}\left(E+\dfrac{Ze^2}{r}\right)-\dfrac{l(l+1)}{r^2}\right]R=0$.

§ 9.2. 1. $y(x)=$

$$a_0\left[1-\frac{1}{2!}(\omega x)^2+\frac{1}{4!}(\omega x)^4-\cdots+(-1)^k\frac{1}{(2k)!}(\omega x)^{2k}+\cdots\right]$$

$$+a_1\left[(\omega x)-\frac{1}{3!}(\omega x)^3+\frac{1}{5!}(\omega x)^5-\cdots+(-1)^k\right.$$

$$\left.\frac{1}{(2k+1)!}(\omega x)^{2k+1}+\cdots\right]=a_0\cos\omega x+a_1\sin\omega x.$$

2. $y(x)=a_0y_0(x)+a_1y_1(x)$,

$$y_0(x)=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{1\cdot 4}{6!}x^6+\cdots+\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3k-2)}{(3k)!}x^{3k}+\cdots,$$

$$y_1(x)=x+\frac{2}{4!}x^4+\frac{2\cdot 5}{7!}x^7+\frac{2\cdot 5\cdot 8}{10!}x^{10}+\cdots$$

$$+\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3k-1)}{(3k+1)!}x^{3k+1}+\cdots.$$ 收敛半径无限大.

3. $y(x)=a_0y_0(x)+a_1y_1(x)$,

$$y_0(x)=1+\frac{1-\lambda}{2!}x^2+\frac{(1-\lambda)(5-\lambda)}{4!}x^4+\cdots$$

$$+\frac{(1-\lambda)(5-\lambda)\cdots(4k-3-\lambda)}{(2k)!}x^{2k}+\cdots,$$

$$y_1(x)=x+\frac{3-\lambda}{3!}x^3+\frac{(3-\lambda)(7-\lambda)}{5!}x^5+\cdots$$
$$+\frac{(3-\lambda)(7-\lambda)\cdots(4k-1-\lambda)}{(2k+1)!}x^{2k+1}+\cdots.$$

当 $\lambda=$ 奇数 $2k+1$，其中 k 是偶数时，$y_0(x)$成为 k 次多项式；

当 $\lambda=$ 奇数 $2k+1$，其中 k 是奇数时，$y_1(x)$成为 k 次多项式.

$H_0=1, H_1=2x, H_2=4x^2-2, H_3=8x^3-12x, H_4=16x^4-48x^2+12, H_5=32x^5-160x^3+120x, \cdots$.

4. $y(x)=a_0y_0(x)+a_1y_1(x)$，

$$y_0(x)=1+\frac{(-1)\cdot 6}{2!}x^2+\frac{(+1)(-1)\cdot 6\cdot 8}{4!}x^4+\cdots$$
$$+\frac{(2k-3)(2k-5)\cdots(-1)\cdot 6\cdot 8\cdots(2k+4)}{(2k)!}x^{2k}+\cdots,$$

$y_1(x)=x$.

在(9.2.7)之中，以 $l=3$ 代入，并求二阶导数，则正是本题的 $y_0(x)$ 乘以常数$(-3)\cdot 4$. 在(9.2.8)之中，以 $l=3$ 代入，并求二阶导数，则正是本例的 $y_1(x)$乘以常数$(-2)\cdot 5$。因此，可以说本题的解正是3阶勒让德方程的解的二阶导数.

5. $y=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$，递推公式

$$a_{k+2}=\frac{(k-\lambda)(k+\alpha+\beta+\lambda+1)}{(k+2)(k+1)}a_k+\frac{\alpha-\beta}{k+2}a_{k+1}.$$

可以写出前几个系数，但难以写出一般的系数公式.

§ 9.3. 1. $y(x)=Cx^m+D\dfrac{1}{x^m}$.

2. $y(x)=a_0x^l+a_1/x^{l+1}$.

3. $$y=a_0\left[1+\frac{-\lambda}{(1!)^2}x+\frac{(-\lambda)(1-\lambda)}{(2!)^2}x^2+\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{(-\lambda)(1-\lambda)\cdots(k-1-\lambda)}{(k!)^2}x^k+\cdots\right].$$

$\lambda=$ 整数 n，则退化为 n 次多项式.

$L_0(x)=1$，　$L_1(x)=-x+1$，　$L_2(x)=x^2-4x+2$，

$L_3(x)=-x^3+9x^2-18x+6$，$L_4(x)=x^4-16x^3+72x^2-96x+24$.

4. $$y=a_0x^{l+1}\left\{1+\frac{(l+1-Z/\lambda)}{1!\ (2l+2)}(2\lambda x)\right.$$
$$+\frac{(l+1-Z/\lambda)(l+2-Z/\lambda)}{2!\ (2l+2)(2l-3)}(2\lambda x)^2+\cdots.$$

如 $Z/\lambda=$ 整数 n，则（ ）退化 $n_r=n-l-1$ 次多项式，解成为

$$\xi^{l+1}\frac{\mathrm{d}^{2l+1}}{\mathrm{d}\xi^{2l+1}}L_{n+l}(\xi)\text{，其中 }\xi=\frac{2Zx}{n}.$$

5. $y=a_0\left[1-\frac{\Gamma(l+2)}{\Gamma(l)}\frac{1}{(1!)^2}\left(\frac{1-x}{2}\right)+\frac{\Gamma(l+3)}{\Gamma(l-1)}\frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{1-x}{2}\right)^2\right.$
$\left.-\frac{\Gamma(l+4)}{\Gamma(l-2)}\frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{1-x}{2}\right)^3+\cdots\right].$

如 $l=$ 整数则退化为多项式.

6. $y=a_0x+a_1\left[+x\ln x-1+\frac{0!}{1!\ 2!}x^2+\frac{1!}{2!\ 3!}x^3+\frac{2!}{3!\ 4!}x^4+\cdots\right].$

7. $y_0(x)=a_0\left(x-\frac{1}{1!\ 2!}x^2+\frac{1}{2!\ 3!}x^3-\frac{1}{3!\ 4!}x^4+\cdots\right)$，

$y_1(x)=a_1y_0\ln x+a_1\left[-1+\frac{1}{1!\ 2!}\left(\frac{3}{1\cdot 2}\right)x^2+\cdots\right.$
$+(-1)^k\frac{1}{(k-1)!\ k!}\left(\frac{3}{1\cdot 2}+\frac{5}{2\cdot 3}+\frac{7}{3\cdot 4}+\cdots\right.$
$\left.\left.+\frac{2k-1}{(k-1)k}\right)x^k+\cdots\right].$

8. $y_1=1+\frac{\alpha\beta}{1!\ \gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\ \gamma(\gamma+1)}x^2$
$+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{3!\ \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\cdots\equiv F(\alpha,\beta,\gamma;x)$；

$y_2=x^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma,\beta+1-\gamma,2-\gamma;x).$

9. $y_1=1+\frac{\alpha}{1!\ \gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)}{2!\ \gamma(\gamma+1)}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{3!\ \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\cdots$
$\equiv F(\alpha,\gamma;x)$；$y_2=x^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma,2-\gamma;x).$

§9.4.1. ① $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{\gamma}(x-1)^{1+\alpha+\beta-\gamma}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\alpha\beta x^{\gamma-1}(x-1)^{\alpha+\beta-\gamma}y=0.$

② $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{\gamma}\mathrm{e}^{-x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]-\alpha x^{\gamma-1}\mathrm{e}^{-x}y=0.$

2. $u|_{x=0}=0$，$x=l$ 端为自然边界条件　$u|_{x=l}=$ 有限值.

3. ①本征函数　$X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{b-a}(x-a)$　$(n=1,2,\cdots)$

模 N_n：　$N_n^2=(b-a)/2.$

②本征函数　$X_n(x)=\cos\frac{x_n}{l}x.$　x_n 为方程 $x-\eta\mathrm{ctg}x=0$ 的根，$\eta=l/h$，　$(n=1,2,\cdots)$

模 N_n：　$N_n^2=\frac{l}{2}\left[1+\frac{1}{2x_n}\sin 2x_n\right]$

4. 边界条件并非第一类、第二类或第三类齐次边界条件，也不是自然边

界条件.

§10.1. (1) $\frac{1}{5}P_0(x)+\frac{6}{5}P_1(x)+\frac{4}{7}P_2(x)+\frac{4}{5}P_3(x)+\frac{8}{35}P_4(x)$;

(2) $\frac{1}{6}P_0(x)+\frac{3}{8}P_1(x)+\frac{1}{3}P_2(x)+\frac{7}{48}P_3(x)$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(4n+3)(2n-3)!!}{(2n+4)!!}P_{2n+1}(x).$$

(3) $\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(2n-4k+1)n!}{(2k)!!\ (2n-2k+1)!!}P_{n-2k}(x).$

2. 球内 $v=\frac{v_1+v_2}{2}+\frac{v_1-v_2}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(4k+3)\frac{(2k-1)!!}{(2k+2)!!}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2k+1}$?

$\cdot P_{2k+1}(\cos\theta)$,

球外 $v=\frac{v_1+v_2}{2}\frac{r_0}{r}+\frac{v_1-v_2}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(4k+3)\frac{(2k-1)!!}{(2k+2)!!}$

$\times\left(\frac{r_0}{r}\right)^{2k+2}P_{2k+1}(\cos\theta).$

3. $u(r,\theta)=\frac{(u_1/2)r_2-u_0r_1}{r_2-r_1}+\left(u_0-\frac{u_1}{2}\right)\frac{r_1r_2}{r_2-r_1}\cdot\frac{1}{r}$

$$+\left[\frac{(u_1/2)r_2^3}{r_2^5-r_1^5}r^2-\frac{(u_1/2)r_1^5r_2^3}{r_2^5-r_1^5}\cdot\frac{1}{r^3}\right]P_2(\cos\theta).$$

4. ① $u_0\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(4k+3)\frac{(2k-1)!!}{(2k+2)!!}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2k+1}P_{2k+1}(\cos\theta)$. ② u_0.

5. $u(r,\theta)=-E_0r\cos\theta+E_0\frac{r_0^3}{r^2}\cos\theta.$

6. 球内 $u_i=q\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+1}{[(\varepsilon+1)l+1]d^{l+1}}r^lP_l(\cos\theta)$,

球外 $u_e=\frac{q}{\sqrt{d^2-2rd\cos\theta+r^2}}-q(\varepsilon-1)\sum_{l=0}^{\infty}\frac{lr_0^{2l+1}}{[(\varepsilon+1)l+1]d^{l+1}}\cdot\frac{1}{r^{l+1}}$

$\cdot P_l(\cos\theta)$.

7. $\Delta_3u=0(r<r_0)$, $\left(\frac{\partial u}{\partial r}+Hu\right)\Big|_{r=r_0}=f(\theta)\equiv\begin{cases}q_0\cos\theta & (0<\theta<\pi/2),\\ 0 & (\pi/2<\theta<\pi).\end{cases}$

$$u=\frac{q_0}{4H}+\frac{1}{Hr_0+1}\frac{q_0}{2}rP_1(\cos\theta)+\frac{1}{Hr_0+2}\frac{q_0}{r_0}\frac{5}{16}r^2P_2(\cos\theta).$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{Hr_0+2n}\frac{q_0}{r_0^{2n-1}}(-1)^{n+1}\frac{4n+1}{2}$$

$$\times\frac{(2n-3)!!}{(2n+2)!!}r^{2n}P_{2n}(\cos\theta).$$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}[A_n\cos\sqrt{n(2n-1)}\omega t+B_n\sin\sqrt{n(2n-1)}\omega t]P_{2n-1}\left(\frac{x}{l}\right)$，

系数$A_n=\frac{4n-1}{l}\int_0^l\varphi(x)P_{2n-1}\left(\frac{x}{l}\right)dx$，

$$B_n=\frac{4n-1}{\sqrt{n(2n-1)}\omega l}\int_0^l\psi(x)P_{2n-1}\left(\frac{x}{l}\right)dx.$$

9. $u(r,\theta)=\frac{q}{r_0}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{2^kk!}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2k}P_{2k}(\cos\theta)\quad(r<r_0)$；

$$u=\frac{q}{r_0}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{2^kk!}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{2k+1}P_{2k}(\cos\theta)\quad(r>r_0).$$

11.
$$I=\begin{cases}1, & l=0\\ 0, & l=2n\quad(n=1,2,\cdots)\\ \frac{1}{2}, & l=1\\ (-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} & l=2n+1\quad(n=1,2,\cdots)\end{cases}$$

§10.3.1. (1) $P_1^1(\cos\theta)\cos\varphi+P_2^1(\cos\theta)\cos\varphi$.

$$(2)\ \frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(4n+1)\frac{(2n-3)!!}{(2n+2)!!}P_{2n}(\cos\theta)$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(4n+1)\left[1+\frac{6}{(2n-1)(2n+2)}\right]$$
$$\times\frac{(2n-2)!}{(2n+2)!}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}P_{2n}^2(\cos\theta)\cos2\varphi.$$

2. (1) 球内：$\frac{4}{3}P_0^0(\cos\theta)-\frac{4}{3}\left(\frac{r}{r_0}\right)^2P_2^0(\cos\theta)+\frac{2}{3}\left(\frac{r}{r_0}\right)^2P_2^2(\cos\theta)\sin2\varphi$.

(2) 球外：$\frac{4}{3}\cdot\frac{r_0}{r}P_0^0(\cos\theta)-\frac{4}{3}\left(\frac{r_0}{r}\right)^3P_2^0(\cos\theta)+\frac{2}{3}\left(\frac{r_0}{r}\right)^3P_2^2(\cos\theta)$ $\sin2\varphi$.

3. (1) 球内：$\frac{1}{6}\cdot\frac{r^2}{r_0}P_2^0(\cos\theta)-\frac{1}{12}\cdot\frac{r^2}{r_0}P_2^2(\cos\theta)\cos2\varphi$,

(2) 球外：$-\frac{1}{9}\cdot\frac{r_0^4}{r^3}P_2^0(\cos\theta)+\frac{1}{18}\cdot\frac{r_0^4}{r^3}P_2^2(\cos\theta)\cos2\varphi$.

4. $\frac{2}{3}u_0P_0^0(\cos\theta)-\frac{2u_0}{3r_0(r_0+2h)}r^2P_2^0(\cos\theta)+\frac{u_0}{3r_0(r_0+2h)}r^2P_2^1(\cos\theta)\sin\varphi$.

5. $\frac{u_1r_1^2}{r_2^3-r_1^3}(-r+r_2^3\cdot\frac{1}{r^2})P_1^0(\cos\theta)+\frac{u_2r_2^3}{3(r_2^5-r_1^5)}(r^2-r_1^5\cdot\frac{1}{r^3})P_2^1(\cos\theta)\sin\varphi$.

6. $u(r,\theta)=\frac{A}{10}(r^2-r_0^2)rP_1(\cos\theta)$.

§ 11.2. 1. $x^2(8-x^2)J_0(x)+4x(x^2-4)J_1(x)+C$.

2. $J_0(x)-4x^{-1}J_1(x)+C$.

3. $\sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0(x_k^{(0)} x)$，其中 $x_k^{(0)}$ 为 $J_0(x)$的第 k 个零点，

$A_k=2/x_k^{(0)} J_1(x_k^{(0)})$.

4. $2\rho_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n^{(0)} J_1(x_n^{(0)})}\left(1-\frac{4}{(x_n^{(0)})^2}\right)\left(\operatorname{sh} \frac{x_n^{(0)} z}{\rho_0} / \operatorname{sh} \frac{x_n^{(0)} L}{\rho_0}\right) J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{\rho_0} \rho\right)$.

5. $\frac{u_0}{2} \rho_0^2+\frac{u_1-(u_0 \rho_0^2 / 2)}{L} z+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 u_0 \rho_0^2}{(x_n^{(1)})^2 J_0(x_n^{(1)}) \operatorname{sh}(x_n^{(1)} L / \rho_0)} \operatorname{sh} \frac{x_n^{(1)}}{\rho_0}$

$(L-z) J_0\left(\frac{x_n^{(1)}}{\rho_0} \rho\right)$.

其中 $x_n^{(1)}$ 为 $J_1(x)$的第 n 个零点.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 q_0 \rho_0}{k(x_n^{(0)})^2 J_1(x_n^{(0)}) \operatorname{sh}(x_n^{(0)} L / \rho_0)}\left[\operatorname{ch} \frac{x_n^{(0)}}{\rho_0} z-\operatorname{ch} \frac{x_n^{(0)}}{\rho_0}(L-z)\right]$

$J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{\rho_0} \rho\right)$.

其中 $x_n^{(0)}$ 为 $J_0(x)$的第 n 个零点.

7. $8 u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[x_n^{(0)}]^3 J_1(x_n^{(0)})} J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{\rho_0} \rho\right) \cos \frac{x_n^{(0)}}{\rho_0} a t$.

8. 本征圆频率 $\omega_n^{(m)}=a x_n^m / \rho_0$,

本征振动 $u_n^{(m)}(\rho, \varphi, t)=J_m\left(\frac{x_n^{(m)}}{\rho_0} \rho\right) \sin m \varphi\left[A_n^{(m)} \cos \frac{a x_n^{(m)}}{\rho_0} t\right.$

$\left.+B_n^{(m)} \sin \frac{a x_n^{(m)}}{\rho_0} t\right]$.（半圆区域：$0 \leqslant \rho \leqslant \rho_0, 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$）

9. $2.405 \frac{a}{\sqrt{\beta}}$.　　10. $\frac{1}{a^2\left[\left(\frac{2.405}{\rho_0}\right)^2+\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\right]}$.

11. $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1} 8 u_0 L \rho_0^2}{a p \pi(x_n^{(1)})^2 J_0(x_n^{(1)})} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x_n^{(1)}}{\rho_0}\right)^2+\left(\frac{p \pi}{L}\right)^2}}$

$\cdot \sin \sqrt{\left(\frac{x_n^{(1)}}{\rho_0}\right)^2+\left(\frac{p \pi}{L}\right)^2} a t \cdot \sin \frac{p \pi}{L} z J_0\left(\frac{x_n^{(1)}}{\rho_0} \rho\right)$.

12. $(A / p \omega^2)\left[J_0\left(\frac{\omega}{a} \rho\right) / J_0\left(\frac{\omega}{a} R\right)-1\right] \sin \omega t$.

p 是膜每单位面积的质量.

13. $u_1 z^2+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(p+\frac{1}{2})\pi x_n^{(0)}J_1(x_n^{(0)})}$

$$\cdot\left[u_0+(-1)^{p+1}\frac{2u_1L^2}{(p+\frac{1}{2})\pi}+\frac{2u_1L^2}{(p+\frac{1}{2})^2\pi^2}\right]$$

$$\cdot e^{-\left[\left(\frac{x_n^{(0)}}{\rho_0}\right)^2+\frac{(p+\frac{1}{2})^2\pi^2}{L^2}\right]a^2t}J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{\rho_0}\rho\right)\sin\frac{(p+\frac{1}{2})\pi}{L}z$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{8u_1}{(p+\frac{1}{2})\pi x_n^{(0)}J_1(x_n^{(0)})}\cdot\frac{1}{\left[\left(\frac{x_n^{(0)}}{\rho_0}\right)^2+\frac{(p+\frac{1}{2})^2\pi^2}{L^2}\right]}$$

$$\cdot\left\{1-e^{-\left[\left(\frac{x_n^{(0)}}{\rho_0}\right)^2+\frac{(p+\frac{1}{2})^2\pi^2}{L^2}\right]a^2t}\right.$$

$$\left.\cdot J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{\rho_0}\rho\right)\sin\frac{(p+\frac{1}{2})\pi}{L}z.\right.$$

14. 本征圆频率 $\omega_n^{(m)}=ak_n^{(m)}$，而 $k_n^{(m)}$ 是方程 $J_m(k\rho_1)N_m(k\rho_2)-J_m(k\rho_2)N_m(k\rho_1)=0$ 的第 n 个根；

本征振动 $u_n^{(m)}(\rho,\varphi,t)=$

$$\left[J_m(k_n^{(m)}\rho)-\frac{J_m(k_n^{(m)}\rho_1)}{N_m(k_n^{(m)}\rho_1)}N_m(k_n^{(m)}\rho)\right][A\cos m\varphi+B\sin m\varphi][C\cos ak_n^{(m)}t+D\sin ak_n^{(m)}t].$$

15. $\mathrm{Re}\left[-i\frac{\pi v_0\omega\rho_0^2}{2a}H_1^{(1)}\left(\frac{\omega}{a}\rho\right)\cos\varphi e^{-i\omega t}\right]$. 远场区 $v_0\rho_0^2\sqrt{\frac{\pi\omega}{2a\rho}}\cos\varphi\cos\left[\frac{\omega}{a}(\rho-at)+\frac{3}{4}\pi\right]$.

16. $U=\mathrm{Re}\left\{\left[\frac{v_0\rho_0}{4}H_0^{(1)}(k\rho)+\sum_{m=1}^{\infty}H_m^{(1)}(k\rho)\times\frac{v_0k^m\rho_0^{m+1}}{2^m m!}(\cos m\varphi_0\cos m\varphi+\sin m\varphi_0\sin m\varphi)\right]e^{-i\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)}\right\}.$

§ 11.4.1. $u_1+\frac{u_2-u_1}{L}z-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{16u_2}{(2k+1)^3\pi^3}\left[I_0\left(\frac{(2k+1)\pi}{L}\rho\right)/I_0\left(\frac{(2k+1)\pi}{L}\rho_0\right)\right]\cdot\sin\frac{(2k+1)\pi}{L}z.$

2. $u_0 + \frac{q_0}{k}z + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{I_0\left[\frac{\left(p+\frac{1}{2}\right)\pi}{L}\rho_0\right]}$

$$\left\{f_p - \frac{2u_0}{\left(p+\frac{1}{2}\right)\pi} + \frac{(-1)^{p+1}2u_0q_0L}{k\left(p+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}\right\}$$

$$\cdot I_0\left[\frac{\left(p+\frac{1}{2}\right)\pi}{L}\rho\right]\sin\frac{\left(p+\frac{1}{2}\right)\pi}{L}z.$$

其中 f_p 为 $f(z)=\sum_{p=0}^{\infty}f_p\sin\frac{\left(p+\frac{1}{2}\right)\pi}{L}z$ 的傅里叶系数.

3. $\frac{2v_0}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p}\left[(-1)^{p+1}+\frac{l^2}{l^2-4p^2\delta^2}\cos\frac{p\pi\delta}{l}\right]\frac{I_0(p\pi\rho/l)}{I_0(p\pi\rho_0/l)}\sin\frac{p\pi}{l}z$

$$+2v_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x_n^{(0)}J_1(x_n^{(0)})}\cdot\frac{\text{sh}(x_n^{(0)}z/\rho_0)}{\text{sh}(x_n^{(0)}l/\rho_0)}J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{\rho_0}\rho\right).$$

4. $\frac{q_0}{k}z-\frac{q_0L}{2k}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4q_0L}{k(2n-1)^2\pi^2I_0((2n-1)\pi\rho_0/L)}I_0\left(\frac{(2n-1)\pi}{L}\rho\right)$

$\cos\frac{(2n-1)\pi}{L}z.$

5. $\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^{p+1}2u_0L}{p\pi I_0(p\pi\rho_0/L)}I_0\left(\frac{p\pi}{L}\rho\right)\sin\frac{p\pi}{L}z+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2u_1}{x_n^{(0)}J_1(x_n^{(0)})}\text{ch}\frac{x_n^{(0)}}{\rho_0}z+\right.$

$\left.\frac{2}{x_n^{(0)}J_1(x_n^{(0)})\text{sh}(x_n^{(0)}L/\rho_0)}\left[u_2\rho_0^2\left(1-\frac{4}{(x_n^{(0)})^2}\right)-u_1\text{ch}\frac{x_n^{(0)}}{\rho_0}L\right]\text{sh}\frac{x_n^{(0)}}{\rho_0}z\right\}J_0$

$\left(\frac{x_n^{(0)}}{\rho_0}\rho\right).$

6. $u_0+\sum_{p=0}^{\infty}\frac{2q_0L}{k\left(p+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2K'_0\left[\frac{\left(p+\frac{1}{2}\right)\pi}{L}\rho_0\right]}K_0\left[\frac{\left(p+\frac{1}{2}\right)\pi}{L}\rho\right]$

$$\cdot\sin\frac{\left(p+\frac{1}{2}\right)\pi}{L}z.$$

§ 11. 5. 3. $\pi a/\sqrt{\beta}$.

4. $\frac{2}{r_0}\cdot\frac{1}{r}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{r_0^2}t}\sin\frac{n\pi}{r_0}r\int_0^{r_0}rf(r)\sin\frac{n\pi}{r_0}r\mathrm{d}r.$

5. $\frac{2}{r_0^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{j_1(k_n r)}{[j_0(k_n r_0)]^2}P_1(\cos\theta)e^{-a^2k_n^2t}\int_0^{r_0}j_1(k_n r)f(r)r^2 dr$,

其中 $k_n=x_n/r_0$，而 x_n 是 $x=\mathrm{tg}x$ 的第 n 个根.

6. $\sum_{n=1}^{\infty}A_n\frac{1}{r}\sin\frac{n\pi r}{2r_0}e^{-(n^2\pi^2a^2/4r_0^2)t}$，其中 $A_{2k}=(-1)^{k+1}u_0r_0/k\pi$，

$A_{2k+1}=(-1)^k 4u_0r_0/(2k+1)^2\pi^2$.

7. $u_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(u_0-U_0)}{H}\frac{\sin k_n r_0}{k_n r_0-(\sin 2k_n r_0)/2}\times\frac{\sin k_n r}{k_n r}e^{-k_n^2a^2t}$，其中 $k_n=x_n/r_0$，

而 x_n 是方程 $x+\eta\mathrm{tg}x=0$ 的第 n 个根. $\eta=(r_0-H)/H$.

8. $\mathrm{Re}\left\{-\mathrm{i}\frac{v_0k^3r_0^4}{9}h_2^{(1)}(kr)P_2(\cos\theta)e^{-\mathrm{i}\omega t}\right\}$.

在远场区，$\frac{v_0k^2r_0^4}{9r}P_2(\cos\theta)\cos k(r-at)$.

9. $\mathrm{Re}\left\{-\mathrm{i}\frac{v_0k^3r_0^4}{9}h_2^{(1)}(kr)P_2^2(\cos\theta)\sin 2\varphi\cdot e^{-\mathrm{i}\omega t}\right\}$.

在远场区$\frac{v_0k^2r_0^4}{9r}P_2^2(\cos\theta)\sin 2\varphi\cos k(r-at)$.

§12.2.1. 见(12.2.21).　　2. 见(12.2.22).

3. 本题如用(12.2.21)，则积分可利用留数定理算出，参看§4.2 例 2 和习题 1(6).

答案① $u(\rho_0,\varphi_0)=\frac{A}{a}\rho_0\cos\varphi_0$，② $u(\rho_0,\varphi_0)=A+\frac{B}{a}\rho_0\sin\varphi_0$.

本题亦即§8.1 习题 16，可对照.

4. $$u(\rho_0,\varphi_0)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{\delta_n}\cos n\varphi_0\int_0^{2\pi}f(\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi+\sin n\varphi_0\int_0^{2\pi}f(\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi\right]\frac{1}{a^n}\rho_0^n.$$

5. 平面 $z=0$ 和 $z=H$ 好比两面镜子反复反射，造成无限多电像. 对于 (x_0,y_0,z_0) 处的电荷，所有 $(x_0,y_0,2nH+z_0)$ 处的电像带同号电荷，所有 $(x_0,y_0,2nH-z_0)$ 处的电像带异号电荷.

$$G(r,r_0)=-\frac{1}{4\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-2nH-z_0)^2}}+\frac{1}{4\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-2nH+z_0)^2}}.$$

虽然积分公式的形式是有限的，格林函数本身却是无穷级数.

§ 12.4.1. $\frac{2}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^l \Phi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\mathrm{d}\xi\left[\frac{\omega\sin\frac{n\pi a}{l}t-\frac{n\pi a}{l}\sin\omega t}{\omega^2-n^2\pi^2a^2/l^2}\right]$

$\times\sin\frac{n\pi x}{l}$. 如外力的频率等于基音或谐音的频率，则[ ]为 0/0，按罗毕达法则其极限为$\left[\frac{1}{2\omega}\sin\omega t-\frac{1}{2}t\cos\omega t\right]$，其中第二部分的振幅为$\frac{1}{2}t$，随时间而增长，这就是共振.

2. $\frac{2f_0}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x_0}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\left[\frac{\omega\sin\frac{n\pi a}{l}t-\frac{n\pi a}{l}\sin\omega t}{\omega^2-n^2\pi^2a^2/l^2}\right]$.

3. 把泛定方程记作 $u_t-a^2u_{xx}+\frac{h}{c\rho}u=\frac{1}{c\rho}I^2R$，则解

$$u=\frac{4I^2R}{\pi c\rho}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\frac{1}{(2n+1)^2\pi^2a^2/l^2+h/c\rho}$$
$$\times\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}\left[1-\mathrm{e}^{-\left(\frac{(2n+1)^2\pi^2a^2}{l^2}+\frac{h}{c\rho}\right)t}\right].$$

4. $At-\int_0^t A\,\mathrm{erf}(x/2a\sqrt{t-\tau})\mathrm{d}\tau=A\int_0^t\mathrm{erfc}(x/2a\sqrt{t-\tau})\mathrm{d}\tau$.

5. $$f(0)\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)+\int_0^t f'(\tau)\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right)\mathrm{d}\tau$$
$$+\int_{-x/2a\sqrt{t}}^{\infty}\varphi(x+z2a\sqrt{t})\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{d}z$$
$$-\int_{x/2a\sqrt{t}}^{\infty}\varphi(z2a\sqrt{t}-x)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{z^2}\mathrm{d}z.$$

6. $$q(t)\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}q(0)\mathrm{e}^{-4a^2t^2}\left\{\mathrm{e}^{4a^2xt}\mathrm{erfc}\left(\frac{2a^2t-x}{2a\sqrt{t}}\right)\right.$$
$$\left.-\mathrm{e}^{-4a^2xt}\mathrm{erfc}\left(\frac{2a^2t+x}{2a\sqrt{t}}\right)\right\}+\int_0^t\frac{1}{2}[a^2q(\tau)-q'(\tau)]$$
$$\times\mathrm{e}^{-4a^2(t-\tau)^2}\left\{\mathrm{e}^{4a^2x(t-\tau)}\mathrm{erfc}\left(\frac{2a^2(t-\tau)-x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right)\right.$$
$$\left.-\mathrm{e}^{-4a^2x(t-\tau)}\mathrm{erfc}\left(\frac{2a^2(t-\tau)+x}{2a\sqrt{t}}\right)\right\}\mathrm{d}\tau.$$

本节 1,2,3 题即 § 8.2 之 3,4,7 题，可对照.

§ 12.5.1. 里曼函数 $v=1$，

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau.$$

2. $\frac{1}{2}\varphi(xt)+\frac{1}{2}t\varphi\left(\frac{x}{t}\right)+\frac{1}{t}\ \sqrt{xt}\int_{xt}^{x/t}\varphi(\xi)\xi^{-3/2}\mathrm{d}\xi$

$$-\frac{1}{2}\ \sqrt{xt}\int_{xt}^{x/t}\psi(\xi)\xi^{-3/2}\mathrm{d}\xi.$$

§ 13.1. 1. $u(x,t)=\int X(x;k)T(t;k)\mathrm{d}k, X(x;k)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$,

$$T(t;k)=\exp\left[-\frac{R}{2L}t-\frac{G}{2C}t-\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{R}{L}-\frac{G}{C}\right)^2-\frac{4k^2}{LC}}t\right].$$

如 $|k|<\frac{\sqrt{LC}}{2}\left|\frac{R}{L}-\frac{G}{C}\right|$,则 $T(t;k)$ 单纯衰减而不振荡,故传输线相当于高通滤波器,只通过 $|k|>\frac{\sqrt{LC}}{2}\left|\frac{R}{L}-\frac{G}{C}\right|$ 的振荡.波速 $=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{LC}-\frac{1}{k^2}\left(\frac{R}{L}-\frac{G}{C}\right)^2}$,其随$k$的不同而不同,这叫色散现象.如 $G:C=R:L$,则通过的频率无限制,并且无色散.

2. $\frac{K}{2}\mathrm{e}^{a^2\lambda^2t}\left\{\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{erfc}\left(\frac{2a^2\lambda t-x}{2a\sqrt{t}}\right)-\mathrm{e}^{\lambda x}\mathrm{erfc}\left(\frac{2a^2\lambda t+x}{2a\sqrt{t}}\right)\right\}-K\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$.

3. $\frac{aB}{k\sqrt{\omega}}\mathrm{e}^{-x\sqrt{\omega/2a^2}}\sin\left(\omega t-x\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}-\frac{\pi}{4}\right)$.

4. 球内:$u(r,t)=1\left(t<\frac{1-r}{a}\right)$,

$$=\frac{1}{2r}(r-at)\left(\frac{1-r}{a}<t<\frac{1+r}{a}\right),=0(t>\frac{1+r}{a}).$$

球外:$u(r,t)=0\left(t<\frac{r-1}{a}\right)$,

$$=\frac{1}{2r}(r-at)\left(\frac{r-1}{a}<t<\frac{r+1}{a}\right),=0\left(t>\frac{r+1}{a}\right).$$

5. 球内:$u=\frac{A}{2r}\left[(r-at)\cos\frac{\pi(r-at)}{2r_0}\right.$

$$\left.+(r+at)\cos\frac{\pi(r+at)}{2r_0}\right]\left(t<\frac{r_0-r}{a}\right),$$

$$=\frac{A}{2r}(r-at)\cos\frac{\pi(r-at)}{2r_0}\quad\left(\frac{r_0-r}{a}<t<\frac{r_0+r}{a}\right),$$

$$=0 \quad \left(t>\frac{r_0+r}{a}\right).$$

球外：$u=0 \quad \left(t<\dfrac{r-r_0}{a}\right)$，

$$=\frac{A}{2R}(r-at)\cos\frac{\pi(r-at)}{2r_0} \quad \left(\frac{r-r_0}{a}<t<\frac{r+r_0}{a}\right),$$

$$=0 \quad \left(t>\frac{r+r_0}{a}\right).$$

6\. $u|_{\rho=0}=1 \quad (t<1/a),\ =1-\dfrac{at}{\sqrt{a^2t^2-1}} \quad (t>1/a).$

7\. $u(\boldsymbol{r},t)=\displaystyle\iiint\varphi(\boldsymbol{r}')\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3}e^{\frac{-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^2}{4a^2t}}dx'dy'dz'.$

8\. 同泊松公式，但球面 S^r_{at} 改为 $S^r_{a|t|}$。

9\. $At-\displaystyle\int_0^t A\mathrm{erf}(x/2a\sqrt{t-\tau})d\tau=A\int_0^t\mathrm{erfc}(x/2a\sqrt{t-\tau})d\tau.$

10\. $$f(0)\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)+\int_0^t f'(\tau)\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right)d\tau$$
$$+\int_{-x/2a\sqrt{t}}^{\infty}\varphi(x+z2a\sqrt{t})\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}dz$$
$$-\int_{x/2a\sqrt{t}}^{\infty}\varphi(z2a\sqrt{t}-x)\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}dz.$$

11\. $$q(t)e^{-x}-\frac{1}{2}q(0)e^{4a^2t^2}\left\{e^{4a^2xt}\mathrm{erfc}\left(\frac{2a^2t-x}{2a\sqrt{t}}\right)\right.$$
$$\left.-e^{-4a^2xt}\mathrm{erfc}\left(\frac{2a^2t+x}{2a\sqrt{t}}\right)\right\}+\int_0^t\frac{1}{2}[a^2q(\tau)-q'(\tau)]$$
$$\times e^{-4a^2(t-\tau)^2}\left\{e^{4a^2x(t-\tau)}\mathrm{erfc}\left(\frac{2a^2(t-\tau)-x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right)\right.$$
$$\left.-e^{4a^2x(t-\tau)}\mathrm{erfc}\left(\frac{2a^2(t-\tau)+x}{2a\sqrt{t}}\right)\right\}d\tau.$$

12\. 超前势 $\displaystyle\frac{1}{4\pi a^2}\iiint_{T^r_{a|t|}}\frac{f(\boldsymbol{r},t+R/a)}{R}dx'dy'dz'.$

§13.2. 1. $u=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\left[\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\right]d\xi.$

2\. $\dfrac{\Phi_0}{a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}.$

3\. $\displaystyle\int_{\xi=-\infty}^{\infty}\int_{\tau=0}^{t}\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-(x-\xi)^2/4a^2(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi d\tau.$

4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t f(t-\tau)\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{\tau}}\right)\mathrm{d}\tau$.

5. $\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi$

$$+\frac{1}{2a}\int_{\tau=0}^{t}\int_{\xi=x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau.$$

§ 14.2.1. $\mathrm{Re}\left[-\frac{Q}{\epsilon_0 2\pi}\ln\frac{z^3-\mathrm{i}a^3}{z^3+\mathrm{i}a^3}\right]$.

2. $\mathrm{Re}\left[-\frac{Q}{\epsilon_0 2\pi}\ln\left(\frac{a}{b}\frac{z-b}{z-a^2/b}\right)\right]$.

3. $\epsilon_0 2\pi/\ln\left[\frac{b}{a}+\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2-1}\right]$，即 $\epsilon_0 2\pi/\mathrm{arc\ ch}\,\frac{b}{a}$.

4. $z_1=z/(a-z)$，$z_2=z_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}$，$z_3=z_2^{6/5}$，$\zeta=az_3/(z_3+1)$，电势$=C_1\mathrm{Im}\zeta+C_2$.

5. $z_1=z/(a-z)$，$z_2=z_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}$，$z_3=z_2^{6/5}$，$z_4=(z_3-1)/(z_3+1)$，$z_4=\frac{1}{2}(\zeta+1/\zeta)$，电势$=C_1\ln|\zeta|+C_2$.

6. (1) $z_1=[z+\sqrt{3}-\mathrm{i}]/[-z+\sqrt{3}+\mathrm{i}]$，$z_2=z_1^3$，$\zeta=\frac{z_2-\mathrm{i}}{z_2-\mathrm{i}}$.

(2) $z_1=z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}$，$z_2=z_1^{2/3}$，$z_3=\frac{1}{2}(z_2/2^{2/3}+2^{2/3}/z_2)$，

$\zeta=(z_3-\mathrm{i})/(z_3+\mathrm{i})$.

(3) $z_1=\frac{1}{z-2}$，$z_2=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z_1}$，$z_3=z_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}/4}$，$z_4=z_3^{4\pi/3}$，$\zeta=(z_4-\mathrm{i})/(z_4+\mathrm{i})$.

(4) $z_1=(z-3)/(z+3)$，$z_2=\mathrm{i}z_1$，$z_3=\sqrt{z_2^2+1/49}$，

$\zeta=(z-\mathrm{i})/(z+\mathrm{i})$，

(5) $z_1=(z-1)/(z+1)$，$z_2=-\mathrm{i}z_1$，$z_3=\sqrt{z_2^2+1}$，

$\zeta=(z_3-\mathrm{i})/(z_3+\mathrm{i})$.

(6) $\zeta=\sqrt{z}$.　　　　(7) $\zeta=z^2$.

7. $z/a=(\zeta+1/\zeta)/2$，电势$=C_1\ln|\zeta|+C_2$.

8. $z/\sqrt{a^2-b^2}=(\zeta+1/\zeta)/2$，电势$=C_1\ln|\zeta|+C_2$.

9. $C=\epsilon_0 2\pi/\ln[(a_2+b_2)/(a_1+b_1)]$.

10. $z/a=(\zeta+1/\zeta)/2$，速度势$=C_1\ln|\zeta|-C_2$.

11. $z^3=(\zeta^3+1/\zeta^3)/2$.

12. 取图 14-20 标有×记号处为原点，x 轴向右，y 轴向上. $(0,0)$，$(\infty,0$

或 h),(H,h),(0 或 H,∞)四"点"连成四角形,把这四点依次变为 ζ_1 平面实轴上的(0,0),(1,0),$(a^2,0)$,$(\pm\infty,0)$四点,变换是

$$z=\frac{2i}{\pi}\left[h\operatorname{arctg}\left(\frac{h}{H}\sqrt{\frac{\zeta_1}{\zeta_1-a^2}}+H\operatorname{arcth}\sqrt{\frac{\zeta_1}{\zeta_1-a^2}}\right]\right.,$$

a^2 不能任意指定,它 $=1+\frac{h^2}{H^2}$. 再作变换 $\zeta=\frac{V}{\pi}\ln\frac{1+\sqrt{\zeta_1}}{1-\sqrt{\zeta_1}}$,把 ζ_1 平面的(0,0),(1,0),$(\pm\infty,0)$变为 ζ 平面的(0,0),(∞,0 或 iV),(0,V). 复势 $=\zeta$,磁场 $B=H=\left|\frac{d\zeta}{dz}\right|=\left|\frac{d\zeta}{d\zeta_1}\Big/\frac{dz}{d\zeta_1}\right|$

$=\left|\frac{V}{\pi\sqrt{\zeta_1}(1-\zeta_1)}\Big/\frac{iH\sqrt{\zeta_1-a^2}}{\pi(\zeta_1-1)\sqrt{\zeta_1}}\right|=\left|\frac{V}{H\sqrt{\zeta_1-a^2}}\right|$. 于 $\zeta_1=0$,

$B=B_{min}$;于 $\zeta_1=1$,$B=B_{max}$.

$$B_{max}:B_{min}=\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}=\frac{\sqrt{H^2+h^2}}{h}.$$

13. $\zeta=-\cos\frac{\pi z}{a}$ 把(0,0),$(a,0)$,(0,或 a,∞)变为 ζ 平面实轴上的(−1,0),(1,0),$(\pm\infty,0)$. 利用(12.2.23),在 ζ 平面解得

$$u=\frac{u_0}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{2\eta}{\xi^2+\eta^2-1}.$$

回到原自变数,$u=\frac{v_0}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{sh}(\pi y/a)\sin(\pi x/a)}{\operatorname{sh}^2(\pi y/a)-\sin^2(\pi x/a)}$.

14. 取图 14-2 的动片右端点为原点,x 轴向右,y 轴向上.

$$z=\frac{h_2}{\pi}\ln(1-\zeta)+\frac{h_1}{\pi}\ln\left(1+\frac{h_2}{h_1}\zeta\right)$$

把 z 平面的($-\infty$,0 或 $-h_2$),(∞,$-h_2$ 或 $+h_1$),($-\infty$,$+h_1$ 或 0),(0,0)变为 ζ 平面实轴的(1,0),$(\pm\infty,0)$,$(-h_1/h_2,0)$,(0,0). 设定片和动片的电势分别为 v_0 和 0,利用(12.2.23),在 ζ 平面解得

$$u=v_0-\frac{v_0}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\eta(1+h_1/h_2)}{\xi^2+\eta^2+(h_1/h_2-1)\xi-h_1/h_2}.$$

回到原自变数即得解.

15. 取图 14-22D 形盒的中心点为原点,x 轴向右,y 轴向上.

$$z=iH+\frac{4Ha}{\pi(a^2-1)^2}\left[\zeta_1+\frac{a^2}{\zeta_1}\right]-\frac{2H}{\pi}\ln\frac{\zeta_1-a}{\zeta_1+a}$$

把$(\pm\infty,H)$,$(-h,H)$,$(-\infty,\pm H)$,$(-h,-H)$,$(\pm\infty,-H)$,$(h,-H)$,$(\infty,\pm H)$,(h,H)变为$(\pm\infty,0)$,$(-b,0)$,$(-a,0)$,$(-1,0)$,

$(0,0),(1,0),(a,0),(b,0)$，其中 $b=a^2$，a 应满足

$$\frac{4Ha}{\pi(a^2-1)^2}(a^2+1)-\frac{2H}{\pi}\ln\frac{a-1}{a+1}=h.$$

再作变换 $\zeta=\ln\zeta_1$，则电势 $v=v_1+\frac{v_2-v_1}{\pi}\eta$，从而 $v=v_1+\frac{v_2-v_1}{\pi}\arg\zeta_1$.

回到原自变数即得解.

人名对照表

Bessel 贝塞尔
Cauchy 柯西
Christoffel 克利斯多菲
d'Alembert 达朗贝尔
Dirichlet 狄利克雷
Euler 欧拉
Fourier 傅里叶
Fresnel 菲涅耳
Gauss 高斯
Green 格林
Hankel 汉克尔
Heaviside 赫维赛德
Helmholtz 亥姆霍兹
Hermite 埃尔米特
Hilbert 希尔伯特
Jacobi 雅可俾
Jeffreys 杰弗莱斯
Jordan 若尔当
Kirchhoff 基尔霍夫
Kronecker 克罗内克
Laguerre 拉盖尔
Laplace 拉普拉斯
Laurent 洛朗
Leibnitz 莱布尼茨
Legendre 勒让德
l'Hospital 罗毕达
Livouville 刘维尔
Mellin 梅林
Neumann 诺伊曼
Poisson 泊松
Rayleigh 瑞利
Riemann 黎曼
Ritz 里茨
Rodrigues 罗德里格斯
Rogowski 洛果夫斯基
Rouchè 儒歇
Schläfli 施列夫利
Schwarz 施瓦兹
Sommerfeld 索末菲
Stirling 斯特令
Sturm 施图姆
Taylor 泰勒
Wronski 朗斯基
Жуковский 儒阔夫斯基